文章编号: 1001-0920 (2012) 03-0389-05

MGM(1,m) 模型的特性研究

熊萍萍[1,2], 党耀国[1], 束 慧[3]

(1. 南京航空航天大学 经济与管理学院，南京 211100；2. 南京信息工程大学
数学与统计学院，南京 210044；3. 南京邮电大学 理学院，南京 210003)

摘 要: 针对 MGM(1,m) 模型的原始数据序列作了相应的数乘变换, 经过一系列数学公式推导, 分析了数乘变换对于模型参数特征的影响, 讨论了数乘变换后模型的模拟预测值及相对误差的变化情况. 研究结果表明, 对各原始数据序列作相同倍数的数乘变换时, 不会改变模型的模拟和预测效果, 同时能缩小数据的量级, 化简计算过程, 对 MGM(1,m) 模型的进一步系统研究具有重要意义.

关键词: 灰色系统；MGM(1,m) 模型；数乘变换；参数特征

中图分类号: N941.5　　**文献标识码:** A

Research on characteristics of MGM(1, m) model

XIONG Ping-ping[1,2], *DANG Yao-guo*[1], *SHU Hui*[3]

(1. College of Economics and Management，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing 211100, China；2. School of Mathematics and Statistics，Nanjing University of Information Science and Technology，Nanjing 210044，China；3. College of Science，Nanjing University of Posts and Telecommunications，Nanjing 210003, China．Correspondent：XIONG Ping-ping，E-mail：xpp8125@163.com)

Abstract: Multiply transformation is correspondingly made for the original data series of MGM(1,m) model. Through calculating a series of mathematical formula, the effect of multiple transformation on parameters characteristics of the model is analyzed, and the changes of simulation and prediction values and the relative errors of the model after multiple transformation are discussed. The study results show that the simulative and predicative effect of the model is not changed, the magnitude of the data is also reduced and the calculating process is simplified, while the original data series are made the same times of multiple transformation. The results have great significance for the further systematical study of MGM(1, m) model.

Key words: grey system；MGM(1,m) model；multiple transformation；parameter characteristics

1 引 言

自灰色系统理论提出以来, 目前已广泛应用于工农业生产、经济、管理和工程技术等领域[1]. GM(1,1) 模型是灰色系统预测理论的基础和核心, 用于单变量的建模和预测[2]. MGM(1,m) 模型[3]则从系统的角度对多变量进行统一描述, 能较好地反映系统中各变量之间相互影响的关系, 不仅可以建模, 而且可以预测. 不同于 GM(1,m) 模型, 后者主要反映 $m-1$ 个相关因素序列对于系统特征序列一阶导的影响, 只反映系统特征序列的变化规律, 而不能用于预测.

自灰色 MGM(1,m) 模型提出以来[3], 一些学者对该模型进行了改进和应用. 文献 [4] 在多因子灰色模型的精确级差格式的基础上, 将误差融入级差格式, 基于理想状态时的相对误差提出了一种新的灰色模型. [5] 基于向量连分式理论利用有理插值和数值积分中的梯形公式及外推法重构背景值, 从而有效地提高了模型的模拟预测精度. [6-7] 将 MGM(1,m) 模型分别应用于变形观测和投资预测中, 得到了较理想的预测效果, 但还没有学者对 MGM(1,m) 模型的特性进行研究. 目前, 已有一些学者对部分灰色模型的特性进行了研究. [8-9] 对 GM(1,1) 模型的特性进行了研究. [10] 讨论了原始数据的数乘变换对于 GM(0,N) 模型的影响. [11-12] 分别从仿射变换和数乘变换的角度对灰色离散模型进行了研究. [13-15] 先后对近似非

收稿日期: 2010-10-11；**修回日期:** 2011-02-24.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71071077, 71171116)；中国博士后科学基金项目(20100481137)；江苏省普通高校研究生科研创新计划项目(CXZZ11_0226)；南京航空航天大学基本科研业务费专项科研项目(NZ2010006).

作者简介: 熊萍萍(1981−), 女, 讲师, 博士生, 从事灰色系统理论的研究；党耀国(1964−), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统理论与数量经济等研究.

齐次指数序列的离散模型、多变量离散模型和GM(n, h)模型的特性作了相应的探讨. 上述研究主要是对GM(1,1)模型, GM(0,N)模型和灰色(多变量)离散模型所作的一系列讨论, 然而, MGM(1,m)模型的特性(如数乘变换对该模型的参数、模拟预测值及相对误差产生的影响)是值得进一步探讨的问题.

本文主要针对MGM(1,m)模型的特性进行研究, 分析其在数乘变换下参数值的变化情况, 探讨模型的模拟预测值和相对误差在变换前后的量化关系, 为更好地了解和研究MGM(1,m)模型奠定理论基础.

2 MGM(1,m)模型

设原始数据矩阵为 $X^{(0)}=\{X_1^{(0)},X_2^{(0)},\cdots,X_m^{(0)}\}^{\mathrm T}$, 其中 $X_j^{(0)}$ 为第 j 个变量在 $1,2,\cdots,n$ 时刻的观测值序列, 即

$$X_j^{(0)}=\{x_j^{(0)}(1),x_j^{(0)}(2),\cdots,x_j^{(0)}(n)\},$$
$$j=1,2,\cdots,m.$$

$X^{(1)}=\{X_1^{(1)},X_2^{(1)},\cdots,X_m^{(1)}\}^{\mathrm T}$ 为原始数据矩阵 $X^{(0)}$ 的一阶累加生成矩阵, $X_j^{(1)}$ 为原始数据序列 $X_j^{(0)}$ 的一阶累加生成序列, 即

$$X_j^{(1)}=\{x_j^{(1)}(1),x_j^{(1)}(2),\cdots,x_j^{(1)}(n)\},$$

其中

$$x_j^{(1)}(i)=\sum_{k=1}^{i}x_j^{(0)}(k),$$
$$j=1,2,\cdots,m,\ i=1,2,\cdots,n.$$

$Z_j^{(1)}=\{z_j^{(1)}(2),z_j^{(1)}(3),\cdots,z_j^{(1)}(n)\}$ 为 $X_j^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列, 有

$$z_j^{(1)}(k)=0.5(x_j^{(1)}(k-1)+x_j^{(1)}(k)),$$
$$j=1,2,\cdots,m,\ k=2,3,\cdots,n.$$

多变量MGM(1,m)模型的矩阵形式为[3]

$$\frac{\mathrm dX^{(1)}(t)}{\mathrm dt}=AX^{(1)}(t)+B. \tag{1}$$

其中

$$A=(a_{ij})_{m\times m},\ B=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm T},$$
$$X^{(1)}(t)=\{x_1^{(1)}(t),x_2^{(1)}(t),\cdots,x_m^{(1)}(t)\}^{\mathrm T}.$$

式(1)的时间响应式向量为

$$X^{(1)}(t)=\mathrm e^{A(t-1)}(X^{(1)}(1)+A^{-1}B)-A^{-1}B. \tag{2}$$

将式(1)离散化可得

$$X^{(0)}(k)=AZ^{(1)}(k)+B.$$

其中

$$X^{(0)}(k)=\{x_1^{(0)}(k),x_2^{(0)}(k),\cdots,x_m^{(0)}(k)\}^{\mathrm T},$$
$$Z^{(1)}(k)=\{z_1^{(1)}(k),z_2^{(1)}(k),\cdots,z_m^{(1)}(k)\}^{\mathrm T},$$
$$k=2,3,\cdots,n.$$

引理1 设 $X_1^{(0)},X_2^{(0)},\cdots,X_m^{(0)}$ 为非负数据序列, $X_j^{(1)}$ 为 $X_j^{(0)}$ 的一阶累加生成序列, $Z_j^{(1)}$ 为 $X_j^{(1)}$ $(j=1,2,\cdots,m)$ 的紧邻均值生成序列, 则有:

1) MGM(1,m)模型的 m 个参数向量的最小二乘估计为

$$(\hat{\boldsymbol a}_1,\hat{\boldsymbol a}_2,\cdots,\hat{\boldsymbol a}_m)=(P^{\mathrm T}P)^{-1}P^{\mathrm T}(Q_1,Q_2,\cdots,Q_m). \tag{3}$$

其中

$$\hat{\boldsymbol a}_i=\{\hat a_{i1},\hat a_{i2},\cdots,\hat a_{im},\hat b_i\}^{\mathrm T},$$
$$P=\begin{bmatrix} z_1^{(1)}(2) & z_2^{(1)}(2) & \cdots & z_m^{(1)}(2) & 1\\ z_1^{(1)}(3) & z_2^{(1)}(3) & \cdots & z_m^{(1)}(3) & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ z_1^{(1)}(n) & z_2^{(1)}(n) & \cdots & z_m^{(1)}(n) & 1\end{bmatrix},$$
$$Q_i=\{x_i^{(0)}(2),x_i^{(0)}(3),\cdots,x_i^{(0)}(n)\}^{\mathrm T},$$
$$i=1,2,\cdots,m.$$

参数矩阵 A 和参数向量 B 的辨识值为

$$\hat A=(\hat a_{ij})_{m\times m},\ \hat B=(\hat b_1,\hat b_2,\cdots,\hat b_m)^{\mathrm T}.$$

2) 多变量MGM(1,m)模型的时间响应式向量为

$$\hat X^{(1)}(k)=\mathrm e^{\hat A(k-1)}(X^{(1)}(1)+\hat A^{-1}\hat B)-\hat A^{-1}\hat B.$$

3) 还原式向量为

$$\hat X^{(0)}(k)=\hat X^{(1)}(k)-\hat X^{(1)}(k-1),\ k=2,3,\cdots,n.$$

3 数乘变换下MGM(1,m)模型的参数特征

定义1 称非负序列数据 $y_k=\rho x_k$ 为数乘变换. 其中: $k=1,2,\cdots,n$; ρ 为常数且 $\rho>0$, 称为数乘量.

设 $X_j^{(0)}$ 为原始非负数据序列, $Y_j^{(0)}$ 为 $X_j^{(0)}$ 的数乘变换数据序列, 即 $Y_j^{(0)}=\rho_jX_j^{(0)}(j=1,2,\cdots,m)$. $X_j^{(1)}$ 和 $Y_j^{(1)}$ 分别为 $X_j^{(0)}$ 和 $Y_j^{(0)}$ 的1-AGO序列, $Z_j^{(1)}$ 为 $X_j^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列, $\bar Z_j^{(1)}=\{\bar z_j^{(1)}(2),\bar z_j^{(1)}(3),\cdots,\bar z_j^{(1)}(n)\}$ 为 $Y_j^{(1)}(j=1,2,\cdots,m)$ 的紧邻均值生成序列. 由于

$$y_j^{(0)}(k)=\rho_jx_j^{(0)}(k), \tag{4}$$

可得

$$y_j^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}y_j^{(0)}(i)=\sum_{i=1}^{k}[\rho_jx_j^{(0)}(i)]=\rho_jx_j^{(1)}(k), \tag{5}$$
$$\bar z_j^{(1)}(k)=0.5(y_j^{(1)}(k)+y_j^{(1)}(k-1))=\rho_jz_j^{(1)}(k). \tag{6}$$

下面讨论数乘变换对于MGM(1,m)模型的参数的影响.

引理2 设 $X_1^{(0)},X_2^{(0)},\cdots,X_m^{(0)}$ 为非负数据序列, $Y_1^{(0)},Y_2^{(0)},\cdots,Y_m^{(0)}$ 为数乘变换序列, $Y_j^{(1)}$ 为 $Y_j^{(0)}$ 的一阶累加生成序列, $\bar Z_j^{(1)}$ 为 $Y_j^{(1)}(j=1,2,\cdots,m)$ 的紧邻均值生成序列, 则有:

1) $Y_1^{(0)},Y_2^{(0)},\cdots,Y_m^{(0)}$ 所建立的MGM(1,m)模型

的 m 个参数向量的最小二乘估计为

$$(\hat{\boldsymbol{a}}_1, \hat{\boldsymbol{a}}_2, \cdots, \hat{\boldsymbol{a}}_m) = (\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{P})^{-1}\bar{P}^{\mathrm{T}}(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \cdots, \bar{Q}_m). \tag{7}$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{a}}_i = \{\hat{a}_{i1}, \hat{a}_{i2}, \cdots, \hat{a}_{im}, \hat{\bar{b}}_i\}^{\mathrm{T}},$$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{z}_1^{(1)}(2) & \bar{z}_2^{(1)}(2) & \cdots & \bar{z}_m^{(1)}(2) & 1 \\ \bar{z}_1^{(1)}(3) & \bar{z}_2^{(1)}(3) & \cdots & \bar{z}_m^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \bar{z}_1^{(1)}(n) & \bar{z}_2^{(1)}(n) & \cdots & \bar{z}_m^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{Q}_i = \{y_i^{(0)}(2), y_i^{(0)}(3), \cdots, y_i^{(0)}(n)\}^{\mathrm{T}},$$

$$i = 1, 2, \cdots, m.$$

则参数矩阵 $\bar{A}$ 和参数向量 $\bar{B}$ 的估计值为

$$\hat{\bar{A}} = (\hat{a}_{ij})_{m\times m},\ \hat{\bar{B}} = (\hat{\bar{b}}_1, \hat{\bar{b}}_2, \cdots, \hat{\bar{b}}_m)^{\mathrm{T}}. \tag{8}$$

2) $Y_1^{(0)}, Y_2^{(0)}, \cdots, Y_m^{(0)}$ 所建立的 MGM(1,m) 模型的时间响应式向量为

$$\hat{Y}^{(1)}(k) = \mathrm{e}^{\hat{\bar{A}}(k-1)}(Y^{(1)}(1) + \hat{\bar{A}}^{-1}\hat{\bar{B}}) - \hat{\bar{A}}^{-1}\hat{\bar{B}}. \tag{9}$$

3) 还原式向量为

$$\hat{Y}^{(0)}(k) = \hat{Y}^{(1)}(k) - \hat{Y}^{(1)}(k-1),\ k = 2, 3, \cdots, n.$$

定理 1　令 $P^{\mathrm{T}}P = D = (d_{ij})_{(m+1)\times(m+1)}$, $\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{P} = \bar{D} = (\bar{d}_{ij})_{(m+1)\times(m+1)}$, $\bar{D}^*$ 为 $\bar{D}$ 的伴随矩阵, 则有:

1) $\bar{D}$ 和 $\bar{D}^*$ 均为对称矩阵.

2)存在

$$\bar{d}_{ij} = \rho_i\rho_j d_{ij},\ 1 \leqslant i, j \leqslant m;$$

$$\bar{d}_{i,m+1} = \rho_i d_{i,m+1},\ 1 \leqslant i \leqslant m;$$

$$\bar{d}_{m+1,m+1} = d_{m+1,m+1}.$$

证明　1) 因为 $\bar{D}^{\mathrm{T}} = (\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{P})^{\mathrm{T}} = \bar{P}^{\mathrm{T}}(\bar{P}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{P} = \bar{D}$, $(\bar{D}^*)^{\mathrm{T}} = (\bar{D}^{\mathrm{T}})^* = \bar{D}^*$, 所以 $\bar{D}$ 和 $\bar{D}^*$ 都为对称矩阵.

2) 记 $\bar{P} = (\bar{P}_1, \bar{P}_2, \cdots, \bar{P}_m, \bar{P}_{m+1})$, 则有

$$\bar{P}^{\mathrm{T}} = (\bar{P}_1, \bar{P}_2, \cdots, \bar{P}_m, \bar{P}_{m+1})^{\mathrm{T}}.$$

从而可得

$$\bar{D}^{\mathrm{T}} = \bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{P} =$$

$$(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \cdots, \bar{P}_m, \bar{P}_{m+1})^{\mathrm{T}}(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \cdots, \bar{P}_m, \bar{P}_{m+1}).$$

根据矩阵乘法的定义, 当 $1 \leqslant i, j \leqslant m$ 时有

$$\bar{d}_{ij} = \bar{P}_i^{\mathrm{T}}\bar{P}_j = \sum_{k=2}^{n}\bar{z}_i^{(1)}(k)\bar{z}_j^{(1)}(k) =$$

$$\sum_{k=2}^{n}\rho_i z_i^{(1)}(k)\rho_j z_j^{(1)}(k) = \rho_i\rho_j d_{ij}.$$

当 $1 \leqslant i \leqslant m,\ j = m+1$ 时可得

$$\bar{d}_{i,m+1} = \sum_{k=2}^{n}\rho_i z_i^{(1)}(k) = \rho_i\sum_{k=2}^{n}z_i^{(1)}(k) = \rho_i d_{i,m+1}.$$

当 $i, j = m+1$ 时可得

$$\bar{d}_{m+1,m+1} = \bar{P}_{m+1}^{\mathrm{T}}\bar{P}_{m+1} = n-1 = d_{m+1,m+1}. \quad \square$$

定理 2　设

$$D = (d_{ij})_{(m+1)\times(m+1)},\ \bar{D} = (\bar{d}_{ij})_{(m+1)\times(m+1)}.$$

如定理 1 所述, D^* 和 $\bar{D}^*$ 分别为 D 和 $\bar{D}$ 的伴随矩阵, 令 $D^* = (D_{ij})_{(m+1)\times(m+1)}$, $\bar{D}^* = (\bar{D}_{ij})_{(m+1)\times(m+1)}$, D_{ij} 为 d_{ij} 的代数余子式, $\bar{D}_{ij}$ 为 $\bar{d}_{ij}$ 的代数余子式, 则有:

1) $|\bar{D}| = \rho|D|$, 其中 $\rho = \rho_1^2\rho_2^2\cdots\rho_m^2$.

2) 存在

$$\bar{D}_{ij} = \frac{\rho}{\rho_i\rho_j}D_{ij},\ 1 \leqslant i, j \leqslant m;$$

$$\bar{D}_{i,m+1} = \frac{\rho}{\rho_i}D_{i,m+1},\ 1 \leqslant i \leqslant m;$$

$$\bar{D}_{m+1,m+1} = \rho D_{m+1,m+1}.$$

证明　1) 根据定理 1 中的结论 2) 可得

$$|\bar{D}| = \begin{vmatrix} \bar{d}_{11} & \bar{d}_{12} & \cdots & \bar{d}_{1m} & \bar{d}_{1,m+1} \\ \bar{d}_{21} & \bar{d}_{22} & \cdots & \bar{d}_{2m} & \bar{d}_{2,m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \bar{d}_{m1} & \bar{d}_{m2} & \cdots & \bar{d}_{mm} & \bar{d}_{m,m+1} \\ \bar{d}_{m+1,1} & \bar{d}_{m+1,2} & \cdots & \bar{d}_{m+1,m} & \bar{d}_{m+1,m+1} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \rho_1\rho_1 d_{11} & \rho_1\rho_2 d_{12} & \cdots & \rho_1\rho_m d_{1m} & \rho_1 d_{1,m+1} \\ \rho_2\rho_1 d_{21} & \rho_2\rho_2 d_{22} & \cdots & \rho_2\rho_m d_{2m} & \rho_2 d_{2,m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_m\rho_1 d_{m1} & \rho_m\rho_2 d_{m2} & \cdots & \rho_m\rho_m d_{mm} & \rho_m d_{m,m+1} \\ \rho_1 d_{m+1,1} & \rho_2 d_{m+1,2} & \cdots & \rho_m d_{m+1,m} & \rho_{m+1} d_{m+1,m+1} \end{vmatrix} =$$

$$\rho_1^2\rho_2^2\cdots\rho_m^2|D| = \rho|D|,$$

其中 $\rho = \rho_1^2\rho_2^2\cdots\rho_m^2$.

2) 根据代数余子式的定义, 结合定理 1 的结论 2), 同理可证当 $1 \leqslant i, j \leqslant m$ 时有

$$\bar{D}_{ij} =$$

$$\rho_1\rho_2\cdots\rho_{i-1}\rho_{i+1}\cdots\rho_m\rho_1\rho_2\cdots\rho_{j-1}\rho_{j+1}\cdots\rho_m D_{ij} = \frac{\rho}{\rho_i\rho_j}D_{ij}.$$

当 $1 \leqslant i \leqslant m,\ j = m+1$ 时, 可得

$$\bar{D}_{i,m+1} = \frac{\rho}{\rho_i}D_{i,m+1}.$$

当 $i, j = m+1$ 时, 可得 $\bar{D}_{m+1,m+1} = \rho D_{m+1,m+1}$. $\square$

定理 3　设 $\{\hat{a}_{i1}, \hat{a}_{i2}, \cdots, \hat{a}_{im}, \hat{b}_i\}^{\mathrm{T}}$ 和 $\{\hat{\bar{a}}_{i1}, \hat{\bar{a}}_{i2}, \cdots, \hat{\bar{a}}_{im}, \hat{\bar{b}}\}^{\mathrm{T}}(i = 1, 2, \cdots, m)$ 分别是原始数据序列 $X_1^{(0)}$,

$X_2^{(0)},\cdots,X_m^{(0)}$ 和数乘变换序列 $Y_1^{(0)},Y_2^{(0)},\cdots,Y_m^{(0)}$ 建立的多变量 MGM(1,m) 模型所对应的参数向量, 则有

$$\hat{\hat{a}}_{ij}=\frac{\rho_i}{\rho_j}\hat{a}_{ij},\ i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,m;$$

$$\hat{\hat{b}}_i=\rho_i\hat{b}_i,\ i=1,2,\cdots,m.$$

证明 由式 (7) 可知

$$\hat{\boldsymbol{a}}_i=\{\hat{a}_{i1},\hat{a}_{i2},\cdots,\hat{a}_{im},\hat{\bar{b}}_i\}^{\mathrm{T}}=$$
$$(\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{P})^{-1}\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{Q}_i=\bar{D}^{-1}\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{Q}_i,\ i=1,2,\cdots,m.$$

令

$$\bar{D}^{-1}\bar{P}^{\mathrm{T}}=\bar{E}=(\bar{e}_{ij})_{(m+1)\times(n-1)},$$
$$D^{-1}P^{\mathrm{T}}=E=(e_{ij})_{(m+1)\times(n-1)},$$

则有

$$\bar{E}=(\bar{e}_{ij})_{(m+1)\times(n-1)}=\bar{D}^{-1}\bar{P}^{\mathrm{T}}=\frac{\bar{D}^*}{|\bar{D}|}\bar{P}^{\mathrm{T}}.$$

由矩阵的乘法和定理 2 可得

$$\bar{e}_{ik}=\frac{1}{\rho|D|}\Big[\sum_{j=1}^{m}\bar{D}_{ji}\bar{z}_j^{(1)}(k+1)+\bar{D}_{m+1,i}\Big].$$

当 $1\leqslant i\leqslant m$ 时, 有

$$\bar{e}_{ik}=\frac{1}{\rho_i|D|}\Big[\sum_{j=1}^{m}D_{ji}z_j^{(1)}(k+1)+D_{m+1,i}\Big]=$$
$$\frac{1}{\rho_i}e_{ik},\ k=1,2,\cdots,n-1.$$

当 $i=m+1$ 时可得

$$\bar{e}_{m+1,k}=$$
$$\frac{1}{\rho|D|}\Big[\sum_{j=1}^{m}\frac{\rho}{\rho_j}D_{j,m+1}\rho_j z_j^{(1)}(k+1)+\rho D_{m+1,m+1}\Big]=$$
$$\frac{1}{|D|}\Big[\sum_{j=1}^{m}D_{j,m+1}z_j^{(1)}(k+1)+D_{m+1,m+1}\Big]=e_{m+1,k},$$
$$k=1,2,\cdots,n-1.$$

因为

$$\hat{\boldsymbol{a}}_i=\{\hat{\hat{a}}_{i1},\hat{\hat{a}}_{i2},\cdots,\hat{\hat{a}}_{im},\hat{\hat{b}}_i\}^{\mathrm{T}}=(\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{P})^{-1}\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{Q}_i=$$
$$\bar{D}^{-1}\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{Q}_i=\bar{E}\bar{Q}_i,\ i=1,2,\cdots,m,$$

所以

$$\hat{\hat{a}}_{ij}=\sum_{k=1}^{n-1}\bar{e}_{jk}y_i^{(0)}(k+1)=$$
$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\rho_j}e_{jk}\rho_i x_i^{(0)}(k+1)=\frac{\rho_i}{\rho_j}\hat{a}_{ij},$$
$$i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,m;$$
$$\hat{\hat{b}}_i=\sum_{k=1}^{n-1}\bar{e}_{m+1,k}y_i^{(0)}(k+1)=$$
$$\sum_{k=1}^{n-1}e_{m+1,k}\rho_i x_i^{(0)}(k+1)=\rho_i\hat{b}_i,$$
$$i=1,2,\cdots,m.$$

□

4 数乘变换下模型的结果对比分析

下面主要讨论数乘变换对于模型的模拟预测值和相对误差的影响.

定理 4 设 $\hat{Y}^{(1)}(k)$ 为 $Y_1^{(0)},Y_2^{(0)},\cdots,Y_m^{(0)}$ 建立的 MGM(1,m) 模型的时间响应式向量, 有

$$\hat{Y}^{(1)}(k)=$$
$$\mathrm{e}^{\hat{A}(k-1)}\{[\rho_1x_1^{(1)}(1)\ \ \rho_2x_2^{(1)}(1)\ \ \cdots\ \ \rho_mx_m^{(1)}(1)]^{\mathrm{T}}+$$
$$\hat{A}^{-1}[\rho_1\hat{b}_1\ \ \rho_2\hat{b}_2\ \ \cdots\ \ \rho_m\hat{b}_m]^{\mathrm{T}}\}-$$
$$\hat{A}^{-1}[\rho_1\hat{b}_1\ \ \rho_2\hat{b}_2\ \ \cdots\ \ \rho_m\hat{b}_m]^{\mathrm{T}}. \tag{10}$$

证明 将定理 3 的结论代入式 (8), 得到相应的参数矩阵 $\bar{A}$ 和参数向量 $\bar{B}$ 的估计值分别为

$$\hat{\hat{A}}=\begin{bmatrix}\frac{\rho_1}{\rho_1}\hat{a}_{11} & \frac{\rho_1}{\rho_2}\hat{a}_{12} & \cdots & \frac{\rho_1}{\rho_m}\hat{a}_{1m}\\ \frac{\rho_2}{\rho_1}\hat{a}_{21} & \frac{\rho_2}{\rho_2}\hat{a}_{22} & \cdots & \frac{\rho_2}{\rho_m}\hat{a}_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\rho_m}{\rho_1}\hat{a}_{m1} & \frac{\rho_m}{\rho_2}\hat{a}_{m2} & \cdots & \frac{\rho_m}{\rho_m}\hat{a}_{mm}\end{bmatrix}=$$
$$\rho_1\rho_2\cdots\rho_m\frac{1}{\rho_1}\frac{1}{\rho_2}\cdots\frac{1}{\rho_m}\hat{A}=\hat{A}, \tag{11}$$

$$\hat{\hat{B}}=(\hat{\hat{b}}_1,\hat{\hat{b}}_2,\cdots,\hat{\hat{b}}_m)^{\mathrm{T}}=(\rho_1\hat{b}_1,\rho_2\hat{b}_2,\cdots,\rho_m\hat{b}_m)^{\mathrm{T}}. \tag{12}$$

又根据式 (5) 可得

$$Y^{(1)}(1)=(\rho_1x_1^{(1)}(1),\rho_2x_2^{(1)}(1),\cdots,\rho_mx_m^{(1)}(1))^{\mathrm{T}}. \tag{13}$$

将式 (11)∼(13) 代入 (9), 即可证得式 (10) 为 MGM(1,m) 模型的时间响应式向量. □

定理 5 设 $\hat{X}^{(1)}(k)$ 和 $\hat{Y}^{(1)}(k)$ 分别为序列 $X_1^{(1)}$, $X_2^{(1)},\cdots,X_m^{(1)}$ 和 $Y_1^{(1)},Y_2^{(1)},\cdots,Y_m^{(1)}$ 的 MGM(1,m) 模型的模拟值序列, $\hat{X}^{(0)}(k)$ 和 $\hat{Y}^{(0)}(k)$ 分别为 $X_1^{(0)}$, $X_2^{(0)},\cdots,X_m^{(0)}$ 和 $Y_1^{(0)},Y_2^{(0)},\cdots,Y_m^{(0)}$ 的 MGM(1,m) 模型的模拟值序列, 则当 $\rho_1=\rho_2=\cdots=\rho_m=\rho'$ 时有

$$\hat{Y}^{(1)}(k)=\rho'\hat{X}^{(1)}(k),\ \hat{Y}^{(0)}(k)=\rho'\hat{X}^{(0)}(k).$$

证明 当 $\rho_1=\rho_2=\cdots=\rho_m=\rho'$ 时, 有

$$(\rho_1x_1^{(1)}(1),\rho_2x_2^{(1)}(1),\cdots,\rho_mx_m^{(1)}(1))^{\mathrm{T}}=$$
$$(\rho'x_1^{(1)}(1),\rho'x_2^{(1)}(1),\cdots,'x_m^{(1)}(1))^{\mathrm{T}}=\rho'X^{(1)}(1), \tag{14}$$
$$(\rho_1\hat{b}_1,\rho_2\hat{b}_2,\cdots,\rho_m\hat{b}_m)^{\mathrm{T}}=$$
$$(\rho'\hat{b}_1,\rho'\hat{b}_2,\cdots,\rho'\hat{b}_m)^{\mathrm{T}}=\rho'\hat{B}. \tag{15}$$

将式 (14) 和 (15) 代入 (10) 得

$$\hat{Y}^{(1)}(k)=\mathrm{e}^{\hat{A}(k-1)}(\rho'X^{(1)}(1)+\hat{A}^{-1}\rho'\hat{B})-\hat{A}^{-1}\rho'\hat{B}=$$
$$\rho'[\mathrm{e}^{\hat{A}(k-1)}(X^{(1)}(1)+\hat{A}^{-1}\hat{B})-\hat{A}^{-1}\hat{B}]=\rho'\hat{X}^{(1)}(k).$$

且可求得

$$\hat{Y}^{(0)}(k)=\rho'\hat{X}^{(1)}(k)-\rho'\hat{X}^{(1)}(k-1)=\rho'\hat{X}^{(0)}(k). \tag{16}$$

综上, 定理 5 得证. □

定理6　设 ε 和 $\bar{\varepsilon}$ 分别为原始数据序列 $X_1^{(0)}$, $X_2^{(0)},\cdots,X_m^{(0)}$ 和数乘变换序列 $Y_1^{(0)},Y_2^{(0)},\cdots,Y_m^{(0)}$ 所建立的多变量 MGM(1,m) 模型的相对误差序列, 则当 $\rho_1=\rho_2=\cdots=\rho_m=\rho'$ 时有 $\bar{\varepsilon}=\varepsilon$.

证明　由式 (16) 可知, 当 $\rho_1=\rho_2=\cdots=\rho_m=\rho'$ 时, 有

$$\hat{y}_j^{(0)}(k)=\rho'\hat{x}_j^{(0)}(k),\ j=1,2,\cdots,m.$$

又根据式 (4) 可知, 当 $\rho_1=\rho_2=\cdots=\rho_m=\rho'$ 时, 有

$$y_j^{(0)}(k)=\rho' x_j^{(0)}(k),\ j=1,2,\cdots,m.$$

从而可以得到

$$\bar{\varepsilon}=[\bar{\varepsilon}_1\ \ \bar{\varepsilon}_2\ \ \cdots\ \ \bar{\varepsilon}_m]^{\mathrm{T}}=$$

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\hat{y}_1^{(0)}(k)-y_1^{(0)}(k)}{y_1^{(0)}(k)}\\ \dfrac{\hat{y}_2^{(0)}(k)-y_2^{(0)}(k)}{y_2^{(0)}(k)}\\ \vdots\\ \dfrac{\hat{y}_m^{(0)}(k)-y_m^{(0)}(k)}{y_m^{(0)}(k)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\rho'\hat{x}_1^{(0)}(k)-\rho' x_1^{(0)}(k)}{\rho' x_1^{(0)}(k)}\\ \dfrac{\rho'\hat{x}_2^{(0)}(k)-\rho' x_2^{(0)}(k)}{\rho' x_2^{(0)}(k)}\\ \vdots\\ \frac{\rho'\hat{x}_m^{(0)}(k)-\rho' x_m^{(0)}(k)}{\rho' x_m^{(0)}(k)}\end{bmatrix}=\varepsilon.$$

5　结　论

通过对 MGM(1,m) 模型的 m 个原始数据序列分别进行数乘变换, 对其变换后的参数特征、模型的模拟预测值及相对误差的变化情况进行了研究. 并得到如下结论: 1) 第 i 个参数向量中第 j 个参数值与序列 $X_i^{(0)}(i=1,2,\cdots,m)$ 的数乘变换值 ρ_i 成正比, 与序列 $X_j^{(0)}(j=1,2,\cdots,m)$ 的数乘变换值 ρ_j 成反比, 而第 i 个参数向量中的常数项参数与 ρ_i 成正比; 2) 当对序列 $X_1^{(0)},X_2^{(0)},\cdots,X_m^{(0)}$ 分别作数乘 $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_m$ 倍变换时, 变换后所得模型的模拟预测值与数乘变换值有关; 3) 当 $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_m$ 取值相等, 即各序列作数乘 ρ' 倍变换时, 变换后的模拟预测值也相应地变化 ρ' 倍, 且模型的相对误差与 m 个数据序列的数乘变换值无关.

在今后的 MGM(1,m) 建模过程中, 当 m 个原始数据序列的数量级偏大时, 可以通过对原始数据序列作相同倍数的数乘变换, 使建模数据量级变小, 从而使计算更为简洁, 且不会改变模型的模拟预测效果. 因此, 对 MGM(1,m) 模型在数乘变换下的特性进行研究具有一定的理论意义和实际意义.

参考文献(References)

[1] 邓聚龙. 灰理论基础[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 2002: 3-5.
(Deng J L. The basis of grey theory[M]. Wuhan: Press of Huazhong University of Science and Technology, 2002: 3-5.)

[2] 刘思峰, 党耀国, 方志耕. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 125-127.
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G. Grey system theory and its application[M]. Beijing: Science Press, 2004: 125-127.)

[3] 翟军, 盛建明, 冯英浚. MGM(1,n) 灰色模型及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 1997, 5(5): 109-113.
(Zhai J, Sheng J M, Feng Y J. The grey model MGM(1,n) and its application[J]. Systems Engineering —Theory and Practice, 1997, 5(5): 109-113.)

[4] 李小霞, 同小军, 陈绵云. 多因子灰色 MGMp(1,n) 优化模型[J]. 系统工程理论与实践, 2003, 4(4): 47-51.
(Li X X, Tong X J, Chen M Y. MGMp(1,n) optimization model[J]. Systems Engineering — Theory and Practice, 2003, 4(4): 47-51.)

[5] 崔立志, 刘思峰, 吴正朋. 基于向量连分式理论的 MGM(1,n) 模型[J]. 系统工程, 2008, 26(10): 47-51.
(Cui L Z, Liu S F, Wu Z P. MGM(1,n) based on vector continued fractions theory[J]. Systems Engineering, 2008, 26(10): 47-51.)

[6] 石世云. 多变量灰色模型 MGM(1,n) 在变形预测中的应用[J]. 测绘通报, 1998, (10): 9-18.
(Shi S Y. The application of the grey multi-variable MGM(1,n) in transforming prediction[J]. Bulletin of Surveying and Mapping, 1998, (10): 9-18.)

[7] 王五祥, 张维, 崔和瑞, 等. 多变量灰色模型 MGM(1,n) 在 R&D 投资预测中的应用[J]. 研究与发展管理, 2006, 18(2): 92-96.
(Wang W X, Zhang W, Cui H R, et al. Application of grey multi-variable model MGM(1,n) in the RD investment forecast[J]. RD Management, 2006, 18(2): 92-96.)

[8] 李希灿. 灰色系统 GM(1,1) 模型使用范围拓广[J]. 系统工程理论与实践, 1999, 19(1): 97-101.
(Li X C. Widening of suitable limits of grey system GM(1,1) model[J]. Systems Engineering —Theory and Practice, 1999, 19(1): 97-101.)

[9] Xiao X P, Deng J L. A new modified GM(1,1) model: Grey optimization model[J]. Systems Engineering and Electronic, 2001, 12(2): 1-5.

[10] 肖新平, 邓聚龙. 数乘变换下 GM(0,N) 模型中的参数特征[J]. 系统工程与电子技术, 2000, 22(10): 1-3.
(Xiao X P, Deng J L. Parameter characteristics of GM(0,N) model under multiple transformation[J]. Systems Engineering and Electronics, 2000, 22(10): 1-3.)

[11] 谢乃明, 刘思峰. 离散灰色模型的仿射特性研究[J]. 控制与决策, 2008, 23(2): 200-203.
(Xie N M, Liu S F. Research on the affine properties of discrete grey model[J]. Control and Decision, 2008, 23(2): 200-203.)

(下转第398页)