汕头大学 2013 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：612

科目名称：数学分析

适用专业：基础数学、应用数学

考 生 须 知

答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用黑色字迹签字笔作答，答题要写清题号，不必抄原题。

本试题中，$\mathbb{R}$ 表示实数全体，$\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\}$ 表示自然数全体. 共十二道题，全部为必做题目.

一(10 分)、 求极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} t^2 dt}{\int_0^x t^2(t-\sin t)dt}$;　　　2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \frac{\sin t^2}{t}dt}{x^2}$.

二(10 分)、求函数 $u=xyz$ 在点A（5,1,2）沿到点B（9,4,14）的方向$\overrightarrow{AB}$上的方向导数.

三(14 分)、设$f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导， 当$x\in[a,b]$ 时，$g(x)>0$.假设 $f(a)g(b)=f(b)g(a)$. 证明存在一点 $\xi\in(a,b)$， 使得 $f'(\xi)g(\xi)=f(\xi)g'(\xi)$.

四(14 分)、求下列函数的条件极值：

$f(x,y,z,t)=x+y+z+t$，其中 $xyzt=c^4$，$x,y,z,t>0, c>0$.

五(14 分)、设 $a_n=\displaystyle\int_n^{+\infty} e^{-x^2}dx$, 证明：$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$ 收敛.

六(14 分)、设函数 $u(x,y)$ 在由封闭的光滑曲线 L 所围的区域 D 上具有二阶连续偏导数，证明：

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)d\sigma=\oint\limits_L \frac{\partial u}{\partial n}ds,$$

其中 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 是 $u(x,y)$ 沿 L 的外法方向 n 的方向导数.

七(14 分)、设 $V=\left\{(x,y,z)|\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1\right\}$, 计算

$$\iiint\limits_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dx\,dy\,dz.$$

八(16 分)、1. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间为 $(-R,\ R]$ $(R>0)$. 证明该级数在含于 $(-R,\ R]$ 的任意闭子区间上一致收敛.

2. 证明上述的 $f(x)$ 在 $(-R,\ R]$ 上连续.

九(10 分)、设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,A]$ 上连续，证明:

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_a^x [f(t+h)-f(t)]dt = f(x)-f(a),\ (a<x<A).$$

十(14 分)、把函数 $f(x)=x^2$ 在 $[-\pi,\ \pi]$ 上展开成傅里叶级数，并用通项为有理数的无穷级数表示 π^2.

十一(10 分)、 设 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上分别对每一个自变量 x 和 y 连续，并且当 x 固定时， f 对 y 是单调的，证明 f 是 $\mathbb{R}^2$ 上二元连续函数.

十二(10 分)、设 $\{a_1,\ a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$ 是一列实数. 若存在实数 a 使得对任意的 $\varepsilon>0$，存在自然数的有限子集 N_0，使得对任意的自然数的有限子集 $N\supset N_0$，有

$$\left|\sum_{n\in N} a_n - a\right| < \varepsilon,$$

则称数列 $\{a_1,\ a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$ 存在无序和， 用 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ 记上述 a.

试证明: 数列 $\{a_1,\ a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$ 存在无序和的充分必要条件是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，此时 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.