汕头大学 2015 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：612

科目名称：数学分析

适用专业：基础数学、应用数学

考 生 须 知

答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用黑色字迹签字笔作答，答题要写清题号，不必抄原题。

一．(本题 5 分) 用 ε-δ 语言证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.

二．计算下列各题(本大题共 5 小题，每小题 8 分，共计 40 分).

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$；

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\cos(t^2)\mathrm{d}t}{x}$；

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$；

4. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}$；

5. $\displaystyle\int e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x$.

三．(本题 10 分) 求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)$ 处的切线方程和法线方程.

四．(本题 10 分) 计算二重积分 $\displaystyle\iint_D\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y):|x|\le 1,|y|\le 1\}$.

五．(本题 10 分) 证明第二型曲线积分 $\displaystyle\int_{(1,0)}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)\,\mathrm{d}x+(x^2-4xy^3)\,\mathrm{d}y$ 在 xoy 平面内与路径无关，并计算积分值.

六．(本题 10 分) 设 $f(x,y)$ 在 xoy 平面上可微，证明存在 $c\in(0,1)$ 使得

$$f(1,1)-f(0,0)=f_x(c,c^2)+2cf_y(c,c^2).$$

七．(本题 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续且 $\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛，试证 $\int_1^{+\infty}[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$ 收敛. 并举例说明在这个结论中，条件“$\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛”不能被“$\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 条件收敛”替代.

八．(本题 10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$ 的收敛区间，并求其和函数.

九．(本题 10 分) 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

十．(本题 10 分) 计算对坐标的曲面积分(第二型曲面积分) $\iint\limits_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧在 $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$ 的部分.

十一．(本题 10 分) 设函数 $g(x)$ 在 $(-1,1)$ 上可导，在 $x=0$ 处二阶可导，且 $g(0)=g'(0)=0$ 和 $g''(0)=3$. 设

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{g(x)}{x}, & x \ne 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

求 $f'(0)$，详细写出求解过程.

十二．(本题 15 分)

1) 设 s,t,u,v 为给定的实数且 $s<t$. 证明存在多项式

$$p(x)=k_1(x-s)^3+k_2(x-s)^2+k_3(x-s)+k_4$$

使得 $p(s)=u, p(t)=v, p'(s)=p'(t)=0$ 且 $p(x)$ 在 $[s,t]$ 上单调.

2) 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数，证明对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $[a,b]$ 上的可导函数 $g(x)$ 使得 $\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|<\varepsilon$.

3) 举例说明问题 2) 的结论中，$f(x)$ 的连续性条件不可缺少.