

文章编号: 1001-0920(2012)03-0413-06

不确定非线性系统的自适应反推高阶终端滑模控制

王坚浩, 胡剑波

(空军工程大学 工程学院, 西安 710038)

摘要: 针对一类非匹配不确定非线性系统, 提出一种神经网络自适应反推高阶终端滑模控制方案. 反推设计的前 $n-1$ 步利用神经网络逼近未知非线性函数, 结合动态面控制设计虚拟控制律, 避免传统反推设计存在的计算复杂性问题, 并抑制非匹配不确定性的影响; 第 n 步结合非奇异终端滑模设计高阶滑模控制律, 去除控制抖振, 使系统对于匹配和非匹配不确定性均具有鲁棒性. 理论分析证明了闭环系统状态半全局一致终结有界, 仿真结果表明了所提出方法的有效性.

关键词: 自适应反推; 神经网络; 终端滑模控制; 高阶滑模控制

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Adaptive backstepping high-order terminal sliding mode control for uncertain nonlinear systems

WANG Jian-hao, HU Jian-bo

(Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China. Correspondent: WANG Jian-hao, E-mail: hamilton.wang@sina.com)

Abstract: A neural network adaptive backstepping high-order terminal sliding mode control scheme is proposed for a class of uncertain nonlinear systems with mismatched uncertainties. At the first $n-1$ steps, neural networks are employed to approximate the unknown nonlinear functions and the dynamic surface control is combined with backstepping design technique to design the virtual controller, so that the explosion of complexity in traditional backstepping design is avoided and mismatched uncertainties are restrained perfectly. In the n -th step, the high-order sliding mode control law is designed by combining with the non-singular terminal sliding mode to eliminate the chattering and make the system robust to both matched and mismatched uncertainties. By theoretical analysis, all the states in the closed loop systems are guaranteed to be semi-globally uniformly ultimately bounded. Finally, the simulation results show the effectiveness of the proposed method.

Key words: adaptive backstepping; neural networks; terminal sliding mode control; high-order sliding mode control

1 引言

不确定系统的鲁棒控制问题是控制领域研究的热点之一, 其中滑模变结构控制是一种较为有效的方法, 但要求系统的不确定性满足匹配条件^[1]. 对于非匹配不确定系统, 一个较为成功的策略是采用自适应反推控制^[2-3], 这是一种在逐步递推的设计过程中引入中间虚拟控制量, 并基于 Lyapunov 稳定性理论给出整个系统控制器的设计方法.

近年来, 一些学者将滑模变结构控制与自适应反推控制相结合, 产生了一系列研究成果. 文献[4]针对一类最小相位仿射非线性系统, 设计了自适应反推滑

模控制器, 但只允许在模型的最后一个表达式中出现非参数化匹配不确定性. [5]将自适应反推滑模控制方法应用于线性感应电机鲁棒控制器设计, 结合自适应律估计由参数不确定性、摩擦阻力和外界干扰组成的复合干扰上界, 实现了对指令的稳定精确跟踪, 并展现出良好的暂态性能和鲁棒性, 但存在一定的控制抖振现象. [6]将二阶滑模控制方法应用于自适应反推控制最后两步构造的辅助系统中, 减少了算法计算量, 并允许系统最后两个方程存在非参数化不确定性, 但是, 由于辅助系统相对阶为 2, 使得系统的降阶特性不复存在, 降低了系统的鲁棒性和抗干扰性能, 控制抖振现象也并未消除, 且不确定性需要可参数化表

收稿日期: 2010-09-22; 修回日期: 2010-12-12.

基金项目: 空军工程大学科研创新基金项目(XS0901008).

作者简介: 王坚浩(1982-), 男, 博士生, 从事先进控制理论与应用的研究; 胡剑波(1965-), 男, 教授, 博士生导师, 从事先进控制理论与应用、飞行控制等研究.

示. [4-6]均使用了传统的线性滑模,因此系统渐近收敛,即系统所有状态只能趋近平衡点,而不能在有限时间内到达平衡点;其次,均未考虑控制抖振的影响.[7]采用特殊的非奇异终端滑模,结合高阶滑模控制方法提出了一种自适应反推终端滑模控制策略,提高了系统的收敛速度和稳态跟踪精度,有效消除了控制抖振现象,但不确定性仍要求可参数化表示.此外,上述文献需要对虚拟控制进行微分,存在计算复杂性问题,且其复杂性会随着系统相对阶的增加呈爆炸式增长,即存在“微分爆炸”现象[8-9].

本文针对一类非匹配不确定非线性系统,结合动态面控制技术提出了一种神经网络自适应反推高阶终端滑模控制方案.前 $n-1$ 步利用神经网络逼近未知非线性函数,并结合动态面控制和反推设计方法抑制非匹配不确定性对系统的影响;第 n 步,采用特殊的非奇异终端滑模,利用微分估计器获得误差系统状态的导数设计高阶滑模控制律,抑制匹配不确定干扰,并去除控制抖振,使系统的最后一个状态跟踪误差和滑模面在有限时间内收敛到零.采用 Lyapunov 综合方法证明了闭环系统所有状态和跟踪误差半全局一致终结有界.本文所提控制方案避免了传统反推设计方法存在的计算复杂性问题,提高了系统的收敛速度和稳态跟踪精度,使系统对于匹配和非匹配不确定性均具有鲁棒性.

2 问题描述

考虑如下 n 阶不确定非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} + \psi_i(\bar{x}_i), & i = 1, 2, \dots, n-1; \\ \dot{x}_n = f(x) + bu(t) + \Delta f(t); \\ y = x_1. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\bar{x}_i = [x_1, x_2, \dots, x_i]^T \in \mathbf{R}^i$, $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$ 为可测状态向量; $u, y \in \mathbf{R}$ 分别为系统控制输入和输出; $b \neq 0$ 为已知常数; $\psi_i(\bar{x}_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) 为不满足匹配条件的未知非线性函数不确定项; $f(x)$ 为已知光滑非线性函数; $\Delta f(t)$ 为满足匹配条件的未知不确定项.

假设 1 未知匹配不确定项 $\Delta f(t)$ 及其导数 $\Delta \dot{f}(t)$ 均有界.

假设 2 参考轨迹向量 $\bar{y}_d = [y_d, \dot{y}_d, \ddot{y}_d]^T \in \Omega_d \subset \mathbf{R}^3$ 光滑可测, φ_0 为已知正常数, $\Omega_d = [y_d, \dot{y}_d, \ddot{y}_d]^T : y_d^2 + \dot{y}_d^2 + \ddot{y}_d^2 \leq \varphi_0$ 为已知有界紧集.

采用 RBF 神经网络 (RBFNN) 逼近系统未知非线性函数, RBF 神经网络是一个线性参数化的神经网络,可表示为

$$h_{nn}(x) = \theta^T \xi(x).$$

其中: 输入向量 $x \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$, n 为神经网络的输入维

数, $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l]^T \in \mathbf{R}^l$ 为神经网络权值向量, $l > 1$ 为网络节点数, $\xi(x) = [\xi_1(x), \xi_2(x), \dots, \xi_l(x)]^T \in \mathbf{R}^l$ 为基函数向量.

引理 1 $h(x)$ 为紧集 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 内任意连续函数, 则 $\forall \varepsilon^* > 0$ 存在上述 RBF 神经网络使得

$$\sup_{x \in \Omega} |h(x) - \theta^{*T} \xi(x)| \leq \varepsilon^*,$$

其中 $h(x) - \theta^{*T} \xi(x) = \varepsilon(x)$ 为神经网络逼近误差. 最优权值向量 $\theta^* = [\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_l^*]^T$ 定义为

$$\theta^* = \arg \min_{\theta \in \mathbf{R}^l} \left\{ \sup_{x \in \Omega} |h(x) - \theta^T \xi(x)| \right\}.$$

假设 3 最优权值 θ_i^* ($i = 1, 2, \dots, l$) 有界.

控制目标为: 针对不确定非线性系统 (1), 在满足假设 1~假设 3 的条件下, 利用神经网络构造自适应反推高阶终端滑模控制律和自适应律, 消除未知匹配和非匹配不确定性对系统的影响, 使得系统输出 y 能够稳定跟踪给定参考轨迹 y_d . 文中: $\|\cdot\|$ 为 \cdot 的 2-范数, $\hat{\cdot}$ 为 \cdot 的估计值, $\tilde{\cdot} = \hat{\cdot} - \cdot$, $\lambda_{\max}(A)$ 为矩阵 A 的最大特征值.

3 控制器设计及稳定性分析

定义系统 (1) 的状态跟踪误差为

$$\begin{cases} e_1 = x_1 - y_d, \\ e_2 = x_2 - \alpha_1(x_1), \\ \vdots \\ e_n = x_n - \alpha_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\alpha_i(\bar{x}_i)$ 为第 i 阶子系统的期望虚拟控制.

自适应反推高阶终端滑模控制器设计分为两个阶段: 第 1 阶段 Step 1~Step $n-1$ 利用神经网络的逼近能力, 结合动态面控制和反推设计方法, 处理非匹配不确定性; 第 2 阶段 Step n 结合非奇异终端滑模设计高阶滑模控制律, 使系统对于匹配不确定性也具有鲁棒性, 并且消除控制抖振. 在控制器设计推导过程中, 由于神经网络的逼近特性只在某一紧集内成立, 本文得到的稳定性结论是半全局意义下的. 具体设计步骤如下:

Step 1 由闭环系统 (1) 的第 1 阶子系统和状态跟踪误差 $e_1 = x_1 - y_d$ 得到 e_1 的动态系统为

$$\dot{e}_1 = x_2 + \psi_1(x_1) - \dot{y}_d. \quad (3)$$

若非线性函数 $\psi_1(x_1)$ 已知, 则根据式 (3) 可设计虚拟控制律 $\beta_1^* = x_2 = -k_1 e_1 - \psi_1(x_1) + \dot{y}_d$. 因此, 存在 Lyapunov 函数 $V_{e_1} = 0.5e_1^2$, 使得 $\dot{V}_{e_1} = -k_1 e_1^2 \leq 0$, 状态跟踪误差 $e_1 = 0$ 渐近稳定.

采用 RBF 神经网络 $h_1(x_1) = \theta_1^{*T} \xi_1(x_1) + \varepsilon_1$ 逼近未知非线性函数 $\psi_1(x_1)$, 可得到

$$\dot{e}_1 = x_2 + \theta_1^{*T} \xi_1(x_1) + \varepsilon_1 - \dot{y}_d. \quad (4)$$

设计如下虚拟控制律和自适应律:

$$\beta_1 = -k_1 e_1 - \hat{\theta}_1^T \xi_1 + \dot{y}_d, \quad (5)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \Gamma_1 (\xi_1 e_1 - \sigma_1 \hat{\theta}_1). \quad (6)$$

其中: $k_1 > 0, \sigma_1 > 0$ 为设计参数; $\Gamma_1 = \Gamma_1^T > 0$ 为自适应增益矩阵.

针对传统反推设计对虚拟控制反复求导带来的计算复杂性问题, 为了避免下一步对期望虚拟控制求导, 采用动态面控制技术^[8], 引入一阶低通滤波器对虚拟控制律进行滤波, 以降低控制器复杂性, 滤波器动态方程为

$$\tau_1 \dot{\alpha}_1 + \alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_1(0) = \beta_1(0), \quad (7)$$

其中 τ_1 为滤波器时间常数.

定义第1阶子系统的边界层误差为

$$\omega_1 = \alpha_1 - \beta_1, \quad (8)$$

由式(7)和(8)可得 $\dot{\alpha}_1 = -\omega_1/\tau_1$. 对式(8)求导得

$$\dot{\omega}_1 = -\frac{\omega_1}{\tau_1} - \dot{\beta}_1 = -\frac{\omega_1}{\tau_1} + (k_1 \dot{e}_1 + \dot{\hat{\theta}}_1^T \xi_1 - \ddot{y}_d). \quad (9)$$

又由式(9)可得

$$\left| \dot{\omega}_1 + \frac{\omega_1}{\tau_1} \right| \leq \varphi_1(\bar{x}_2, \omega_1, \hat{\theta}_1, y_d, \dot{y}_d, \ddot{y}_d), \quad (10)$$

其中 $\varphi_1(\bar{x}_2, \omega_1, \hat{\theta}_1, \bar{y}_d)$ 为连续函数. 由式(9)和(10), 可得

$$\omega_1 \dot{\omega}_1 \leq -\frac{\omega_1^2}{\tau_1} + |\omega_1| \varphi_1 \leq -\frac{\omega_1^2}{\tau_1} + \omega_1^2 + \frac{1}{4} \varphi_1^2. \quad (11)$$

定义第1阶子系统的Lyapunov函数为

$$V_1 = \frac{1}{2} e_1^2 + \frac{1}{2} \omega_1^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_1^T \Gamma_1^{-1} \tilde{\theta}_1. \quad (12)$$

对 V_1 求导得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= e_1 \dot{e}_1 + \omega_1 \dot{\omega}_1 + \tilde{\theta}_1^T \Gamma_1^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_1 = \\ &= -k_1 e_1 + e_1 e_2 - e_1 \tilde{\theta}_1^T \xi_1 + e_1 \varepsilon_1 + \\ &= e_1 \omega_1 + \omega_1 \dot{\omega}_1 + \tilde{\theta}_1^T \Gamma_1^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_1 \leq \\ &= -k_1 e_1 + e_1 e_2 + e_1 \varepsilon_1 + |e_1| |\omega_1| - \\ &= \frac{\omega_1^2}{\tau_1} + \omega_1^2 + \frac{1}{4} \varphi_1^2 - \tilde{\theta}_1^T \Gamma_1^{-1} (\Gamma_1 \xi_1 e_1 - \dot{\tilde{\theta}}_1). \end{aligned} \quad (13)$$

利用Young's不等式 $|e_1| |\omega_1| \leq e_1^2 + \omega_1^2/4$ 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq -(k_1 - 1) e_1^2 + e_1 e_2 + e_1 \varepsilon_1 - \frac{\omega_1^2}{\tau_1} + \\ &= \frac{5}{4} \omega_1^2 + \frac{1}{4} \varphi_1^2 - \tilde{\theta}_1^T \Gamma_1^{-1} (\Gamma_1 \xi_1 e_1 - \dot{\tilde{\theta}}_1). \end{aligned} \quad (14)$$

令 $k_1 = k_{10} + k_{11}$, $k_{10} - 1 > 0, k_{11} > 0$, 并将自适应律代入式(14)得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq -(k_{10} - 1) e_1^2 + e_1 e_2 - k_{11} e_1^2 + e_1 \varepsilon_1 - \\ &= -\sigma_1 \tilde{\theta}_1^T \hat{\theta}_1 - \frac{\omega_1^2}{\tau_1} + \frac{5}{4} \omega_1^2 + \frac{1}{4} \varphi_1^2. \end{aligned} \quad (15)$$

由引理1, 不妨设 $|\varepsilon_1| \leq \varepsilon_1^*$, ε_1^* 为已知正常数, 配平方可得如下不等式:

$$-\sigma_1 \tilde{\theta}_1^T \hat{\theta}_1 \leq \frac{\sigma_1}{2} \|\theta_1^*\|^2 - \frac{\sigma_1}{2} \|\tilde{\theta}_1\|^2, \quad (16)$$

$$-k_{11} e_1^2 + e_1 \varepsilon_1 \leq -k_{11} e_1^2 + e_1 |\varepsilon_1| \leq \frac{\varepsilon_1^{*2}}{4k_{11}} \leq \frac{\varepsilon_1^{*2}}{4k_{11}}. \quad (17)$$

选取 $k_1^* = k_{10} - 1$, 将不等式(16)和(17)代入(15), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq -k_1^* e_1^2 + e_1 e_2 - \frac{\omega_1^2}{\tau_1} + \frac{5}{4} \omega_1^2 + \frac{1}{4} \varphi_1^2 + \\ &= \frac{\sigma_1}{2} \|\theta_1^*\|^2 - \frac{\sigma_1}{2} \|\tilde{\theta}_1\|^2 + \frac{\varepsilon_1^{*2}}{4k_{11}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Step i ($2 \leq i \leq n-1$) 由闭环系统(1)的第 i 阶子系统和状态跟踪误差 $e_i = x_i - \alpha_i$ 得到 e_i 的动态系统为

$$\dot{e}_i = x_{i+1} + \psi_i(\bar{x}_i) - \dot{\alpha}_{i-1}. \quad (19)$$

采用RBF神经网络 $h_i(\bar{x}_i) = \theta_i^{*T} \xi_i(\bar{x}_i) + \varepsilon_i$ 逼近未知非线性函数 $\psi_i(\bar{x}_i)$, 可得到

$$\dot{e}_i = x_{i+1} + \theta_i^{*T} \xi_i(\bar{x}_i) + \varepsilon_i - \dot{\alpha}_{i-1}. \quad (20)$$

设计如下虚拟控制律和自适应律:

$$\beta_i = -e_{i-1} - k_i e_i - \hat{\theta}_i^T \xi_i + \dot{\alpha}_{i-1}, \quad (21)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \Gamma_i (\xi_i e_i - \sigma_i \hat{\theta}_i). \quad (22)$$

其中: $k_i = k_{i0} + k_{i1}$, $k_{i0} - 1 > 0, k_{i1} > 0, \sigma_i > 0$ 为设计参数; $\Gamma_i = \Gamma_i^T > 0$ 为自适应增益矩阵.

注1 第 i 阶子系统的虚拟控制律 β_i 中包含了第 $i-1$ 阶子系统的期望虚拟控制函数导数 $\dot{\alpha}_{i-1}$, 采用动态面控制后, 由滤波器动态方程可得 $\dot{\alpha}_{i-1} = -\omega_{i-1}/\tau_{i-1}$, 因此避免了对期望虚拟控制求导带来的计算复杂性问题.

对 β_i 进行滤波, 滤波器动态方程为 $\tau_i \dot{\alpha}_i + \alpha_i = \beta_i$, $\alpha_i(0) = \beta_i(0)$, 得到期望虚拟控制 α_i , 定义第 i 阶子系统边界层误差为

$$\omega_i = \alpha_i - \beta_i, \quad (23)$$

则可得 $\dot{\alpha}_i = -\omega_i/\tau_i$. 对式(23)求导得

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_i &= -\frac{\omega_i}{\tau_i} - \dot{\beta}_i = \\ &= -\frac{\omega_i}{\tau_i} + \left(\dot{e}_{i-1} + k_i \dot{e}_i + \dot{\hat{\theta}}_i^T \xi_i + \frac{\dot{\omega}_{i-1}}{\tau_{i-1}} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

又由式(24)可得

$$\left| \dot{\omega}_i + \frac{\omega_i}{\tau_i} \right| \leq \varphi_i(\bar{x}_{i+1}, \bar{\omega}_i, \bar{\theta}_i, y_d, \dot{y}_d, \ddot{y}_d), \quad (25)$$

其中 $\varphi_i(\bar{x}_{i+1}, \bar{\omega}_i, \bar{\theta}_i, \bar{y}_d)$ 为连续函数. 由式(24)和(25)可得

$$\omega_i \dot{\omega}_i \leq -\frac{\omega_i^2}{\tau_i} + |\omega_i| \varphi_i \leq -\frac{\omega_i^2}{\tau_i} + \omega_i^2 + \frac{1}{4} \varphi_i^2. \quad (26)$$

定义第 i 阶子系统的Lyapunov函数为

$$\begin{aligned} V_i &= V_{i-1} + \frac{1}{2} e_i^2 + \frac{1}{2} \omega_i^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\theta}_i = \\ &= \sum_{j=1}^i \left(\frac{1}{2} e_j^2 + \frac{1}{2} \omega_j^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_j^T \Gamma_j^{-1} \tilde{\theta}_j \right). \end{aligned} \quad (27)$$

对 V_i 求导, 并将虚拟控制律(21)和自适应律(22)代

入,类似 Step 1 中计算步骤及方法,可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i \leq & - \sum_{j=1}^i k_j^* e_j^2 + e_i e_{i+1} + \sum_{j=1}^i \left(\frac{5}{4} \omega_j^2 - \frac{\omega_j^2}{\tau_j} + \frac{1}{4} \varphi_j^2 \right) + \\ & \sum_{j=1}^i \left(\frac{\sigma_j}{2} \|\theta_j^*\|^2 - \frac{\sigma_j}{2} \|\tilde{\theta}_j\|^2 + \frac{\varepsilon_j^{*2}}{4k_{j1}} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

其中: $k_j^* = k_{j0} - 1 > 0$, $k_{j1} > 0$, $\varepsilon_j^* \geq |\varepsilon_j|$ 为已知正常数. 当 $i = n - 1$ 时, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{n-1} \leq & - \sum_{i=1}^{n-1} k_i^* e_i^2 + e_{n-1} e_n + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{5}{4} \omega_i^2 - \frac{\omega_i^2}{\tau_i} + \right. \\ & \left. \frac{1}{4} \varphi_i^2 \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\sigma_i}{2} \|\theta_i^*\|^2 - \frac{\sigma_i}{2} \|\tilde{\theta}_i\|^2 + \frac{\varepsilon_i^{*2}}{4k_{i1}} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

经过上述 $n - 1$ 步设计过程后, 得到 $n - 1$ 个期望虚拟控制 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, n - 1)$. 又由式 (29) 可知, 若设计控制律使得 e_n 收敛到零, 则可得

$$\dot{V}_{n-1} \leq -\mu V_{n-1} + \eta, \quad (30)$$

其中 μ 和 η 为正常数, 定义为

$$\begin{aligned} \mu &= \min_{1 \leq i \leq n-1} \left\{ 2k_i^*, \frac{\sigma_i}{\lambda_{\max}(\Gamma_i^{-1})} \right\}, \\ \eta &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{5}{4} \omega_i^2 - \frac{\omega_i^2}{\tau_i} + \frac{1}{4} \varphi_i^2 + \frac{\sigma_i}{2} \|\theta_i^*\|^2 + \frac{\varepsilon_i^{*2}}{4k_{i1}} \right). \end{aligned}$$

以上分析表明, 若状态跟踪误差 e_n 收敛到零, 则可以保证 e_1, e_2, \dots, e_{n-1} 构成的子系统稳定.

Step n 为了使状态跟踪误差 e_n 在有限时间内收敛到零, 从而提高误差系统的收敛速度和稳态跟踪精度, 采用如下非奇异终端滑模面^[10]:

$$s = e_n + \gamma \dot{e}_n^{p/q}. \quad (31)$$

其中: $\gamma > 0$; p 和 q 为正奇数, 且 $1 < p/q < 2$.

假设在 t_r 时刻, s 收敛到零, 即 $s(t) = 0, t \geq t_r$. 则由式 (31) 可知, e_n 和 \dot{e}_n 将在有限时间内收敛到零, 收敛时刻为

$$t_s = t_r + \gamma \frac{q}{p} \frac{p}{(p-q)} |e_n(t_r)|^{\frac{p-q}{p}}. \quad (32)$$

当 $t \geq t_r$ 时, 系统将保持在二阶滑动模态 ($e_n = \dot{e}_n = 0$). 根据式 (32) 可知, 通过选择参数 p, q, γ 可调节 e_n 的收敛速度.

在此基础上, 本文提出如下定理, 将终端滑模结合高阶滑模控制方法, 设计了最终的控制律.

定理 1 在假设 1~假设 3 的条件下, 考虑一类非匹配不确定非线性系统 (1), 选取非奇异终端滑模面 (31), 并设计如下控制律:

$$u = u_1 + u_2, \quad (33)$$

$$u_1 = -b^{-1}[f(x) - \dot{\alpha}_{n-1}], \quad (34)$$

$$u_2 = -b^{-1} \int_0^t \left[\frac{q}{\gamma p} \dot{e}_n^{2-p/q} + (\rho_1 + \rho_2) \text{sgns} + \rho_3 s \right] d\tau, \quad (35)$$

其中 $\rho_1 > |\Delta \dot{f}|$, $\rho_2 > 0$, $\rho_3 > 0$ 为设计参数. 则闭环系统 (1) 的状态跟踪误差 e_n 将在有限时间内收敛到零, 且状态跟踪误差 e_1, e_2, \dots, e_{n-1} 和状态 $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ 均有界.

证明 对于第 n 阶误差子系统, 定义 Lyapunov 函数为

$$V_s = \frac{1}{2} s^2, \quad (36)$$

则整个系统的 Lyapunov 函数为

$$\begin{aligned} V &= V_{n-1} + V_s = \\ & \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2} e_i^2 + \frac{1}{2} \omega_i^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\theta}_i \right) + \frac{1}{2} s^2. \end{aligned} \quad (37)$$

对 V_s 按时间 t 求导得

$$\dot{V}_s = s \dot{s} = s \gamma \frac{p}{q} \dot{e}_n^{p/q-1} \left(\dot{e}_n + \frac{q}{\gamma p} \dot{e}_n^{2-p/q} \right). \quad (38)$$

由闭环系统 (1) 的第 n 阶子系统和状态跟踪误差 $e_n = x_n - \alpha_{n-1}$, 对 e_n 按时间 t 求导得

$$\dot{e}_n = f(x) + bu(t) + \Delta f(t) - \dot{\alpha}_{n-1}. \quad (39)$$

将控制律 (33) 和 (34) 代入 (39) 得到

$$\dot{e}_n = \Delta f(t) + bu_2(t). \quad (40)$$

对 e_n 按时间 t 再次求导, 可得

$$\ddot{e}_n = \Delta \dot{f}(t) + b \dot{u}_2(t). \quad (41)$$

将控制律 (35) 代入 (41) 得到

$$\ddot{e}_n = \Delta \dot{f}(t) - (\rho_1 + \rho_2) \text{sgns} - \rho_3 s - \frac{q}{\gamma p} \dot{e}_n^{2-p/q}. \quad (42)$$

将式 (42) 代入 (38) 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_s &= s \gamma \frac{p}{q} \dot{e}_n^{p/q-1} [\Delta \dot{f}(t) - (\rho_1 + \rho_2) \text{sgns} - \rho_3 s] \leq \\ & - \gamma \frac{p}{q} \dot{e}_n^{p/q-1} (\rho_2 |s| + \rho_3 s^2). \end{aligned} \quad (43)$$

可见, 当 $s \neq 0$ 时, 由于 $1 < p/q < 2$, 满足 $\dot{e}_n^{p/q-1} \geq 0$, 有 $\dot{V}_s \leq 0$, 当且仅当 $\dot{e}_n = 0$ 时, $\dot{V}_s = 0$. 可以证明 $\dot{e}_n = 0$ 且 $e_n \neq 0$ 并不是一个稳定的状态, 系统不会一直保持在该状态, 即 $\dot{V}_s = 0$ 不可能一直保持^[10]. 因此, 系统将在有限时间内到达非奇异终端滑模面 $s = 0$, 且状态跟踪误差 e_n 也在有限时间内收敛.

当 e_n 收敛到零时, 式 (30) 成立, 对式 (30) 两边同乘以 $e^{\mu t}$ 可得

$$\frac{d}{dt} (V_{n-1}(t) e^{\mu t}) \leq e^{\mu t} \eta. \quad (44)$$

定义 $\phi := \eta/\mu$, 式 (44) 两边同时对 t 积分得

$$V_{n-1}(t) \leq \phi + [V_{n-1}(0) - \phi] e^{-\mu t} \leq \phi + V_{n-1}(0). \quad (45)$$

由式 (45) 可知, 前 $n - 1$ 阶子系统的状态 $e_i, \tilde{\theta}_i$ 半全局一致终结有界, 从而 $\hat{\theta}_i$ 有界. 系统跟踪误差 $e = y$

$-y_d = x_1 - y_d = e_1$ 和 y_d 有界, 则状态 x_1 有界. 又根据式(5)可知虚拟控制律 β_1 有界, 则 $\alpha_1, \dot{\alpha}_1$ 有界. 根据式 $e_2 = x_2 - \alpha_1$ 有界, 可知状态 x_2 有界, 以此类推, 闭环系统所有状态 $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ 均有界. \square

注2 控制律 u_1 中包含了第 $n-1$ 阶子系统的期望虚拟控制函数导数 $\dot{\alpha}_{n-1}$, 采用动态面控制后, 控制律 u_1 中的 $\dot{\alpha}_{n-1}$ 项可以用 $-\omega_{n-1}/\tau_{n-1}$ 代替.

注3 式(31)和(35)中用到 e_n 的一阶导数 \dot{e}_n , 而 \dot{e}_n 无法直接测量, 因此, 采用如下微分估计器^[11]获取 e_n 的微分估计值 \hat{e}_n :

$$\begin{aligned} \dot{\varpi}_0(t) &= \varpi_1(t) - \lambda_0 |\varpi_0(t) - e_n(t)|^{1/2} \times \\ &\quad \text{sgn}(\varpi_0(t) - e_n(t)), \\ \dot{\varpi}_1(t) &= -\lambda_1 \text{sgn}(\varpi_0(t) - e_n(t)), \\ \hat{e}_n(t) &= \varpi_1(t), \end{aligned}$$

其中 λ_0, λ_1 为设计参数.

注4 滤波器时间常数选取原则: 若时间常数过小, 则容易使系统不稳定, 若时间常数过大, 则容易造成幅值和相位失真, 一般情况下, 可以取时间常数在 0.01~0.05 之间, 效果较好.

4 仿真算例

考虑如下不确定非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \psi_1(x_1), \\ \dot{x}_2 = x_3 + \psi_2(x_1, x_2), \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 x_3 + u + \Delta f(t), \\ y = x_1. \end{cases} \quad (46)$$

其中: 非线性函数 $\psi_1(x_1) = x_1 \sin(x_1)$, $\psi_2(x_1, x_2) = x_2 e^{-0.5x_1}$ 未知, $\Delta f(t) = 10 \sin(2t)$ 为未知有界匹配不确定项. 选择如前所述的 RBF 神经网络, 选取径向基函数为如下的高斯函数:

$$\xi_i(x) = e^{-(x-\mu_i)^T(x-\mu_i)/\eta_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots, l.$$

径向基函数中心和宽度的选择极大地影响自适应神经网络控制器性能, 均匀分布在 R^n 维空间的规则网格的高斯径向基函数能够充分逼近紧集上的光滑函数^[12]. 因此, 仿真中选择神经网络如下: $\hat{\theta}_1^T \xi_1(x_1)$ 包含 $l_1 = 7$ 个节点, 中心 $\mu_i (i = 1, 2, \dots, l_1)$ 均匀分布在 $[-4, 4]$, 宽度 $\eta_i = 2, i = 1, 2, \dots, l_1$; $\hat{\theta}_2^T \xi_2(\bar{x}_2)$ 包含 $l_2 = 49$ 个节点, 中心 $\mu_i (i = 1, 2, \dots, l_2)$ 均匀分布在 $[-4, 4] \times [-4, 4]$, 宽度 $\eta_i = 2, i = 1, 2, \dots, l_2$.

系统参考轨迹 $y_d = 0.5[\sin(t) + \sin(0.5t)]$, 初始状态 $x_0 = [0.5, 0.5, 0.5]^T$, 神经网络权值初值 $\hat{\theta}_1(0) = \hat{\theta}_2(0) = 0$, 滤波器时间常数 $\tau_1 = \tau_2 = 0.04$, 微分估计器设计参数为 $\lambda_0 = 46.23$ 和 $\lambda_1 = 1045$, 初值 $\varpi_0(0) = \varpi_1(0) = 0$. 自适应反推高阶终端滑模控制

方案设计参数为 $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \text{diag}[0.5]$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.1$, $k_1 = k_2 = 2$, $\rho_1 = 20$, $\rho_2 = 50$, $\rho_3 = 10$. 终端滑模面设计参数为 $p = 5, q = 3, \gamma = 0.01$. 仿真结果如图1~图3所示. 由图1~图3可以看出, 本文提出的自适应反推高阶终端滑模控制方案可以保证系统输出 y 稳定跟踪给定参考轨迹 y_d .

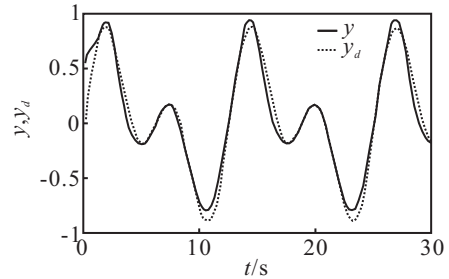


图1 系统输出 y 与参考轨迹 y_d

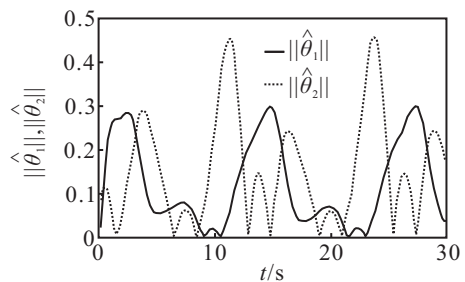


图2 神经网络权值范数 $\|\hat{\theta}_1\|$ 和 $\|\hat{\theta}_2\|$

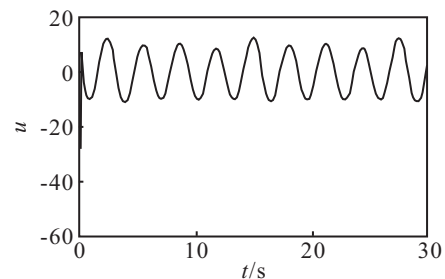


图3 自适应反推高阶终端滑模控制输入 u

将自适应反推线性滑模控制方案与本文控制方案进行仿真对比. 自适应反推线性滑模控制方案的滑模面为 $s = 2e_1 + 5.5e_2 + e_3$, 其余相应的设计参数和自适应反推高阶终端滑模控制方案设计参数保持一致. 图3和图4分别为两种控制方案的控制输入曲线. 图5为两种控制方案的状态跟踪误差 e_3 仿真曲线. 由于本文控制方案采用二阶非奇异终端滑模控制方法, 因此, 控制输入平滑无抖振, 且状态跟踪误差 e_3 能够在较短时间内收敛到零. 而自适应反推线性滑模控制方案的控制输入存在高频抖振, 且状态跟踪误差 e_3 只能渐近收敛到原点附近的一个领域内.

定义稳态跟踪误差变化量 $\Delta e = e_{\max} - e_{\min}$, 控制变化量 $\Delta u = u_{\max} - u_{\min}$, 控制能耗 $E = \int_0^{30} |u| dt$, 两种方案的控制性能比较如表1所示.

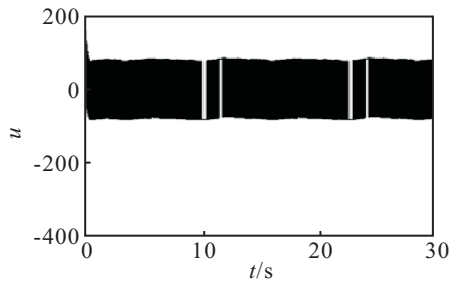
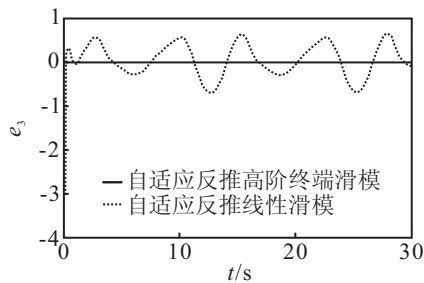
图4 自适应反推线性滑模控制输入 u 图5 状态跟踪误差 e_3

表1 两种方案的控制性能比较

控制器类型	Δe	Δu	E
自适应反推高阶终端滑模控制	0.334	65.613	198.383
自适应反推线性滑模控制	0.388	484.790	2410.923

从表1中可以看出,本文所提控制方案与自适应反推线性滑模控制方案相比,稳态跟踪精度高,控制输入信号变化平稳,且大大降低了控制能耗。

综合以上仿真分析结果表明,本文控制方案对给定参考轨迹具有良好的跟踪性能,从收敛速度、稳态跟踪精度、控制变化量、控制能耗角度综合考虑,本文设计的控制系统具有更优的控制性能。

5 结论

本文针对一类非匹配不确定非线性系统,提出了一种神经网络自适应反推高阶终端滑模控制方案.反推设计过程中利用神经网络逼近未知非线性函数,抑制非匹配不确定性对系统的影响,并将一阶滤波器融入反推设计,结合动态面控制无需对虚拟控制反复求导,避免了传统反推设计方法存在的计算复杂性问题.最后一步结合非奇异终端滑模设计高阶滑模控制律,去除控制抖振,使系统对匹配不确定性也具有鲁棒性.仿真结果表明,同自适应反推线性滑模方法相比,本文所提出的方法提高了系统收敛速度和稳态跟踪精度,控制输入信号更加平滑,便于实际应用。

参考文献(References)

[1] 高为炳. 变结构控制的理论及设计方法[M]. 北京: 科学出版社, 1996: 134-141.

- (Gao W B. Variable structure control theory and design approach[M]. Beijing: Science Press, 1996: 134-141.)
- [2] Kanellakopoulos I, Kokotovic P V, Morse A S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1991, 36(11): 1241-1253.
- [3] Kristic M, Kanellakopoulos I, Kokotovic P V. Nonlinear and adaptive control design[M]. New York: John Wiley and Sons, 1995: 87-121.
- [4] 李俊, 徐德民. 非匹配不确定非线性系统的自适应反演滑模控制[J]. 控制与决策, 1999, 14(1): 46-50.
(Li J, Xu D M. Adaptive sliding mode controller for nonlinear systems with mismatched uncertainties based on adaptive backstepping scheme[J]. Control and Decision, 1999, 14(1): 46-50.)
- [5] Lin F J, Shen P H, Hsu S P. Adaptive backstepping sliding mode control for linear induction motor drive[J]. IEE Proceeding of Electrical Power Application, 2002, 149(3): 184-194.
- [6] Bartolini G, Ferrara A, Giacomini L, et al. Properties of a combined adaptive/second sliding mode control algorithm for some classes of uncertain nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(7): 1334-1341.
- [7] 郑剑飞, 冯勇, 郑雪梅, 等. 不确定非线性系统的自适应反演终端滑模控制[J]. 控制理论与应用, 2009, 26(4): 410-414.
(Zheng J F, Feng Y, Zheng X M, et al. Adaptive backstepping-based terminal-sliding-mode control for uncertain nonlinear systems[J]. Control Theory & Applications, 2009, 26(4): 410-414.)
- [8] Swaroop S, Hedrick J K, Yip P P, et al. Dynamic surface control for a class of nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(10): 1893-1899.
- [9] 董文瀚, 孙秀霞, 林岩. 反推自适应控制的发展及应用[J]. 控制与决策, 2006, 21(10): 1081-1086.
(Dong W H, Sun X X, Lin Y. Adaptive backstepping control: development and applications[J]. Control and Decision, 2006, 21(10): 1081-1086.)
- [10] Feng Y, Yu X, Man Z. Non-singular adaptive terminal sliding mode control of rigid manipulators[J]. Automatica, 2002, 38(12): 2159-2167.
- [11] Levant A. High-order sliding mode, differentiation and output-feedback control[J]. Int J of Control, 2003, 76(9): 924-941.
- [12] Sanner R M, Slotine J E. Gaussian networks for direct adaptive adaptive control[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 1992, 3(6): 837-863.