

山东师范大学
硕士研究生入学考试试题

考试科目：量子力学 (831)

- 注意事项：1. 本试卷共 3 道大题（共计 14 个小题），满分 150 分；
2. 本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3. 必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。

一. 简述题（5 题，每题 6 分，共 30 分）

1. 一个体系的状态可以用不同的几率分布函数来表示吗？试举例说明。
2. 以 α 和 β 分别表示自旋向上和自旋向下的归一化波函数，写出两电子体系的自旋单态和自旋三重态波函数（只写自旋部分波函数）。
3. 氢原子体系处于状态 $\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{2} R_{3,1}(r) Y_{1,1}(\theta, \varphi) + \frac{\sqrt{3}}{2} R_{3,2}(r) Y_{2,-1}(\theta, \varphi)$ ，给出 L^2 和 L_z 可能取值及取值几率，并说明该状态是否是定态？为什么？。
4. 中心力场中粒子处于定态，试讨论轨道角动量是否有确定值。
5. 在质心坐标系中，设入射粒子的散射振幅为 $f(\theta)$ ，写出靶粒子的散射振幅，并分别写出全同玻色子碰撞和无极化全同费米子碰撞的微分散射截面表达式。

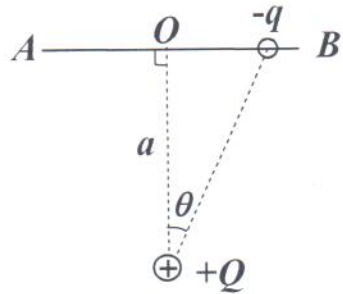
二. 证明题（5 题，每题 8 分，共 40 分）

1. 若 $\varphi_n(x)$, $n=1, 2, \dots$ 构成完备基组，证明：
$$\delta(x-x') = \sum_n \varphi_n^*(x') \varphi_n(x)$$
。
2. 一维粒子波函数 $\psi(\mathbf{x})$ 满足定态 Schrödinger 方程，若 $\psi_1(\mathbf{x})$ 、 $\psi_2(\mathbf{x})$ 都是方程的解，则有 $\psi_1 \psi_2' - \psi_2 \psi_1' = \text{常数}$ （与 \mathbf{x} 无关）。
3. 证明：在定态中几率流密度矢量与时间无关。
4. 设算符 $\hat{F} = \hat{A}\hat{B}$ ， $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 1$ ，若 ϕ 为 \hat{F} 的本征函数，相应的本征值为 ε ，求证 $\phi \equiv \hat{A}\phi$ 和 $\psi \equiv \hat{B}\phi$ 也是 \hat{F} 的本征函数，并求出相应的本征值。

5. 若电子处于 \hat{S}_z 的本征态。试证在此态中, \hat{S}_y 取值 $\hbar/2$ 或 $-\hbar/2$ 的概率各为 $1/2$ 。

三. 计算题 (4 题, 共 80 分)

1. (15 分) 如图所示, 一电量为 $-q$ 质量为 m 的带电粒子处在电量为 $+Q$ 固定点电荷的强电场中, 并被约束在一直线 AB 上运动, $+Q$ 到 AB 的距离为 a , 由于 $+Q$ 产生的电场很强, $-q$ 只能在平衡位置 O 附近振动, 即 a 远大于粒子的运动范围, 设平衡位置 O 为能量参考点, 试求体系可能的低能态能级。



2. (25 分) 自旋 $s = \frac{1}{2}$, 并具有自旋磁矩 $\hat{M} = \mu_0 \hat{S}$ 的粒子处于沿 x 方向的均匀磁场 B 中。

已知 $t=0$ 时, 粒子的 $s_z = \frac{\hbar}{2}$, 求在以后任意时刻发现粒子具有 $s_y = \pm \frac{\hbar}{2}$ 的几率。

3. (25 分) 一个取向用角坐标 θ 和 φ 确定的转子作受阻转动, 用下述哈密顿描述:

$\hat{H} = A\hat{L}^2 + B\hbar^2 \cos(2\varphi)$, 式中 A 和 B 均为常数, 且 $A \gg B$, \hat{L}^2 是角动量平方算符。试用一级微扰论计算系统的 p 能级 ($l=1$) 的分裂, 并算出微扰后的零级近似波函数。

[提示: 必要时可使用公式 $\varphi_1 = Y_{11}(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi}$,

$$\varphi_2 = Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad \varphi_3 = Y_{1,-1}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\varphi}]$$

4. (15 分) 以 $\psi = e^{-\alpha x^2}$ 为变分函数, 式中 α 为变分参数, 试用变分法求一维谐振子的基态能量和波函数。

[提示: 可能用到的公式 $\int_0^\infty x^{2n} \exp[-\alpha x^2] dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{a^{2n+1}}}$]