文章编号: 1001-0920 (2012) 04-0487-07

广义大系统非脆弱分散 H_∞ 控制器设计

沃松林[1], 刘 锋[1], 邹 云[2]

(1. 江苏技术师范学院 电气信息工程学院，江苏 常州，213001；2. 南京理工大学 自动化学院，南京 210094)

摘 要: 针对控制器增益具有模有界扰动的情况, 研究广义大系统非脆弱分散 H_∞ 控制问题. 基于广义系统的有界实引理和线性矩阵不等式 (LMI) 方法, 分别给出了广义大系统非脆弱分散 H_∞ 控制器和非脆弱分散 H_∞ 保性能控制器存在的充分条件和设计方法. 最后通过仿真算例表明了所提出方法的有效性.

关键词: 分散 H_∞ 控制；非脆弱控制；保性能控制；线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Non-fragile decentralized H_∞ controller design for singular large-scale systems

WO Song-lin[1], *LIU Feng*[1], *ZOU Yun*[2]

(1. School of Electrical and Information Engineering，Jiangsu Teachers University of Technology，Changzhou 213001, China；2. School of Automation，Nanjing University Science and Technology，Nanjing 210094，China．Correspondent: WO Song-lin，E-mail：wosonglin2000@yahoo.com.cn)

Abstract：The non-fragile decentralized H_∞ control problem for singular large-scale systems is considered, the controller's perturbations are value bounded. Based on the bounded real lemma of singular systems and by using the linear matrix inequality(LMI) approach, the sufficient existence conditions and design approaches are presented for the corresponding non-fragile decentralized H_∞ controllers, the non-fragile decentralized H_∞ and guaranteed cost controllers, respectively. Finally, a numerical example is given to show the effectiveness of the proposed approach.

Key words：decentralized H_∞ control；non-fragile control；guaranteed cost control；linear matrix inequality

1 引 言

广义大系统可以更好地描述许多实际生产过程, 如大型电力系统、计算机通信网络、经济系统和社会系统等, 从而引起了人们的广泛关注[1]. 近几年来, 对广义大系统分散控制的研究取得了许多有意义的成果[2-13]: 文献 [2-7] 用 LMI 方法或广义 Ricatti方程方法研究了广义大系统分散状态反馈控制问题; [8] 应用 Ricatti 不等式方法研究了具有对称结构的不确定广义大系统分散鲁棒 H_∞ 控制和二次稳定问题; [9-11] 分别给出了用非线性矩阵不等式表示的不确定广义大系统动态输出反馈分散鲁棒 H_∞ 控制器存在的充分条件; [12] 用 LMI 方法研究了不确定广义大系统分散鲁棒 H_∞ 保性能控制问题和控制器设计方法.

由于控制器的实现会受到诸如 D/A 和 A/ D 转换精度、计算机有限字长以及元器件老化等因素的影响, 实际过程中的控制器参数常常存在一定的微小扰动. 文献 [13] 指出, 控制器参数中相对小的扰动会引起系统性能的变化, 甚至破坏闭环系统的稳定性. 因此, 非脆弱控制问题引起了许多学者的关注[14-20]. 鉴于广义大系统分散控制的复杂性, 分散控制器的微小扰动都会对整个系统的性能和稳定性产生更大影响. 目前, 关于广义大系统非脆弱控制的研究才刚刚开始, 文献 [21-22] 应用 LMI 方法给出了广义大系统非脆弱分散控制器和非脆弱分散保性能控制器存在的条件和控制器设计方法, 但对于广义大系统非脆弱分散 H_∞ 控制问题尚未得到充分研究. 为此, 本文研究了广义大系统非脆弱分散 H_∞ 控制问题. 根据广义系统的有界实引理和 LMI 方法, 首先给出广义大系统非脆弱分散 H_∞ 控制器的存在条件和设计方法; 然后研究广义大系统非脆弱分散 H_∞ 保性能控制器问

收稿日期: 2010-11-03；**修回日期:** 2011-01-05.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60874007)；江苏省青蓝工程项目.

作者简介: 沃松林(1964−), 男, 教授, 博士, 从事广义大系统理论与分散控制的研究；邹云(1962−), 男, 教授, 博士生导师, 从事系统理论、应急控制等研究.

题, 将非脆弱分散 H_∞ 保性能控制器设计归结为一组 LMIs 的可解性问题, 并给出了控制器的参数表达式; 最后通过仿真示例验证了所给出方法的有效性.

2 问题描述及引理

首先给出如下记号: 文中若无特别申明, 所有矩阵都具有适当的维数; H^{T} 表示矩阵 H 的转置矩阵; I 表示适当维数的单位矩阵; $A=\mathrm{blockdiag}(A_1,A_2,\cdots,A_N)$ 表示块对角矩阵; $\mathrm{rank}\,A$ 表示矩阵 A 的秩; $\varPhi_i\in R^{n_i\times(n_i-r_i)}$ 为满足条件 $E_i\varPhi_i=0$ 和 $\mathrm{rank}\,\varPhi_i=n_i-r_i$ 的矩阵, 其中 $E_i\in R^{n_i\times n_i}$, $\mathrm{rank}\,E_i=r_i<n_i$; $\|y(t)\|_2=\left(\int_0^{+\infty}y^{\mathrm{T}}(t)y(t)\mathrm{d}t\right)^{1/2}$; 对称矩阵中的“$*$”表示相应的对称块; $(M)_{ij}$ 为一个 $n\times n$ 阶矩阵, 将其分成 $N\times N$ 块, 分法与 $A=(A_{ij})$ 分块对应, 每一块为一个 $n_i\times n_j$ 阶矩阵, 只在第 i 行第 j 列上的块为 $M\in R^{n_i\times n_j}$, 其余各块均为对应的零矩阵且 $\sum\limits_1^N n_i=n$, 即

$$(M)_{ij}=\begin{bmatrix}0&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\ 0&\cdots&0&M&0&\cdots&0\\ 0&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}_{n\times n}.$$

考虑由 N 个子系统组成的广义大系统

$$\begin{cases}E_i\dot{x}_i(t)=A_{ii}x_i(t)+B_{1i}\omega_i(t)+B_{2i}u_i(t)+\\ \qquad\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{N}A_{ij}x_j(t),\\ z_i(t)=C_ix_i(t)+D_iu_i(t).\end{cases}\tag{1}$$

其中: $i=1,2,\cdots,N$; $x_i(t),\omega_i(t),u_i(t)$ 和 $z_i(t)$ 分别为第 i 个子系统的状态、扰动输入、控制输入和被控输出向量; 矩阵 $A_{ii},A_{ij},B_{1i},B_{2i},C_i$ 和 D_i 均为维数兼容的常数矩阵; A_{ij} 为第 j 个子系统与第 i 个子系统的关联矩阵; 扰动输入 $\omega_i(t)$ 为范数有界的确定性干扰, 满足 $\|\omega_i(t)\|_2<\rho$.

广义大系统 (1) 的性能指标取为

$$J=\sum_{i=1}^{N}\int_0^{+\infty}[x_i^{\mathrm{T}}(t)Q_ix_i(t)+u_i^{\mathrm{T}}(t)R_iu_i(t)]\mathrm{d}t,\tag{2}$$

其中 $Q_i>0,R_i>0$ 为给定的已知实对称正定矩阵. 令

$$\begin{aligned}&A=(A_{ij}),\\ &E=\mathrm{blockdiag}(E_1,E_2,\cdots,E_N),\\ &B_1=\mathrm{blockdiag}(B_{11},B_{12},\cdots,B_{1N}),\\ &B_2=\mathrm{blockdiag}(B_{21},B_{22},\cdots,B_{2N}),\\ &C=\mathrm{blockdiag}(C_1,C_2,\cdots,C_N),\\ &D=\mathrm{blockdiag}(D_1,D_2,\cdots,D_N),\\ &x(t)=\mathrm{col}(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_N(t)),\\ &\omega(t)=\mathrm{col}(\omega_1(t),\omega_2(t),\cdots,\omega_N(t)),\\ &u(t)=\mathrm{col}(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_N(t)),\\ &z(t)=\mathrm{col}(z_1(t),z_2(t),\cdots,z_N(t)).\end{aligned}$$

则广义大系统 (1) 可描述为

$$\begin{cases}E\dot{x}(t)=Ax(t)+B_1\omega(t)+B_2u(t),\\ z(t)=Cx(t)+Du(t).\end{cases}\tag{3}$$

本文考虑广义大系统 (1) 的分散控制器

$$u_i(t)=[K_i+\Delta K_i]x(t),\ i=1,2,\cdots,N.\tag{4}$$

其里: K_i 表示待设计的控制器增益; ΔK_i 表示控制器增益模有界的未知扰动, 具有如下两种类型[18-20]:

1) 加法型扰动

$$\Delta K_i=M_{1i}F_{1i}G_{1i},\ F_{1i}^{\mathrm{T}}F_{1i}\leqslant I;\tag{5}$$

2) 乘法型扰动

$$\Delta K_i=M_{2i}F_{2i}G_{2i}K_i,\ F_{2i}^{\mathrm{T}}F_{2i}\leqslant I.\tag{6}$$

这里: $M_{1i},M_{2i},G_{1i},G_{2i}$ 为已知常数矩阵; F_{1i} 和 F_{2i} 为未知扰动矩阵.

系统 (3) 在分散控制器 (4) 作用下的闭环大系统可描述为

$$\begin{cases}E\dot{x}(t)=[A+B_2(K+\Delta K)]x(t)+B_1\omega(t),\\ z(t)=[C+D(K+\Delta K)]x(t).\end{cases}\tag{7}$$

其中

$$\begin{aligned}&K=\mathrm{blockdiag}(K_1,K_2,\cdots,K_N),\\ &\Delta K=\mathrm{blockdiag}(\Delta K_1,\Delta K_2,\cdots,\Delta K_N).\end{aligned}$$

本文研究的广义大系统非脆弱分散 H_∞ 控制问题包含如下两个部分:

1) 广义大系统非脆弱分散 H_∞ 控制器设计问题. 对于广义大系统 (1) 和给定的正数 $\gamma>0$, 设计形如式 (4) 的状态反馈控制器, 使得对于满足式 (5) 或 (6) 的所有控制器增益扰动, 有:

① 当 $\omega(t)=0$ 时, 闭环大系统 (7) 都正则、无脉冲且稳定;

② 闭环大系统 (7) 在零初始条件, 即 $x(0)=0$ 时, 扰动输入 $\omega(t)$ 到被控输出 $z(t)$ 的传递函数 $T_{z\omega}(s)$ 满足 $\|T_{z\omega}(s)\|_\infty<\gamma$, 即 $\|z(t)\|_2<\gamma\|\omega(t)\|_2$.

此时称广义大系统 (1) 是可非脆弱分散 H_∞ 控制的, 而控制器 (4) 称为广义大系统 (1) 的一个非脆弱分散 H_∞ 控制器.

2) 广义大系统非脆弱分散 H_∞ 保性能控制器设计问题. 对于广义大系统 (1), 给定的正数 J^* 和 $\gamma>0$, 设计形如式 (4) 的状态反馈控制器, 使得对于满足式 (5) 或 (6) 的所有控制器增益扰动, 有:

① 控制器 (4) 是广义大系统 (1) 的一个非脆弱分散 H_∞控制器;

② 性能指标 J 满足 $J\leqslant J^*$.

此时亦称广义大系统 (1) 是可非脆弱分散 H_∞保性能的, J^*为系统 (1) 的一个可保性能, 而控制器 (4) 称为广义大系统 (1) 的一个非脆弱分散 H_∞保性能控制器.

引理 1 [3] 对于任意正数 $\varepsilon>0$ 和适当维数的矩阵 H, F, 有

$$H^{\mathrm T}F+F^{\mathrm T}H\leqslant\varepsilon H^{\mathrm T}H+\frac{1}{\varepsilon}F^{\mathrm T}F.$$

引理 2 [3] 设 $A,B\in R^{n\times n}$, $A\geqslant B$, 则有 $C^{\mathrm T}AC\geqslant C^{\mathrm T}BC$, $\forall C\in R^{k\times n}$成立.

引理 3 [12-23] 对于广义系统

$$\begin{cases}E\dot x(t)=Ax(t)+B\omega(t),\\ z(t)=Cx(t)\end{cases}\tag{8}$$

和给定的正数 $\gamma>0$, 以下叙述等价:

1) 当 $\omega(t)=0$ 时, 系统 (8) 是正则、无脉冲、稳定的, 且 $\|T_{z\omega}\|_\infty=\|C(zE-A)^{-1}B\|_\infty<\gamma$.

2) 存在可逆矩阵 X 满足如下矩阵不等式:

$$E^{\mathrm T}X=X^{\mathrm T}E\geqslant 0,\tag{9a}$$

$$A^{\mathrm T}X+X^{\mathrm T}A+C^{\mathrm T}C+\frac{1}{\gamma^2}X^{\mathrm T}BB^{\mathrm T}X<0.\tag{9b}$$

3) 存在可逆矩阵 P 满足如下矩阵不等式:

$$PE^{\mathrm T}=EP^{\mathrm T}\geqslant 0,\tag{10a}$$

$$PA^{\mathrm T}+AP^{\mathrm T}+B^{\mathrm T}B+\frac{1}{\gamma^2}PC^{\mathrm T}CP^{\mathrm T}<0.\tag{10b}$$

4) 存在矩阵 $X>0, Y$, 满足

$$A(EX+Y\varPhi^{\mathrm T})^{\mathrm T}+(EX+Y\varPhi^{\mathrm T})A^{\mathrm T}+BB^{\mathrm T}+\frac{1}{\gamma^2}(EX+Y\varPhi^{\mathrm T})C^{\mathrm T}C(EX+Y\varPhi^{\mathrm T})^{\mathrm T}<0.\tag{11}$$

5) 存在矩阵 $X>0, Y$, 满足

$$(EX+Y\varPhi^{\mathrm T})^{-1}A+A^{\mathrm T}(EX+Y\varPhi^{\mathrm T})^{-\mathrm T}+\frac{1}{\gamma^2}C^{\mathrm T}C+(EX+Y\varPhi^{\mathrm T})^{-1}BB^{\mathrm T}(EX+Y\varPhi^{\mathrm T})^{-\mathrm T}<0.\tag{12}$$

其中 $\varPhi\in R^{n\times(n-r)}$为满足条件 $E\varPhi=0$ 和 $\mathrm{rank}\varPhi=n-r$ 的矩阵, $E\in R^{n\times n}$, $\mathrm{rank}\,E=r$.

3 非脆弱分散 H_∞控制器设计

定理 1 对于广义大系统 (1), 给定正数 $\gamma>0$ 和控制器增益加法型扰动 (5), 如果存在对称正定矩阵 $X_i>0$, 矩阵 Y_i, Z_i和正数 $\varepsilon,\beta>0$, 使得如下线性矩阵不等式组 (LMIs) 成立:

$$\begin{bmatrix}\varSigma_{i11} & * & * & *\\ \varSigma_{i12} & \varSigma_{i22} & * & *\\ V_i^{\mathrm T} & 0 & -W^{-1} & *\\ G_{1i}V_i^{\mathrm T} & 0 & 0 & -\beta I\end{bmatrix}<0.\tag{13}$$

其中

$$\varSigma_{i11}=V_iA_{ii}^{\mathrm T}+A_{ii}V_i^{\mathrm T}+B_{2i}Z_i^{\mathrm T}+Z_iB_{2i}^{\mathrm T}+B_{1i}B_{1i}^{\mathrm T}+\varepsilon\sum_{j=1,j\neq i}^{N}A_{ij}A_{ij}^{\mathrm T}+\beta B_{2i}M_{1i}M_{1i}^{\mathrm T}B_{2i}^{\mathrm T},$$

$$\varSigma_{i12}=C_iV_i^{\mathrm T}+D_iZ_i^{\mathrm T}+\beta D_iM_{1i}M_{1i}^{\mathrm T}B_{2i}^{\mathrm T},$$

$$\varSigma_{i22}=-\gamma^2I+\beta D_iM_{1i}M_{1i}^{\mathrm T}D_i^{\mathrm T},$$

$$W=\frac{1}{\varepsilon}(N-1)I,$$

$$V_i=(E_iX_i+Y_i\varPhi_i^{\mathrm T}),\ i=1,2,\cdots,N.$$

则广义大系统 (1) 是可非脆弱分散 H_∞控制的. 此时 $K_i=Z_i^{\mathrm T}(E_iX_i+Y_i\varPhi_i^{\mathrm T})^{-\mathrm T}$ 是系统 (1) 的一个非脆弱分散 H_∞控制器增益.

证明 记

$$\overline{K}_i=K_i+\Delta K_i,$$

$$\widetilde{\varPhi}=\mathrm{blockdiag}(\varPhi_1,\varPhi_2,\cdots,\varPhi_N),$$

$$\widetilde{X}=\mathrm{blockdiag}(X_1,X_2,\cdots,X_N),$$

$$\widetilde{Y}=\mathrm{blockdiag}(Y_1,Y_2,\cdots,Y_N),$$

$$\widetilde{P}=\mathrm{blockdiag}(\widetilde{P}_1,\widetilde{P}_2,\cdots,\widetilde{P}_N),$$

$$\widetilde{P}_i=(E_iX_i+Y_i\varPhi_i^{\mathrm T})^{-\mathrm T},$$

则有 $\widetilde{X}>0$, $E\widetilde{\varPhi}=0$, $\mathrm{rank}\widetilde{\varPhi}=n-r$ (这里 $\mathrm{rank}\,E=r$), $\widetilde{P}=(E\widetilde{X}+\widetilde{Y}\widetilde{\varPhi}^{\mathrm T})^{-\mathrm T}$.

由引理 1 和引理 2, 考虑闭环系统 (7), 有

$$[A+B_2(K+\Delta K)]^{\mathrm T}\widetilde{P}+\widetilde{P}^{\mathrm T}[A+B_2(K+\Delta K)]+\widetilde{P}^{\mathrm T}B_1B_1^{\mathrm T}\widetilde{P}+\frac{1}{\gamma^2}[C+D(K+\Delta K)]^{\mathrm T}[C+D(K+\Delta K)]\leqslant\sum_{i=1}^{N}\Big\{\Big(\Big([A_{ii}+B_{2i}\overline{K}_i]^{\mathrm T}\widetilde{P}_i+\widetilde{P}_i^{\mathrm T}[A_{ii}+B_{2i}\overline{K}_i]+\widetilde{P}_i^{\mathrm T}\Big[\varepsilon\sum_{j=1,j\neq i}^{N}A_{ij}A_{ij}^{\mathrm T}\Big]\widetilde{P}_i+W+\widetilde{P}_i^{\mathrm T}B_{1i}B_{1i}^{\mathrm T}\widetilde{P}_i+\frac{1}{\gamma^2}[C_i+D_i\overline{K}_i]^{\mathrm T}[C_i+D_i\overline{K}_i]\Big)_{ii}\Big)\Big\}<0.\tag{14}$$

只要

$$[A_{ii}+B_{2i}\overline{K}_i]^{\mathrm T}\widetilde{P}_i+\widetilde{P}_i^{\mathrm T}[A_{ii}+B_{2i}\overline{K}_i]+\widetilde{P}_i^{\mathrm T}\Big[\varepsilon\sum_{j=1,j\neq i}^{N}A_{ij}A_{ij}^{\mathrm T}\Big]\widetilde{P}_i+W+\widetilde{P}_i^{\mathrm T}B_{1i}B_{1i}^{\mathrm T}\widetilde{P}_i+\frac{1}{\gamma^2}[C_i+D_i\overline{K}_i]^{\mathrm T}[C_i+D_i\overline{K}_i]<0,\tag{15}$$

则由 Schur 补引理可知上式等价于

$$\begin{bmatrix}\varOmega_i+(B_{2i}\Delta K_i)^{\mathrm T}\widetilde{P}_i+\widetilde{P}_i^{\mathrm T}B_{2i}\Delta K_i & *\\ C_i+D_i(K_i+\Delta K_i) & -\gamma^2I\end{bmatrix}<0.\tag{16}$$

其中

$$\varOmega_i=[A_{ii}+B_{2i}K_i]^{\mathrm T}\widetilde{P}_i+\widetilde{P}_i^{\mathrm T}[A_{ii}+B_{2i}K_i]+\widetilde{P}_i^{\mathrm T}\Big[\varepsilon\sum_{j=1,j\neq i}^{N}A_{ij}A_{ij}^{\mathrm T}\Big]\widetilde{P}_i+W+\widetilde{P}_i^{\mathrm T}B_{1i}B_{1i}^{\mathrm T}\widetilde{P}_i.$$

注意到 $\Delta K_i=M_{1i}F_{1i}G_{1i}$, 有

$$\begin{bmatrix}\varOmega_i+(B_{2i}\Delta K_i)^{\mathrm T}\widetilde{P}_i+\widetilde{P}_i^{\mathrm T}B_{2i}\Delta K_i & *\\ C_i+D_i(K_i+\Delta K_i) & -\gamma^2 I\end{bmatrix}\leqslant$$

$$\begin{bmatrix}\varOmega_i & *\\ C_i+D_iK_i & -\gamma^2 I\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}\widetilde{P}_i^{\mathrm T}B_{2i}M_{1i}\\ D_iM_{1i}\end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix}\widetilde{P}_i^{\mathrm T}B_{2i}M_{1i}\\ D_iM_{1i}\end{bmatrix}^{\mathrm T}+\beta^{-1}\begin{bmatrix}G_{1i}^{\mathrm T}\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}G_{1i}^{\mathrm T}\\ 0\end{bmatrix}^{\mathrm T}<0. \tag{17}$$

由Schur补引理可知, 上式等价于

$$\begin{bmatrix}\varXi_{i11} & * & * & *\\ \varXi_{i12} & \varSigma_{i22} & * & *\\ I & 0 & -W^{-1} & *\\ G_{1i} & 0 & 0 & -\beta I\end{bmatrix}<0. \tag{18}$$

其中

$$\varXi_{i11}=\varOmega_i-W+\beta\widetilde{P}_i^{\mathrm T}B_{2i}M_{1i}M_{1i}^{\mathrm T}B_{2i}^{\mathrm T}\widetilde{P}_i,$$

$$\varXi_{i12}=C_i+D_iK_i+\beta D_iM_{1i}M_{1i}^{\mathrm T}B_{2i}^{\mathrm T}\widetilde{P}_i.$$

对式(18)两边分别左乘 $\mathrm{blockdiag}\,(\widetilde{P}_i^{-\mathrm T},I,I,I)$ 和右乘 $\mathrm{blockdiag}\,(\widetilde{P}_i,I,I,I)$, 注意到 $V_i=\widetilde{P}_i^{-\mathrm T}$ 和式(15)$\sim$(18), 并令 $Z_i=\widetilde{P}_i^{-\mathrm T}K_i^{\mathrm T}$, 则由Schur补引理可知式(18)等价于(13). 从而由引理3可知: 在定理1的条件下, 当 $\omega(t)=0$ 时闭环系统(7)是正则、无脉冲和稳定的, 且满足 $\|T_{z\omega}(s)\|_\infty<\gamma$. □

类似于定理1, 对控制器增益具有乘法型扰动(6)的情况, 有如下定理:

定理 2 对于广义大系统(1), 给定正数 $\gamma>0$ 和控制器增益乘法型扰动(6), 如果存在对称正定矩阵 $X_i>0$, 矩阵 Y_i,Z_i 和正数 $\varepsilon,\beta>0$, 使得如下线性矩阵不等式组(LMIs)成立:

$$\begin{bmatrix}\widetilde{\varSigma}_{i11} & * & * & *\\ \widetilde{\varSigma}_{i12} & \widetilde{\varSigma}_{i22} & * & *\\ V_i^{\mathrm T} & 0 & -W^{-1} & *\\ G_{2i}Z_i^{\mathrm T} & 0 & 0 & -\beta I\end{bmatrix}<0. \tag{19}$$

其中

$$\widetilde{\varSigma}_{i11}=V_iA_{ii}^{\mathrm T}+A_{ii}V_i^{\mathrm T}+B_{2i}Z_i^{\mathrm T}+Z_iB_{2i}^{\mathrm T}+B_{1i}B_{1i}^{\mathrm T}+\varepsilon\sum_{j=1,j\neq i}^{N}A_{ij}A_{ij}^{\mathrm T}+\beta B_{2i}M_{2i}M_{2i}^{\mathrm T}B_{2i}^{\mathrm T},$$

$$\widetilde{\varSigma}_{i12}=C_iV_i^{\mathrm T}+D_iZ_i^{\mathrm T}+\beta D_iM_{2i}M_{2i}^{\mathrm T}B_{2i}^{\mathrm T},$$

$$\widetilde{\varSigma}_{i22}=-\gamma^2I+\beta D_iM_{2i}M_{2i}^{\mathrm T}D_i^{\mathrm T},$$

$$W=\frac{1}{\varepsilon}(N-1)I,$$

$$V_i=(E_iX_i+Y_i\varPhi_i^{\mathrm T}),\ i=1,2,\cdots,N.$$

则广义大系统(1)是可非脆弱分散 H_∞ 控制的. 此时 $K_i=Z_i^{\mathrm T}(E_iX_i+Y_i\varPhi_i^{\mathrm T})^{-\mathrm T}$ 是系统(1)的一个非脆弱分散 H_∞ 控制器增益.

注 1 对于控制器增益扰动是加法型扰动(5)和乘法型扰动(6)的情况, 定理1和定理2分别给出了广义大系统(1)非脆弱分散控制器存在的充分条件和控制器的设计方法, 该条件是一组线性矩阵不等式, 因此可以应用Matlab软件方便求解.

4 非脆弱分散 H_∞ 保性能控制器设计

定理 3 对于广义大系统(1), 给定正数 $\gamma>0$ 和控制器增益加法型扰动(5), 如果存在对称正定矩阵 $X_i>0$, 矩阵 Y_i,Z_i 和正数 $\varepsilon,\beta>0$, 使得如下线性矩阵不等式组(LMIs)成立:

$$\begin{bmatrix}\varSigma_{i11} & * & * & * & * & *\\ \varSigma_{i12} & \varSigma_{i22} & * & * & * & *\\ V_i^{\mathrm T} & 0 & -Q^{-1} & * & * & *\\ Z_i^{\mathrm T} & 0 & 0 & \varSigma_{i44} & * & *\\ V_i^{\mathrm T} & 0 & 0 & 0 & -W^{-1} & *\\ G_{1i}V_i^{\mathrm T} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta I\end{bmatrix}<0, \tag{20}$$

其中 $\varSigma_{i11},\varSigma_{i12},\varSigma_{i22},V_i,W$ 同定理1, 而

$$\varSigma_{i44}=-R^{-1}+\beta M_{1i}M_{1i}^{\mathrm T},$$

则广义大系统(1)是可非脆弱分散 H_∞ 保性能的. 此时 $K_i=Z_i^{\mathrm T}(E_iX_i+Y_i\varPhi_i^{\mathrm T})^{-\mathrm T}$ 是广义大系统(1)的一个非脆弱分散 H_∞ 保性能控制器增益, 其保性能指标为

$$J^*=\sum_{i=1}^{N}x_i^{\mathrm T}(0)E_i^{\mathrm T}(E_iX_i+Y_i\varPhi_i^{\mathrm T})^{-\mathrm T}x_i(0)+N\rho^2.$$

证明略.

注 2 定理3给出了广义大系统(1)完全由子系统决定的可非脆弱分散 H_∞ 保性能控制的充分条件. 注意到, 定理3中所得到的闭环系统性能指标的界依赖于初始状态 $x(0)$. 然而, 在实际系统中人们往往难以精确确定系统的初始状态 $x(0)$. 为了克服该困难, 可假定 $x(0)$ 是一个期望满足 $\mathrm E(x(0)x(0)^{\mathrm T})=I$ 的零均值随机变量, 此时闭环系统性能指标的期望值

$$J^*=\mathrm E(J)\leqslant \mathrm E\Big\{\sum_{i=1}^{N}x_i^{\mathrm T}(0)E_i^{\mathrm T}(E_iX_i+Y_i\varPhi_i^{\mathrm T})^{-\mathrm T}x_i(0)\Big\}+N\rho^2=\sum_{i=1}^{N}\mathrm{tr}[E_i^{\mathrm T}(E_iX_i+Y_i\varPhi_i^{\mathrm T})^{-\mathrm T}]+N\rho^2,$$

故此时 $\overline{J}=\sum\limits_{i=1}^{N}\mathrm{tr}[E_i^{\mathrm T}(E_iX_i+Y_i\varPhi_i^{\mathrm T})^{-\mathrm T}]+N\rho^2$ 可称为

系统的可保性能.

假定 $x(0)$ 是一个期望满足零均值的随机变量, 则可得到如下定理:

定理 4　对于广义大系统 (1), 给定正数 $\gamma>0$ 和控制器增益加法型扰动 (5), 如果存在对称正定矩阵 $X_i>0$, 矩阵 Y_i, Z_i 和正数 $\varepsilon, \beta>0$, 使得线性矩阵不等式组 (LMIs) (20) 成立, 则广义大系统 (1) 是可非脆弱分散 H_∞ 保性能的. 此时 $K_i=Z_i^{\mathrm{T}}(E_iX_i+Y_i\varPhi_i^{\mathrm{T}})^{-\mathrm{T}}$ 是广义大系统 (1) 的一个非脆弱分散 H_∞ 保性能控制器增益, 其保性能指标

$$\overline{J}=\sum_{i=1}^{N}\mathrm{tr}[E_i^{\mathrm{T}}(E_iX_i+Y_i\varPhi_i^{\mathrm{T}})^{-\mathrm{T}}]+N\rho^2.$$

类似于定理 4, 对于控制器增益具有乘法型扰动 (6) 的情况, 有如下定理:

定理 5　对于广义大系统 (1), 给定正数 $\gamma>0$ 和控制器增益乘法型扰动 (6), 如果存在对称正定矩阵 $X_i>0$, 矩阵 Y_i, Z_i 和正数 $\varepsilon, \beta>0$, 使得如下线性矩阵不等式组 (LMIs) 成立:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\Sigma}_{i11} & * & * & * & * & * \\ \widetilde{\Sigma}_{i12} & \widetilde{\Sigma}_{i22} & * & * & * & * \\ V_i^{\mathrm{T}} & 0 & -Q^{-1} & * & * & * \\ Z_i^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & \widetilde{\Sigma}_{i44} & * & * \\ V_i^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & -W^{-1} & * \\ G_{2i}Z_i^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta I \end{bmatrix}<0, \tag{21}$$

其中 $\widetilde{\Sigma}_{i11}, \widetilde{\Sigma}_{i12}, \widetilde{\Sigma}_{i22}, V_i, W$ 同定理 2, 而

$$\widetilde{\Sigma}_{i44}=-R^{-1}+\beta M_{2i}M_{2i}^{\mathrm{T}},$$

则广义大系统 (1)是可非脆弱分散 H_∞ 保性能的. 此时 $K_i=Z_i^{\mathrm{T}}(E_iX_i+Y_i\varPhi_i^{\mathrm{T}})^{-\mathrm{T}}$ 是广义大系统 (1) 的一个非脆弱分散 H_∞ 保性能控制器增益, 其保性能指标

$$\overline{J}=\sum_{i=1}^{N}\mathrm{tr}[E_i^{\mathrm{T}}(E_iX_i+Y_i\varPhi_i^{\mathrm{T}})^{-\mathrm{T}}]+N\rho^2.$$

注 3　对于控制器增益扰动是加法型扰动 (5) 和乘法型扰动 (6) 的情况, 定理 4 和定理 5 分别给出了广义大系统 (1) 非脆弱分散保性能控制器存在的充分条件和控制器的设计方法, 该条件是一组线性矩阵不等式, 故也可以应用 Matlab 软件方便求解.

5　仿真示例

沿用前面的记号, 考虑由 2 个子系统组成的线性广义大系统 (1), 其中

$$E_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ B_{21}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},$$

$$A_{11}=\begin{bmatrix}3&-3\\1&2\end{bmatrix},\ A_{12}=\begin{bmatrix}0.1&-0.2&0.1\\-0.2&0.1&-0.1\end{bmatrix},$$

$$C_1=\begin{bmatrix}1&1\\-1&0.5\end{bmatrix},\ E_2=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\2&0&1\end{bmatrix},$$

$$A_{22}=\begin{bmatrix}2&-1&0.5\\-1&3&-2\\-2&-2&3\end{bmatrix},\ A_{21}=\begin{bmatrix}-0.5&0.5\\0.5&-0.5\\0.5&0.5\end{bmatrix},$$

$$B_{22}=\begin{bmatrix}1&-1\\1&0.5\\1.5&1\end{bmatrix},\ B_{11}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},$$

$$D_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ D_2=\begin{bmatrix}0.5&-1\\1&1\end{bmatrix},$$

$$B_{12}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\ C_2=\begin{bmatrix}0&0.5&1\\1&0.5&-1\end{bmatrix}.$$

选择 $\varPhi_1=[0\quad 1]^{\mathrm{T}}, \varPhi_2=[-1\quad 1\quad 2]^{\mathrm{T}}; \gamma=0.5, \rho=0.5$, Q_1, Q_2, R_1 和 R_2 均为相应维数的单位矩阵; 干扰输入为高斯白噪声. 通过 Matlab 仿真可以看出, 开环系统是不稳定的.

1) 控制器增益是具有如下参数的加法型扰动:

$$M_{11}=[0.1\quad 0.1],\ G_{11}=\begin{bmatrix}0.1&-0.1\\0.1&0.1\end{bmatrix},$$

$$M_{12}=\begin{bmatrix}0.1&-0.1\\0.1&0.1\end{bmatrix},\ G_{12}=\begin{bmatrix}0.1&0.1&0.1\\0.1&0.2&0.1\\0.1&0.2&0.2\end{bmatrix}.$$

根据定理 4, 应用 Matlab 软件的 LMI 控制工具包解不等式 (20), 可得非脆弱分散 H_∞ 保性能控制器可选择为 $u_i(t)=(K_i+\Delta K_i)x_i(t), i=1,2$, 相应的保性能指标 $\overline{J}=26.18$. 其中

$$K_1=[-58.4995\quad 8.6074],$$

$$K_2=\begin{bmatrix}-2.799&-0.7981&-1.0749\\0.2554&0.2503&1.3398\end{bmatrix}.$$

2) 控制器增益是具有如下参数的乘法型扰动:

$$M_{21}=[0.1\quad 0.1],\ G_{21}=\begin{bmatrix}0.1\\0.1\end{bmatrix},$$

$$M_{22}=\begin{bmatrix}0.1&-0.1\\0.1&0.1\end{bmatrix},\ G_{22}=\begin{bmatrix}0.1&-0.1\\0.1&0.2\end{bmatrix}.$$

根据定理 5, 应用 Matlab 软件的 LMI 控制工具包解不等式 (21), 可得非脆弱分散 H_∞ 保性能控制器可选择为 $u_i(t)=(K_i+\Delta K_i)x_i(t), i=1,2$, 相应的保性能指标 $\overline{J}=23.3532$. 其中

$$K_1=[-18.7555\quad 3.2699],$$

$$K_2=\begin{bmatrix}-2.2573&-0.6934&-1.0313\\0.0786&0.2201&1.3682\end{bmatrix}.$$

需要说明的是, 保性能指标 (3) 与外部输入干扰无关, 性能指标表示干扰输入到输出的抑制作用.

6 结 论

对于一类广义大系统和一个给定的二次型性能指标, 在其控制器参数扰动具有数值界的条件下, 基于广义系统的有界实引理和应用线性矩阵不等式 (LMI) 方法给出了广义大系统存在非脆弱分散 H_∞ 状态反馈控制器和非脆弱分散 H_∞ 保性能控制器的 LMI 条件, 并用该线性矩阵不等式系统的可行解分别给出了非脆弱分散 H_∞ 状态反馈控制器和非脆弱分散 H_∞ 保性能控制律的参数化表示. 最后通过仿真例子说明了所提出方法的有效性, 但该方法所具有的潜在的实际应用价值尚有待于进一步研究.

参考文献(References)

[1] Zhang Q L. Singular large-scale systems' decentralized control and robust Control[M]. Xi'an: Northwest Industry University Press, 1997: 1-8.

[2] Liu Y Q, Guan Z H, Wen X C. Application of auxiliary simultaneous equations to the problem in the stabilization of singular and impulsive large scale systems[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 1995, 42(1): 46-51.

[3] 沃松林, 邹云. 参数不确定的广义大系统的分散鲁棒镇定控制[J]. 控制与决策, 2004, 19(8): 931-934.
(Wo S L, Zou Y. Decentralized robust stabilization for singular large scale systems with parameter uncertainty[J]. Control and Decision, 2004, 19(8): 931-934.)

[4] Wo S L, Zou Y, Shi G D. Guaranteed cost control for discrete-time singular large-scale systems with parameter uncertainty[J]. Acta Automatica Sinica, 2005, 31(5): 808-814.

[5] Wo S L, Zou Y, Sheng M, et al. Robust control for discrete-time singular large-scale systems with parameter uncertainty[J]. J of the Franklin Institute, 2007, 344(2): 97-106.

[6] 史国栋, 沃松林, 邹云. 参数不确定广义大系统的保性能分散控制[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(6): 914-918.
(Shi G D, Wo S L, Zou Y. Guaranteed cost decentralized control for singular large-scale systems with parameter uncertainty[J]. Control Theory & Applications, 2005, 22(6): 914-918.)

[7] Mao W J. Robust decentralized stabilization of interval discrete-time singular large-scale systems[J]. IET Control Theory and Applications, 2010, 4(2): 244-252.

[8] 陈跃鹏, 张庆灵, 徐天群. 基于观测器的具有对称结构的广义大系统的 H_∞ 分散控制[J]. 东北大学学报: 自然科学版, 2001, 22(4): 450-453.
(Chen Y P, Zhang Q L, Xu T Q. Decentralized H_∞ control based on observer for large-scale descriptor symmetric compose systems[J]. J of Northeastern University: Natural Science, 2001, 22(4): 450-453.)

[9] Xie Y F, Gui W H, Jiang Z H. Decentralized robust H-infinity descriptor output feedback control for value-bounded uncertain descriptor large-scale systems[J]. J of Control Theory and Applications, 2006, 4(2): 193-200.

[10] 蒋朝辉, 桂卫华, 谢永芳. 数值界不确定性奇异大系统分散鲁棒 H_∞ 广义输出反馈控制[J]. 信息与控制, 2006, 35(1): 47-54.
(Jiang Z H, Gui W H, Xie Y F. Decentralized robust H_∞ descriptor output feedback control for singular large-scale systems with uncertain value bound[J]. Information and Control, 2006, 35(1): 47-54.)

[11] 桂卫华, 蒋朝辉, 谢永芳. 基于广义输出反馈的奇异大系统分散鲁棒 H_∞ 控制[J]. 系统工程与电子技术, 2006, 28(5): 736-740.
(Gui W H, Jiang Z H, Xie Y F. Decentralized robust control of singular large-scale systems based on descriptor output feedback[J]. Systems Engineering and Electronics, 2006, 28(5): 736-740.)

[12] 沃松林, 史国栋, 邹云. 不确定广义大系统分散鲁棒 H_∞ 保性能控制[J]. 控制理论与应用, 2009, 26(9): 1035-1040.
(Wo S L, Shi G D, Zou Y. Decentralized robust H_∞ and cost-guaranteed control for uncertain singular large-scale systems[J]. Control Theory & Applications, 2009, 26(9): 1035-1040.)

[13] Keel Bhattacharyya. Robust, fragile, or optimal[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1997, 42(8): 1098-1105.

[14] 熊军林, 张庆灵. 具有结构不确定性的时滞系统的最优非脆弱保性能控制[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(3): 503-506.
(Xiong J L, Zhang Q L. Optimal non-fragile guaranteed cost control for time-delay systems with structured uncertainties[J]. Control Theory & Applications, 2005, 22(3): 503-506.)

[15] 汪锐, 冯佳昕, 赵军. 一类线性不确定切换系统的非脆弱控制器设计方法[J]. 控制与决策, 21(7): 735-744.
(Wang R, Feng J X, Zhao J. Design methods of non-fragile controllers for a class of uncerta in switched linear systems[J]. Control and Decision, 2006, 21(7): 735-744.)

[16] Lien C H. Non-fragile guaranteed cost control for uncertain neutral dynamic systems with time-varying delays in state and control input[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2007, 31(26): 889-899.

[17] Jong-Hae Kim, Do-Chang Oh. Robust and non-fragile H_∞ control for descriptor systems with parameter uncertainties and time delay[J]. Int J of Control, Automation, and Systems, 2007, 5(1): 8-14.

[18] Chang-Hua Lien. H_∞ non-fragile observer-based controls of dynamical systems via LMI optimization approach[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2007, 34(2): 428-436.

[19] Ju H Park. Robust non-fragile control for uncertain discrete-delay large-scale systems with a class of controller gains variations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 149(1): 147-164.

[20] Yi-You Hou, Teh-Lu Liao, Jun-Juh Yan, et al. Non-fragile H_∞ control for singular systems with state and input time-varying delays[J]. Int J of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 2007, 8(1): 31-40.

[21] 肖豪, 沃松林. 广义大系统的非脆弱分散控制[J]. 江南大学学报: 自然科学版, 2009, 8(2): 140-144.
(Xiao H, Wo S L. Non-fragile decentralized control for singular large-scale systems[J]. J of Jiangnan University: Natural Science Edition, 2009, 8(2): 140-144.)

[22] Xiao H, Wo S L. Non-fragile decentralized guaranteed cost control for uncertain singular large-scale systems[C]. Proc of 29th Chinese Control Conf. Beijing, 2010: 5803-5808.

[23] Masubuchi I, Kamitane Y, Ohara A, et al. H_∞ control for descriptor systems: A matrix inequalities approach[J]. Automatica, 1997, 33(4): 669-673.

(上接第486页)

[32] 罗雪晖, 杨烨, 李霞. 改进混合蛙跳算法求解旅行商问题[J]. 通信学报, 2009, 30(7): 130-135.
(Luo X H, Yang Y, Li X. Modified shuffled frog-leaping algorithm to solve traveling salesman problem[J]. J on Communications, 2009, 30(7): 130-135.)

[33] 王亚敏, 潘全科, 冀俊忠. 求解考试时间安排问题的离散蛙跳算法[J]. 计算机工程与应用, 2009, 45(36): 40-43.
(Wang Y M, Pan Q K, Ji J Z. Discrete shuffled frog leaping algorithm for examination timetabling problem[J]. Computer Engineering and Applications, 2009, 45(36): 40-43.)

[34] Yang C S, Chuang L Y, Ke Chao-Hsuan, et al. A combination of shuffled frog-leaping algorithm and genetic algorithm for gene selection[J]. J of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics, 2008, 12(3): 218-226.

[35] Duc-Hoang Nguyen, Thai-Hoang Huynh. A SFLA-based fuzzy controller for balancing a ball and beam system[C]. The 10th Int Conf on Control, Automation, Robotics and Vision. New York: IEEE Press, 2008: 1948-1953.

[36] 杜长海, 黄席樾, 杨祖元, 等. 改进的FCM聚类在交通时段自动划分中的应用[J]. 计算机工程与应用, 2009, 45(24): 190-193.
(Du C H, Huang X Y, Yang Z Y, et al. Application of improved fuzzy C-means clustering in automatic programming traffic intervals[J]. Computer Engineering and Applications, 2009, 45(24): 190-193.)

[37] Amiri B, Fathian M, Maroosi A. Application of shuffled frog-leaping algorithm on clustering[J]. Int J of Advanced Manufacturing Technology, 2009, 45(1/2): 199-209.

[38] 陈功贵, 李智欢, 陈金富, 等. 含风电场电力系统动态优化潮流的混合蛙跳算法[J]. 电力系统自动化, 2009, 25(4): 25-30.
(Chen G G, Li Z H, Chen J F, et al. SFL algorithm based dynamic optimal power flow in wind power integrated system[J]. Automation of Electric Power Systems, 2009, 25(4): 25-30.)

[39] 岳克强, 赵知劲, 尚俊娜, 等. 智能优化在多用户检测中的应用[J]. 计算机工程与应用, 2009, 45(26): 90-93.
(Yue K Q, Zhao Z J, Shang J N, et al. Intelligent optimization algorithm used in multi-user detection[J]. Computer Engineering and Applications, 2009, 45(26): 90-93.)

[40] Antariksha B. Color image segmentation using clonal selection-based shuffled frog leaping algorithm[C]. Int Conf on Advances in Recent Technologies in Communication and Computing. New York: IEEE Press, 2009: 517-520.

[41] Wang Z Q, Sun X. Image watermarking scheme based on shuffled frog leaping algorithm[C]. IEEE Int Symposium on Knowledge Acquisition and Modeling Workshop. New York: IEEE Press, 2008: 239-242.

[42] Sun X, Wang Z Q, Zhang D X. A web document classification method based on shuffled frog leaping algorithm[C]. 2nd Int Conf on Genetic and Evolutionary Computing. New York: IEEE Press, 2008: 205-208.