汕头大学 2013 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：814

科目名称：高等代数

适用专业：基础数学，应用数学

考 生 须 知

答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用黑色字迹签字笔作答，答题要写清题号，不必抄原题。

一．(20 分) (1) 已知$f(x)=x^3+(3\mathrm{i}-2)x^2+(4-6\mathrm{i})x-8$有实数根，求$f(x)$在复数域上的因式分解式，其中$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$是虚数单位；

(2) 判断下列多项式在有理数域上是否可约：

$$f_1(x)=x^3+4x+1;\quad f_2(x)=x^3+3x-4;\quad f_3(x)=x^4+4x^2+2x+2.$$

二．(20 分) 设$A\in R^{2\times 2}$（$R^{m\times n}$表示实数域上的$m\times n$矩阵组成的集合），$\alpha=x+y\mathrm{i}$是对应A的一个复特征值$\lambda=a+b\mathrm{i}$的特征向量，其中$x,y\in R^2,a,b\in R,b\neq 0$.

(1) 证明$\overline{\lambda}=a-b\mathrm{i}$也是$A$的特征值；并求出属于$\overline{\lambda}$的一个特征向量.

(2) 证明x与y线性无关.

(3) 求相似变换矩阵P，使得$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

三．(20 分) (1) 求矩阵$D_n=\begin{pmatrix} 4 & 3 & & & & \\ 1 & 4 & 3 & & & \\ & 1 & 4 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 4 & 3 \\ & & & & 1 & 4 \end{pmatrix}$（即$D_n$为三对角矩阵，空格处为零）的行列式；

(2) 设有矩阵$A=\begin{pmatrix} a & b & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & b & \cdots & b \\ b & b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & b & a & b \\ b & b & b & b & b & a \end{pmatrix}\in R^{n\times n},n\geq 2$. 求出$A$的特征值及相应的重数.

四．(20 分) 设A是n阶方阵，满足$A^2=2A$.

(1) 证明：$\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(2E_n-A)=n$，其中$E_n$为$n$阶单位矩阵.

(2) 证明方阵A相似于对角阵并求出该对角阵.

五. (20分) (1) 设A, B分别为$m\times n$, $p\times m$矩阵. 证明: 线性方程组$BA\mathbf{x}=\mathbf{0}$与$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$是同解方程组的充分必要条件是$\operatorname{rank}(BA)=\operatorname{rank}(A)$, 其中$\operatorname{rank}(A)$表示矩阵$A$的秩.

(2) 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$是实数域上的n阶方阵, 其(i,j)元为a_{ij}. 设

$$|a_{ii}|>\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|,\quad i=1,2,\ldots,n.$$

证明: $|A|\neq 0$, 其中$|A|$表示方阵A的行列式.

(3) 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$满足: (i) $a_{ii}>0$, $i=1,2,\ldots,n$;

(ii) $a_{ij}<0$, $i\neq j$, $i,j=1,2,\ldots,n$; (iii) $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=0$, $i=1,2,\ldots,n$.

求$\operatorname{rank}(A)$.

(4) 矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}\in R^{m\times n}$, 若$a_{ij}\geq 0$, $i=1,2,\cdots,m$, $j=1,2,\cdots,n$, 则称A为非负矩阵. 设$A=(a_{ij})_{n\times n}, B=(b_{jk})_{n\times n}\in R^{n\times n}$均为非负矩阵, 且$A-B$也为非负矩阵. 证明: A^k-B^k为非负矩阵, 其中k为正整数.

六. (15分) (1) 验证集合V对于指定的线性运算是否构成实数域上的线性空间: $V=\mathbb{R}^+$(正实数的集合), 加法和数量乘法(标量乘法)定义为

加法: $a\oplus b=ab$. $a,b\in V$;

数量乘法: $k\circ a=a^k$, $k\in\mathbb{R}$, $a\in V$.

(2) 求下列线性空间的维数和一组基: 实数域上的n阶对称矩阵按矩阵的加法和标量乘法构成的线性空间.

七. (15分) 设(α,β)是n维欧式空间R^n的内积, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为$R^n$中的$n$个向量.

(1) 证明: $G_n=((\alpha_i,\alpha_j))_{n\times n}$ (G_n的(i,j)元为(α_i,α_j)) 是半正定矩阵;

(2) 证明: G_n为正定矩阵的充分必要条件是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为$R^n$的一组基.

八. (20分) 设$R^{2\times 2}$为实数域上的2×2矩阵按矩阵的加法和数量乘法(标量乘法)构成的线性空间. 定义$R^{2\times 2}$上的变换σ:

$$\sigma(X)=AX,\ X\in R^{2\times 2},\ 其中A=\begin{pmatrix}3&4\\1&3\end{pmatrix}.$$

(1) 证明: σ是线性变换;

(2) 求σ关于基 $E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 的矩阵.

(3) 是否存在$R^{2\times 2}$的一组基$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$使得$\sigma$在基$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$下的矩阵为对角阵?