

文章编号: 1001-0920(2011)06-0949-04

# 基于类二次型 Lyapunov 函数的 Super-twisting 算法收敛性分析

李 鹏, 郑志强

(国防科技大学 机电工程与自动化学院, 长沙 410073)

**摘 要:** 基于非光滑的类二次型 Lyapunov 函数, 对二阶滑模 Super-twisting 算法的有限时间收敛性进行了分析. 当系统受常值干扰时, 通过 Lyapunov 方程证明了该算法有限时间收敛, 并给出了收敛时间的最优估计; 当系统受时变干扰时, 通过求解代数 Riccati 方程得出了一组保证该算法有限时间收敛的参数取值范围, 并给出了收敛时间的估计值. 仿真算例表明了理论分析的正确性.

**关键词:** 类二次型 Lyapunov 函数; Super-twisting 算法; 有限时间收敛

中图分类号: TP273

文献标识码: A

## Convergence of Super-twisting algorithm based on quadratic-like Lyapunov function

LI Peng, ZHENG Zhi-qiang

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China. Correspondent: LI Peng, E-mail: lipeng0327@nudt.edu.cn)

**Abstract:** The finite time convergence of the second order sliding Super-twisting algorithm is analyzed by using a non-smooth quadratic-like Lyapunov function. For the constant disturbance, the finite time convergence is proved through Lyapunov equation, and the optimal estimation of the convergence time is presented. For the time varying disturbance, the finite time convergence of Super-twisting is guaranteed when the parameters satisfy the algebraic Riccati equation, and the estimation of the convergence time is provided. Finally, simulation results show the correction of the theoretical analysis.

**Key words:** quadratic-like Lyapunov function; Super-twisting algorithm; finite time convergence

### 1 引 言

为了克服传统滑模控制中的“抖振”问题和相对阶的限制<sup>[1-2]</sup>, 文献[3]提出了高阶滑模(HOSM)的思想. [4]系统地提出了二阶滑模算法(SOSM), 并给出了控制精度的估计. [5]提出了基于有限时间收敛 Super-twisting 算法的二阶滑模微分器, 极大地促进了 HOSM 数学理论和应用的发展. 在[5-6]中, Super-twisting 算法的有限时间收敛证明是基于系统轨迹在相平面中的几何特性展开的, 并不能给出收敛时间的估计. [7-8]采用齐次性分析证明了 Super-twisting 算法有限时间收敛, 与基于系统轨迹几何特性的方法相比更简单, 但同样不能给出收敛时间的估计. [9]采用 Zubov 方法和特征方法, 构造性地给出了保证 Super-twisting 算法有限时间有限收敛的一个全局 Lyapunov 函数, 但计算过程复杂. [10-11]提出了一个类二次型的 Lyapunov 函数, 使得对收敛时间的估计

变得简单.

本文在文献[10-11]提出的一种类二次型 Lyapunov 函数的基础上, 分别分析了系统受常值干扰和时变干扰两种情形: 当系统受常值干扰时, 基于 Lyapunov 方程给出了 Super-twisting 收敛时间的最优估计; 当系统受时变干扰时, 通过求解代数 Riccati 方程给出一组保证 Super-twisting 算法有限时间收敛的参数取值范围, 同时给出了收敛时间的估计. 仿真结果表明了本文分析的有效性.

### 2 问题描述

考虑如下受控系统:

$$\dot{x} = u(t) + \varphi(t). \quad (1)$$

其中:  $x \in R$  为状态量;  $\varphi(t)$  为未知干扰;  $u$  为“Super-twisting”控制律<sup>[12]</sup>, 且有

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t),$$

收稿日期: 2010-04-02; 修回日期: 2010-05-07.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60374006).

作者简介: 李鹏(1982-), 男, 博士生, 从事精确制导与控制的研究; 郑志强(1965-), 男, 教授, 博士生导师, 从事精确制导与控制、多机器人协同控制等研究.

$$u_1(t) = -k_1|x|^{1/2}\text{sign}(x), \dot{u}_2 = -k_2\text{sign}(x), \quad (2)$$

$k_1 > 0, k_2 > 0$  为设计参数,  $\text{sign}(x)$  定义为

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ -1, & x < 0; \\ \in [-1, 1], & x = 0. \end{cases} \quad (3)$$

假设干扰  $\varphi(t)$  是 Lipschitz 的, 且

$$|\dot{\varphi}(t)| \leq \delta, \forall t \geq 0, \quad (4)$$

其中  $\delta$  为已知常数. 式 (1) 的解是在 Filippov 意义下的解<sup>[12]</sup>. 采用状态变换

$$y = \varphi - k_2 \int_0^t \text{sign}(x) d\tau. \quad (5)$$

系统 (1) 可改写为

$$\begin{cases} \dot{x} = -k_1|x|^{1/2}\text{sign}(x) + y, \\ \dot{y} = -k_2\text{sign}(x) + \dot{\varphi}. \end{cases} \quad (6)$$

本文研究目标是通过一种二次型 Lyapunov 函数, 证明系统 (6) 在有限时间收敛到原点, 并给出收敛时间的估计值.

**注 1** 式 (1) 可理解为沿系统轨线的滑模动态特性,  $x$  是滑模变量, 系统的相对阶为 1. 所以, Super-twisting 算法是一种当系统的相对阶为 1 时可采用的二阶滑模算法, 在有限的时间内使得  $\dot{x} = x = 0$ , 而一阶滑模 (传统滑模) 只能在有限时间内使得  $x = 0$ .

### 3 常值干扰时的 Super-twisting 算法

考虑常值干扰, 即  $\dot{\varphi} = 0$  时, 式 (6) 可改写为

$$\begin{cases} \dot{x} = -k_1|x|^{1/2}\text{sign}(x) + y, \\ \dot{y} = -k_2\text{sign}(x). \end{cases} \quad (7)$$

**定理 1** 当  $k_1 > 0, k_2 > 0$  时, 系统 (7) 能在有限时间内收敛到原点 (0,0), 此时亦有  $\dot{x} = x = 0$ .

**证明** 令  $A = \begin{bmatrix} -k_1/2 & 1/2 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix}$ , 由于  $k_1 > 0, k_2 > 0$ , 其特征多项式为  $p(s) = s^2 + k_1s/2 + k_2/2$ ,  $A$  是 Hurwitz 矩阵, 对于任意正定对称矩阵  $Q$ , 一定存在一个正定对称矩阵  $P$  满足 Lyapunov 方程

$$A^T P + P A = -Q. \quad (8)$$

考虑类二次型函数  $V(x, y)$  为备选 Lyapunov 函数

$$V(x, y) = \zeta^T P \zeta, \quad (9)$$

其中  $\zeta^T = [|x|^{1/2}\text{sign}(x), y]$ .  $V(x, y)$  是连续正定函数, 且径向无界, 除了集合  $\{x = 0\}$  外,  $V$  处处可微, 但当系统没有收敛到原点时, 系统状态不会停留在集合  $\{x = 0\}$  上, 故可以用链式法则求取  $\dot{V}$ . 利用  $d|x|/dt = \dot{x}\text{sign}(x)$ , 有

$$\dot{\zeta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{1}{|x|^{1/2}} (-k_1|x|^{1/2}\text{sign}(x) + y) \\ -k_2\text{sign}(x) \end{bmatrix} = \frac{1}{|\zeta_1|} A \zeta. \quad (10)$$

对  $V$  沿系统 (7) 的轨线求导有

$$\dot{V} = \frac{1}{|\zeta_1|} \zeta^T (A^T P + P A) \zeta = -\frac{1}{|\zeta_1|} \zeta^T Q \zeta. \quad (11)$$

因为  $V = \zeta^T P \zeta$  为二次正定函数, 所以有

$$\lambda_{\min}(P) \|\zeta\|_2^2 \leq \zeta^T P \zeta \leq \lambda_{\max}(P) \|\zeta\|_2^2. \quad (12)$$

其中:  $\lambda_{\min}(P)$  和  $\lambda_{\max}(P)$  分别为  $P$  的最小和最大特征值;  $\|\cdot\|_2$  为欧氏空间  $R^2$  上的 2-范数;  $\|\zeta\|_2^2 = \zeta_1^2 + \zeta_2^2 = |x| + y^2$ , 进一步可以得出

$$|\zeta_1| = |x|^{1/2} \leq \|\zeta\|_2 \leq \frac{V^{1/2}}{\lambda_{\min}^{1/2}(P)}. \quad (13)$$

由式 (11) 有

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\frac{1}{|\zeta_1|} \lambda_{\min}(Q) \|\zeta\|_2^2 = \\ &-\frac{\|\zeta\|_2}{|\zeta_1|} \lambda_{\min}(Q) \|\zeta\|_2 \leq -\lambda_{\min}(Q) \|\zeta\|_2, \end{aligned} \quad (14)$$

由式 (12) 有

$$V^{1/2} / \lambda_{\max}^{1/2}(P) \leq \|\zeta\|_2, \quad (15)$$

则由式 (14) 和 (15) 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\gamma(Q) V^{1/2}(x), \\ \gamma(Q) &= \lambda_{\min}(Q) / \lambda_{\max}^{1/2}(P). \end{aligned} \quad (16)$$

由比较原理可得<sup>[4]</sup>, 当  $t$  满足  $t \geq T = 2V^{1/2}(x_0, y_0) / \gamma(Q)$  时,  $V = 0$ , 所以系统 (7) 的状态能在有限时间  $T$  内收敛到原点. 同时由式 (7) 可知, 当  $x = y = 0$  时,  $\dot{x} = 0$ .  $\square$

**注 2** 定理 1 的证明受文献 [11] 中命题 1 的启发, 但文献 [11] 中有  $\gamma(Q) = \lambda_{\min}(Q) \lambda_{\min}^{1/2}(P) / \lambda_{\max}(P)$ , 显然

$$\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}^{1/2}(P)} \geq \frac{\lambda_{\min}(Q) \lambda_{\min}^{1/2}(P)}{\lambda_{\max}(P)},$$

由此可知本文对收敛时间  $T$  的估计更精确.

由定理 1 可知, 任意给定一个正定对称矩阵  $Q$ , 通过求解 Lyapunov 方程 (8), 总能找到一个 Lyapunov 函数  $V(x, y) = \zeta^T P \zeta$ , 保证系统 (7) 在有限时间内收敛, 且存在着一个满足某种性质的正定对称矩阵  $Q$ , 使得对收敛时间  $T$  的估计是最优的, 即

$$T_{\text{opt}} = \min_{Q>0} T. \quad (17)$$

由定理 1 有

$$\begin{aligned} T &= \frac{2}{\gamma(Q)} V^{1/2}(x_0, y_0) = \frac{2\lambda_{\max}^{1/2}(P)}{\lambda_{\min}(Q)} V^{1/2}(x_0, y_0) \leq \\ &\frac{2\lambda_{\max}^{1/2}(P) \lambda_{\max}^{1/2}(P)}{\lambda_{\min}(Q)} \|\zeta(0)\|_2 = \frac{2\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(Q)} \|\zeta(0)\|_2 = \\ &2\beta(Q) \|\zeta(0)\|_2, \end{aligned} \quad (18)$$

其中  $\beta(Q) = \lambda_{\max}(P) / \lambda_{\min}(Q)$ . 故式 (17) 表示的最优化问题等价于

$$\beta_{\text{opt}} = \min_{Q>0} \beta(Q). \quad (19)$$

**定理 2** 当  $Q = I$  时, 对收敛时间  $T$  的估计是最

优的,  $I$  为单位矩阵.

**证明** 由式 (18) 可知, 对于任意  $\alpha > 0$ ,  $Q$  和  $\alpha Q$  对收敛时间  $T$  的估计是一样的, 因此可限定  $Q$  的范围为集合  $\Theta = \{Q|Q = Q^T, Q > 0, \lambda_{\min}(Q) = 1\}$ . 设  $P_i$  是 Lyapunov 方程 (8) 在  $Q = Q_i (i = 1, 2)$  时的解, 即

$$A^T P_1 + P_1 A = -Q_1, \quad (20)$$

$$A^T P_2 + P_2 A = -Q_2. \quad (21)$$

由式 (20) 和 (21) 可得

$$A^T (P_2 - P_1) + (P_2 - P_1) A = -(Q_2 - Q_1). \quad (22)$$

因为  $A$  是 Hurwitz 的, 若  $Q_2 \geq Q_1$ , 则  $P_2 \geq P_1$ , 因此有  $\lambda_{\max}(P_2) \geq \lambda_{\max}(P_1)$ ,  $\lambda_{\min}(P_2) \geq \lambda_{\min}(P_1)$ . 在集合  $\Theta$  中取  $Q_1, Q_2$ , 且  $Q_1 = I$ , 则  $Q_2 \geq Q_1$ , 有

$$\beta(Q_2) - \beta(Q_1) = \frac{\lambda_{\max}(P_2)}{\lambda_{\min}(Q_2)} - \frac{\lambda_{\max}(P_1)}{\lambda_{\min}(Q_1)} = \lambda_{\max}(P_2) - \lambda_{\max}(P_1) \geq 0. \quad (23)$$

所以  $\beta(Q_2) \geq \beta(Q_1)$ ,  $\beta(I)$  即为最优值  $\beta_{\text{opt}}$ .  $\square$

**注 3** 定理 2 的证明与文献 [11] 中命题 4 相比, 无需命题 4 中要求  $\lambda_{\min}(P_1)/\lambda_{\max}(P_1) \geq 1/2$  的限制, 且优化指标  $\beta$  比 [11] 中的  $\gamma$  更合理. 因为  $T$  与  $V(x_0, y_0)$  有关, 而  $V(x_0, y_0)$  又与  $P$  有关, 所以 [11] 仅求取  $\gamma$  的最大值来得到收敛时间的最优估计是不严谨的. 同时也从理论上解释了 [11] 中注 5 “从仿真结果得到的推测:  $Q = I$  时收敛时间的估计总是最优值” 的原因. 当  $Q = I$  时, 通过 Lyapunov 方程可以求得此时有

$$P_I = \begin{bmatrix} \frac{2k_2 + 1}{k_1} & -1 \\ -1 & \frac{k_1^2 + 2k_2 + 1}{2k_1 k_2} \end{bmatrix}.$$

#### 4 时变干扰时的 Super-twisting 算法

有时变干扰的 Supertwisting 算法如式 (6) 所示, 式中  $\dot{\varphi} \neq 0$ . 此时, 仅要求  $k_1 > 0$  和  $k_2 > 0$  不能保证系统状态在有限时间内收敛到原点. 文献 [5] 给出  $k_1 = \sqrt{\delta}$ ,  $k_2 = 1.1\delta$  或  $k_1 = 0.5\sqrt{\delta}$ ,  $k_2 = 4\delta$ ; 文献 [6] 给出  $k_1 > \sqrt{\frac{2}{k_2 - \delta} \frac{(k_2 + \delta)(1 + p)}{(1 - p)}}$ ,  $k_2 > \delta$ ,  $0 < p < 1$ .

**定理 3** 对于系统 (6), 若  $|\dot{\varphi}(t)| \leq \delta, \forall t \geq 0$ , 当  $k_1, k_2$  的取值满足

$$k_1 > 2, k_2 > \frac{k_1^3 + (4k_1 - 8)\delta^2}{k_1(4k_1 - 8)}, \quad (24)$$

则系统 (6) 能在有限时间收敛到原点.

**证明** 取正定对称矩阵

$$P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4k_2 + k_1^2 & -k_1 \\ -k_1 & 2 \end{bmatrix},$$

类二次型 Lyapunov 函数为

$$V(x, y) = \zeta^T P \zeta, \quad \zeta^T = [|x|^{1/2} \text{sign}(x) \quad y].$$

令

$$A = \begin{bmatrix} -k_1/2 & 1/2 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0],$$

$$B = [0 \quad 1]^T, \quad \tilde{\varphi} = |\zeta_1| \dot{\varphi},$$

对  $\zeta$  求导有

$$\dot{\zeta} = \frac{1}{|\zeta_1|} (A\zeta + B\tilde{\varphi}). \quad (25)$$

对  $V$  沿系统轨线求导有

$$\dot{V} =$$

$$\frac{1}{|\zeta_1|} \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\varphi} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\varphi} \end{bmatrix} \leq \frac{1}{|\zeta_1|} \left\{ \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\varphi} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\varphi} \end{bmatrix} + \delta^2 \zeta_1^2 - \tilde{\varphi}^2 \right\} \leq \frac{1}{|\zeta_1|} \zeta^T (A^T P + PA + \delta^2 C^T C + PBB^T P) \zeta. \quad (26)$$

令  $A^T P + PA + \delta^2 C^T C + PBB^T P = -Q < 0$ , 则  $\dot{V} \leq -\frac{1}{|\zeta_1|} \zeta^T Q \zeta$ , 此时

$$Q = \begin{bmatrix} k_1 k_2 + \frac{k_1^3}{2} - \delta^2 - \frac{k_1^2}{4} & \frac{k_1}{2} - \frac{k_1^2}{2} \\ \frac{k_1}{2} - \frac{k_1^2}{2} & \frac{k_1}{2} - 1 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

由式 (24) 可得出  $Q$  是正定对称的. 利用定理 2 得到系统状态有限时间收敛到原点, 收敛时间的估计值为

$$T = \frac{2}{\gamma(P, Q)} V^{\frac{1}{2}}(x_0, y_0), \quad \gamma(P, Q) = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}^{\frac{1}{2}}(P)}. \quad \square$$

在有时变干扰存在时, 需要解 Riccati 方程  $A^T P + PA + \delta^2 C^T C + PBB^T P = -Q < 0$ , 不能保证对于任意正定对称的矩阵  $Q$ , 一定能找到一个对称正定矩阵  $P$  满足代数 Riccati 方程, 因此不能像定理 1 那样求得收敛时间的最优估计解析解. 针对给定的其他形式的  $P$  矩阵, 利用定理 3 的思路可求出另外保证系统有限时间收敛的控制参数的取值范围, 使得  $Q$  正定, 因此定理 3 实际上提供了一条求解参数  $k_1$  和  $k_2$  取值范围的途径.

#### 5 数值仿真

**情形 1** 受常值扰动, 有

$$\begin{cases} \dot{x} = -k_1 |x|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x) + y, \\ \dot{y} = -k_2 \text{sign}(x). \end{cases} \quad (28)$$

其中:  $k_1 = k_2 = 1, x(0) = 2, y(0) = \varphi = 5$ . 取  $Q = I$ , 则  $P_I = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ , 仿真结果如图 1 和图 2 所示.

**情形 2** 受时变干扰, 有

$$\begin{cases} \dot{x} = -k_1 |x|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x) + y, \\ \dot{y} = -k_2 \text{sign}(x) + \dot{\varphi}. \end{cases} \quad (29)$$

其中:  $x(0) = 2, y(0) = 5, \dot{\varphi} = \sin(t) - 0.5\sin(3t), |\dot{\varphi}| \leq$

$\delta = 1.5$ . 按式(24)取  $k_1 = 2.5, k_2 = 4.5$ . 此时有

$$P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 24.25 & -2.5 \\ -2.5 & 2 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 15.25 & -1.875 \\ -1.875 & 0.25 \end{bmatrix}.$$

仿真结果如图3和图4所示.

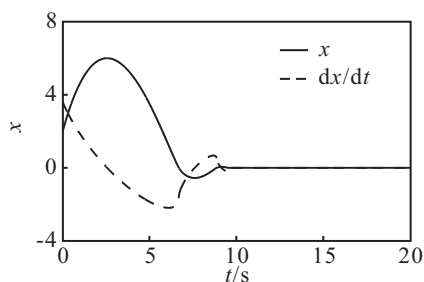


图1 常值干扰时系统状态  $x$  和  $\dot{x}$  的曲线

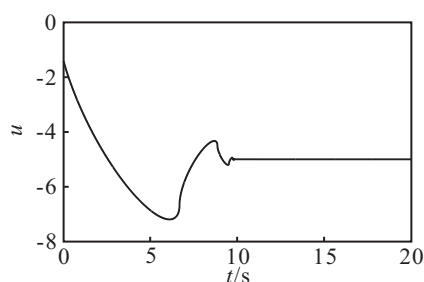


图2 常值干扰时的控制输入  $u$

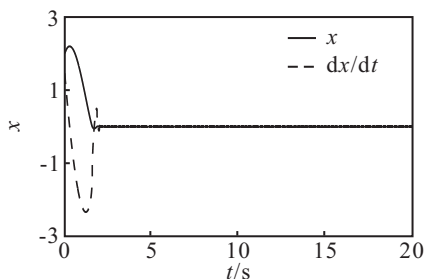


图3 时变干扰时系统状态  $x$  和  $\dot{x}$  的曲线

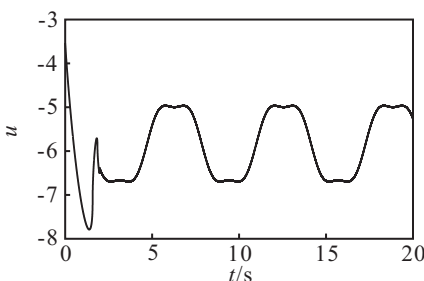


图4 时变干扰时的控制输入  $u$

由图1和图2可见,常值干扰时,系统状态在有限时间内收敛到原点,同时控制输入  $u$  是连续的,不存在“抖振”现象.仿真得到的收敛时间  $T = 9.8$  s;由文献[11]的方法得到的收敛时间估计为  $T = 39.8$  s;由本文方法得到的收敛时间估计为  $T = 15.2$  s,这说明了本文所提出的收敛时间估计更精确.同时,由图3和图4可见,时变干扰时,系统状态在有限时间内收敛到原点,同样控制输入没有“抖振”,说明了定理3所给出的  $k_1$  和  $k_2$  取值范围是正确的.

## 6 结论

本文针对二阶滑模中的 Super-twisting 算法,采用一种 Lyapunov 函数分析其有限时间收敛特性:当系统受常值干扰时,给出了收敛时间的最优估计;当系统受时变干扰时,给出了一组保证受扰系统有限时间收敛的控制参数取值范围.

## 参考文献(References)

- [1] Utkin V I. Variable structure systems with sliding modes[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1977, 22(2): 212-222.
- [2] Slotine J J, Sastry S S. Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces with application to robot manipulator[J]. Int J of Control, 1983, 38(2): 465-492.
- [3] Levantovsky L V, Levant A. Higher order sliding modes and their application for controlling uncertain processes[D]. Moscow: Institute for System Studies of the USSR Academy of Science, 1987.
- [4] Levant A. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control[J]. Int J of Control, 1993, 58(6): 1247-1263.
- [5] Levant A. Robust exact differentiation via sliding mode technique[J]. Automatica, 1998, 34(3): 379-384.
- [6] Davila J, Fridman L, Levant A. Second-order sliding mode observer for mechanical systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(11): 1785-1789.
- [7] Levant A. Homogeneity approach to high-order sliding mode design[J]. Automatica, 2005, 41(5): 823-830.
- [8] Levant A. Principles of 2-sliding mode design[J]. Automatica, 2007, 43(4): 576-586.
- [9] Polyakov A, Poznyak A. Reaching time estimation for "super-twisting" second order sliding mode controller via Lyapunov function designing[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(8): 1951-1955.
- [10] Jaime A M, Marisol O. A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers[C]. Proc of IEEE Int Conf on Decision and Control. New York: IEEE Press, 2008: 2856-2861.
- [11] Davila A, Jaime A M, Fridman L. Optimal Lyapunov function selection for reaching time estimation of supper twisting algorithm[C]. Proc of Joint 48th IEEE Conf on Decision and Control and 28th Chinese Control Conf. New York: IEEE Press, 2009: 8045-8410.
- [12] Filippov A F. Differential equations with discontinuous right-hand sides[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [13] Khalil H K. Nonlinear systems[M]. 3rd ed. New Jersey: Prentice Hall, 2002.