中 山 大 学

二〇一五年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：668

科目名称：数学分析

考试时间： 12 月 28 日上午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不计分!答题要写清题号，不必抄题。

一.解答下面各题(本题共 56 分.每小题 8 分)

1.求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

2.求极限: $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+2014}{x+2015})^{x}$.

3.求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{n^4+2}}+\dfrac{2}{\sqrt{n^4+3}}+\cdots+\dfrac{n-1}{\sqrt{n^4+n}})$.

4.求不定积分 $\int\dfrac{dx}{\sin 2x+2\sin x}$.

5.求由 $y=\arcsin x$，$x=1$，$y=0$ 围成的曲线绕 x 轴旋转所产生的旋转体的体积.

6.求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n$ 的收敛半径和收敛区间.

7.求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的和.

二. (8 分)设 $\{a_n\}$ 为单调递减趋于零的数列,求证: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ 收敛.

三.(10 分)设 $f(x)$ 在 R 上一致连续且有界，求证: $f_n(x)=\int_0^1 f(x+t)\dfrac{ne^{-nt}}{1-e^{-n}}dt,\quad x\in R$,在 R 上一致收敛于 $f(x)$.

四. （10 分）考虑 $\sum\dfrac{1}{n(\ln n)^x}, x>1$.

证明(i) $\sum\dfrac{1}{n(\ln n)^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上连续.

(ii) $\sum\dfrac{1}{n(\ln n)^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上不一致收敛.

五. （10 分）证明:如果 $f(x),g(x)$ 都在区间 I 上一致连续且有界,则 $f(x)\cdot g(x)$ 也在区间 I 上一致连续. 如果 $f(x),g(x)$ 都在区间 I 上一致连续,是否有 $f(x)\cdot g(x)$ 在区间 I 上一致连续?试说明理由.

六. （10 分）设 $f(x)$ 满足条件 $f(0)=0$ 且 $f''(0)$ 存在,证明:函数 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, x\neq 0\\ f'(0), x=0\end{cases}$ 的导函数在 $x=0$ 处连续.

七.(10 分) 设函数 $f(t), g(t)$ 定义于 $[0,+\infty)$, $f(t)>0, g(t)>0$ 且存在常数 C_0, C_1 有 $\int_0^t g(s)ds \le C_0$，

同时有 $f(t)\le C_1(2+\int_0^t g(s)f(s)ds)\ln(2+\int_0^t g(s)f(s)ds)$.

证明存在常数 $M>0$, 使得 $f(x)\le M$, $t\in[0,+\infty)$.

八.（6 分）是否存在函数 $f(x,y,z)$，其在原点 $(0,0,0)$ 的六个累次极限均存在但互异？给出证明或反例说明.

九.（10 分）计算 $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \max(x,y,z)dxdydz$.

十.(10 分)证明: 若 $f(x,y)$ 分别对 x 和 y 是连续的, 并且对其中一个单调, 则 $f(x,y)$ 二元连续. 若无单调性, 结论是否仍成立?(证明或举反例)

十一.(10 分) 设

$$P(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^x(x\sin y-y\cos y)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}, R(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$Q(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^x(x\cos y+y\sin y)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases},$$

(1) 讨论函数 $P(x,y)$ 和 $P(x,y)+R(x,y)$ 在原点的连续性;

(2) 计算 $I=\int_\Gamma Pdx+Qdy$，其中 Γ 为包围原点的一条简单闭曲线(正向).