山 东 师 范 大 学

硕士研究生入学考试试题

考试科目名称：数学分析　　　　　　　　试题编号：831

注意事项：1. 本试卷共 4 道大题（共计 15 个小题），满分 150 分；
2. 本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3. 必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。
4. 是否允许使用普通计算器＿＿否＿＿。

* *

一、叙述、简答题（本题共 2 道小题，每小题 5 分，共 10 分）

1、叙述含参量无穷积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $I(x)$ 的定义；

2、函数

$$f(t)=\begin{cases} t^2\sin\dfrac{1}{t}, & 0<t\le x, \\ 0, & t=0 \end{cases}$$

在 $[0,x]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，于是存在 c，$0<c<x$，使得

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=x\sin\frac{1}{x}=f'(c)=2c\sin\frac{1}{c}-\cos\frac{1}{c}.$$

在上式中令 $x\to0^+$，有 $c\to0^+$，由

$$\lim_{x\to0^+} x\sin\frac{1}{x}=0,\quad \lim_{c\to0^+}2c\sin\frac{1}{c}=0$$

可知 $\lim\limits_{x\to0^+}\cos\dfrac{1}{c}=0$，因而 $\lim\limits_{c\to0^+}\cos\dfrac{1}{c}=0$．这看起来似乎与 $\lim\limits_{x\to0^+}\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在相矛盾，试分析其原因．

二、计算题（本题共 7 道小题，每小题 10 分，共 70 分）

1. 设 $a>0,b>0,c>0$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$

3. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{3^k}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^{k^2}$

4．计算 $I=\oint_L \dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中 L 为任一不通过原点的正方向闭曲线.

5．设函数 $f(x)$ 具有连续导函数且 $f(0)=0$，$f'(0)=2$．令

$$F(t)=\iint_{D_t} f(x^2+y^2)dxdy,$$

其中 $D_t=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le t^2\right\}$，求 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{F(t)}{t^4}$.

6．求曲面 $z=x^2-y^2$ 包含在柱面 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 内那部分的面积.

7．计算 $I=\int_0^{+\infty} e^{-px}\dfrac{\sin bx-\sin ax}{x}dx$，其中 $b>a$，$p>0$.

三、判断讨论题（本题共 2 道小题，每小题 15 分，共 30 分）

1、试求函数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$ 的定义域，并讨论 $S(x)$ 在该定义域内的连续性.

2、试确定 α 的值，使得函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^\alpha \sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处可微.

四、证明题（本题共 4 道小题，每小题 10 分，共 40 分）

1．按柯西收敛准则叙述数列 $\{a_n\}$ 发散的充要条件，并用它证明数列 $\{\sin n\}$ 是发散的.

2．设 $a>\ln 2-1$ 为任一常数，证明：当 $x>0$ 时，成立 $x^2-2ax+1<e^x$.

3．设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且对 $[a,b]$ 上任一可积函数 $g(x)$，恒有 $\int_a^b f(x)g(x)dx=0$．证明：在 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv 0$.

4．设 $f(x)$ 在包含 $[0,1]$ 的开区间上二阶可导，$f(0)=f(1)$，$|f''(x)|\le 1$。证明：对 $\forall x\in[0,1]$，有 $|f'(x)|\le\dfrac{1}{2}$.