

文章编号: 1000-4750(2015)09-0027-07

基于欧拉插值的最小二乘混合配点法 在弹性力学平面问题中的应用

王志芬, 李春光, 刘 丰, 郑 宏

(中国科学院武汉岩土力学研究所岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北 武汉 430071)

摘 要: 由于常规配点型无网格法存在求解不稳定、精度差和求解高阶导数等问题, 提出了基于欧拉插值的最小二乘混合配点法。该方法同时以位移和应变作为未知量, 通过欧拉插值将未知变量的导数表达出来, 同时在插值中引入高斯权函数, 并代入微分方程, 从而形成以位移和应变为未知数的超定方程组, 然后形成最小二乘意义下的法方程, 法方程和相应的位移边界条件、应力边界条件一起形成定解体系。该方法不需要域积分, 是一种真正的无网格法。一些典型的弹性力学平面问题表明本文方法具有良好的精度。

关键词: 无网格法; 配点法; 欧拉插值; 混合法; 高斯权函数

中图分类号: O343.1 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2014.01.0063

APPLICATION OF THE EULER INTERPOLATION-BASED LEAST SQUARE MIXED COLLOCATION METHOD IN ELASTIC PLANE PROBLEMS

WANG Zhi-fen, LI Chun-guang, LIU Feng, ZHENG Hong

(State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics,

Chinese Academy of Sciences, Wuhan, Hubei 430071, China)

Abstract: Conventional collocation meshless methods suffer from instability, poor accuracy and high-order derivation problems in the solution processes. The least square mixed collocation method based on the Euler interpolation is proposed in this study to overcome the above problems. Both the displacement and the strain are unknowns, the derivatives of which are expressed by using the Euler interpolation. The Gaussian weight function is introduced, resulting in over-determined systems. The over-determined systems are to be solved subjected to boundary conditions in terms of stress and displacement. This proposed method does not require domain integration, which is essentially truly meshless. Typical examples of plane elastic problems are used to demonstrate the high accuracy of the method.

Key words: meshless method; collocation method; Euler interpolation; mixed method; Gaussian weight function

无网格法^[1]是近十年来发展起来的一种数值方法, 由于它只需要节点信息, 不需要网格信息, 这使得前处理变得非常的容易; 其次, 无网格法可以很容易地从二维问题推广到三维问题, 甚至物理学中的更高维空间中的问题; 由于无网格法的近似函

数仅依赖于节点, 减少了有限元中因网格畸变带来的困难^[2]。虽然它起步较晚, 但已经成为国内外研究的热点, 被认为是一种很有潜力的数值分析方法。

各种无网格法之间的主要区别在于形函数构

收稿日期: 2014-01-17; 修改日期: 2014-05-12

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973)项目(2011CB013505)

通讯作者: 王志芬(1988-), 女, 河北人, 硕士生, 主要从事计算岩土力学方面的研究工作(E-mail: zhifenwang@163.com).

作者简介: 李春光(1973-), 男, 河南人, 副研究员, 博士, 主要从事计算岩土力学方面的研究工作(E-mail: cgli@whrsm.ac.cn);

刘 丰(1987-), 男, 湖北人, 博士生, 主要从事计算岩土力学方面的研究工作(E-mail: liuf_hb@sina.com);

郑 宏(1964-), 男, 湖北人, 研究员, 博士, 主要从事计算岩土力学方面的研究工作(E-mail: hzheng@ctgu.edu.cn).

造和离散原理的不同,目前已提出约有几十种无网格法,影响较大的有无网格伽辽金法(EFGM)^[3-4],光滑质点流体动力学方法(SPH)^[5],扩散单元法(DEM)^[6-7],再生核粒子法(RKPM)^[8],Hp云团法(Hp-clouds)^[9]和局部伽辽金无网格法(MLPG)^[10-11]等。

上述方法中,目前应用较为广泛的是无网格伽辽金法^[3],它具有精度高、稳定性好的优点,但由于它需要引入积分背景网格,因此计算量较大。而配点法^[12-13]不需要积分,避免了背景网格,因此是一种真正的无网格法。但是这种方法目前还存在稳定性和收敛速度问题,还需要进一步完善。关于无网格的详细理论可参考文献[14]。

本文在文献[15]的关于有限点法研究的基础上,同时对应变和位移进行插值计算,并在插值过程中引入权函数形成其混合问题,从而大大提高了求解精度。为了摆脱配点法带来的稳定性问题,在域内引入了额外的辅助点,让它们在最小二乘法意义下满足方程。再结合相应的边界条件,即可形成定解方程组。

1 弹性力学平面问题

设弹性体域为 Ω ,面力边界为 Γ_1 ,位移边界为 Γ_u ,弹性力学平面问题的微分方程为:

$$\sigma_{ij,j}(x) + \bar{f}_i(x) = 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 中 } i, j = 1, 2 \quad (1)$$

$$\sigma_{ij}(x)n_j = \bar{t}_i(x), \quad \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上 } i, j = 1, 2 \quad (2)$$

$$u_i(x) = \bar{u}_i(x), \quad \text{在 } \Gamma_u \text{ 上 } i = 1, 2 \quad (3)$$

2 最小二乘配点法

张雄等^[2]在配点法的基础上,为了提高求解的精度和稳定性,在域内引入了辅助点,要求在域内的节点和辅助点上满足平衡方程,此时由于方程数大于未知数个数,需要用最小二乘方法求解,因此称为最小二乘配点无网格法,原理如下:

令域内节点和辅助点满足平衡方程,再加上相应的力边界条件和位移边界条件,可得:

$$\mathbf{K}_{11}\mathbf{u}_1 + \mathbf{K}_{12}\mathbf{u}_2 = \mathbf{P}_1 \quad (4)$$

$$\mathbf{K}_{21}\mathbf{u}_1 + \mathbf{K}_{22}\mathbf{u}_2 = \mathbf{P}_2 \quad (5)$$

式中: \mathbf{u}_1 为由边界节点组成的向量; \mathbf{u}_2 为域内节点组成的向量; \mathbf{K}_{11} 、 \mathbf{K}_{21} 为由边界条件得到的节点系数矩阵;可由式(2)、式(3)直接得到; \mathbf{K}_{12} 、 \mathbf{K}_{22} 为由域内节点平衡方程得到的节点刚度矩阵,可由式(1)得到; \mathbf{P}_1 为由边界节点已知的位移值和面力值组成的向量矩阵; \mathbf{P}_2 为由域内节点已知的体力值组

成的向量矩阵。

式(4)和式(5)分别对应于边界条件和平衡方程。由式(4)可解得:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{K}_{11}^{-1}(\mathbf{P}_1 - \mathbf{K}_{12}\mathbf{u}_2) \quad (6)$$

将式(6)代入式(5)中,可得:

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{u}_2 = \hat{\mathbf{P}} \quad (7)$$

这里:

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{21}\mathbf{K}_{11}^{-1}\mathbf{K}_{12}, \quad \hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}_2 - \mathbf{K}_{21}\mathbf{K}_{11}^{-1}\mathbf{P}_1$$

容易求得式(7)在最小二乘意义下的解为:

$$\mathbf{u}_2 = (\hat{\mathbf{K}}^T \hat{\mathbf{K}})^{-1} \hat{\mathbf{K}}^T \hat{\mathbf{P}} \quad (8)$$

需要注意的是,由于该方法用到了位移的二阶导数,因此计算复杂,也导致精度有一定程度的降低。

3 欧拉插值法

根据泰勒公式,对于函数 f ,若在点 x_0 存在直至 n 阶导数,则有:

$$f(x) = T_n(x) + o((x - x_0)^n)$$

即

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \quad (9)$$

对于二元函数 $f^i(x, y)$,它的泰勒级数为:

$$f^i = f + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Delta y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Delta x^3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \Delta x^2 \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \Delta x \Delta y^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \Delta y^3 + \dots \quad (10)$$

如记:

$$\mathbf{d}_i = \left[1 \quad \Delta x_i \quad \Delta y_i \quad \dots \quad \frac{1}{2} \Delta x_i^2 \Delta y_i \quad \frac{1}{2} \Delta x_i \Delta y_i^2 \quad \frac{1}{6} \Delta y_i^3 \right] \quad (11)$$

$$\partial \mathbf{F}_0 = \left[f \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \dots \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right] \quad (12)$$

则 $f^i = \mathbf{d}_i \partial \mathbf{F}_0 + R$ 。

当在点 (x_0, y_0) 附近取 m 个点进行展开时,略去高阶无穷小量,则可以建立如下以 $\partial \mathbf{F}_0$ 为未知变量的方程组:

$$\mathbf{F} = \mathbf{D} \partial \mathbf{F}_0 \quad (13)$$

这里:

$$\mathbf{F} = [f^1 \quad f^2 \quad \dots \quad f^m]^T \quad (14)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \dots \\ \mathbf{d}_m \end{bmatrix} \quad (15)$$

当 $m=n$ 且 \mathbf{D} 可逆时, 可利用 f^i 表达 $\delta\mathbf{F}_0$ 。

当 \mathbf{D} 不可逆时, 可以选择 $m>n$, 这时式(13)为超定方程组, 从而可以利用下面的法方程得到其投影解:

$$\mathbf{D}^T \mathbf{F} = \mathbf{D}^T \mathbf{D} \delta\mathbf{F}_0 \quad (16)$$

从而求得:

$$\delta\mathbf{F}_0 = (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{F} \quad (17)$$

事实上, $\mathbf{D}^T \mathbf{D}$ 也有可能是不可逆的, 这时总可以选取合适的展开点或增加展开点的个数, 使得 $\mathbf{D}^T \mathbf{D}$ 可逆。具体方法可参见文献[15]。

式(17)中的前三行可以写为:

$$f_0 = \varphi_1^i f_i \quad (18)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = \varphi_2^i f_i \quad (19)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial y} = \varphi_3^i f_i \quad (20)$$

其中, φ_j 为矩阵 $(\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^T$ 中的第 j 行, i 为某点邻近点的点数。

这样我们就可以以邻近点的未知量来表达一点的导数, 因为这种方法和欧拉法类似, 因此可以称之为欧拉插值法。

4 最小二乘混合配点法

根据插值理论, 插值中所需的导数越高, 则精度越低。为了提高求解精度, 可以采取增加未知变量, 从而降低求导阶次的方法。对于弹性力学问题, 可以把应变和位移都作为独立变量, 进行独立插值, 从而在控制方程中仅需要一阶导数, 这种把应变和位移都作为独立未知变量的问题即为混合问题。

以 $u, v, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 作为独立变量, 对于平面应力问题, 原有的平衡方程可写为:

$$\frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \nu \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial y} \\ \nu \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{f}_x \\ -\bar{f}_y \end{bmatrix} \quad (21)$$

应变与位移的关系为:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \varepsilon_x \end{bmatrix} = 0 \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} = 0 \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = 0 \quad (24)$$

因此, 对于平面应力问题, 以 $u, v, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 表达的控制方程为:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} & \mu \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{E\nu}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial y} & \mu \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{f}_x \\ -\bar{f}_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

其中, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ 。

应力边界条件为:

$$\frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \mathbf{l} & \nu \mathbf{l} & \mathbf{m} \frac{1-\nu}{2} \\ \nu \mathbf{m} & \mathbf{m} & \mathbf{l} \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \end{bmatrix} \quad (26)$$

其中, \mathbf{l}, \mathbf{m} 为方向向量。

位移边界条件为:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix} \quad (27)$$

把 $u, v, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 采用式(18)~式(20)插值后, 代入式(25), 合并所有的节点, 可得:

$$\mathbf{H}\mathbf{U} = \bar{\mathbf{f}} \quad (28)$$

其中:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{H}^T(x_1) \quad \mathbf{H}^T(x_2) \quad \dots \quad \mathbf{H}^T(x_{N+N_n})]^T;$$

$$\mathbf{U} = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_{N_n}]^T;$$

$$\bar{\mathbf{f}} = [\bar{f}_1 \quad \bar{f}_2 \quad \cdots \quad \bar{f}_{N+N_a}]^T.$$

上述表达式中的元素可具体写为:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}_i) = [\mathbf{H}_1(\mathbf{x}_i) \quad \mathbf{H}_2(\mathbf{x}_i) \quad \cdots \quad \mathbf{H}_N(\mathbf{x}_i)],$$

$$\mathbf{H}_j(\mathbf{x}_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{E}{1-\nu^2} \varphi_2^j & \frac{E\nu}{1-\nu^2} \varphi_2^j & \mu \varphi_3^j \\ 0 & 0 & \frac{E\nu}{1-\nu^2} \varphi_3^j & \frac{E}{1-\nu^2} \varphi_3^j & \mu \varphi_2^j \\ \varphi_2^j & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_3^j & 0 & -1 & 0 \\ \varphi_3^j & \varphi_2^j & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_j = [u_j \quad v_j \quad \varepsilon_{xj} \quad \varepsilon_{yj} \quad \gamma_{xyj}]^T,$$

$$\bar{\mathbf{f}}_i = [-\bar{f}_x(\mathbf{x}_i) \quad -\bar{f}_y(\mathbf{x}_i) \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T.$$

N_Ω 为域内和边界上未知节点的个数; N 为域内的节点个数; N_a 为辅助点个数。

同理, 代入应力边界条件式(26), 得:

$$\mathbf{Q}\mathbf{U} = \bar{\mathbf{t}} \quad (29)$$

式中:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}^T(\mathbf{x}_1) \quad \mathbf{Q}^T(\mathbf{x}_2) \quad \cdots \quad \mathbf{Q}^T(\mathbf{x}_{N_i})]^T;$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}_i) = [\mathbf{Q}_1(\mathbf{x}_i) \quad \mathbf{Q}_2(\mathbf{x}_i) \quad \cdots \quad \mathbf{Q}_{N_\Omega}(\mathbf{x}_i)];$$

$$\mathbf{Q}_j(\mathbf{x}_i) = \frac{E\varphi_l^j}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & l & \nu l & m \frac{1-\nu}{2} \\ 0 & 0 & \nu m & m & l \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix};$$

$$\bar{\mathbf{t}} = [\bar{t}_1^T \quad \bar{t}_2^T \quad \cdots \quad \bar{t}_{N_i}^T]^T;$$

$$\bar{\mathbf{t}} = [\bar{t}_x \quad \bar{t}_y]^T.$$

式中, N_i 为位移边界上节点的个数。

代入位移边界条件式(27), 得:

$$\mathbf{N}\mathbf{U} = \bar{\mathbf{u}} \quad (30)$$

式中:

$$\mathbf{N}_l = \varphi_l^j \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\mathbf{u}} = [\bar{u}_1^T \quad \bar{u}_2^T \quad \cdots \quad \bar{u}_{N_u}^T]^T;$$

$$\bar{\mathbf{u}}_i = [\bar{u} \quad \bar{v}]^T.$$

式中, N_u 为应力边界上节点的个数。

由于式(28)中方程个数大于未知数个数, 对其采用最小二乘方法, 得到:

$$\mathbf{H}^T \mathbf{H}\mathbf{U} = \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{f}} \quad (31)$$

将式(29)~式(31)写成矩阵形式为:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{P} \quad (32)$$

其中:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T \mathbf{H} & & \\ & \mathbf{Q} & \\ & & \mathbf{N} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{f}} \\ \bar{\mathbf{t}} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{bmatrix}.$$

从而形成以节点处 u 、 v 、 ε_x 、 ε_y 、 γ_{xy} 为未知数的代数方程组, 该方程组的解精确满足给定的位移及应力边界条件。

5 加权处理

为了提高精度, 对式(13)乘以权函数 w 后, 得到:

$$\partial \mathbf{F}_0 = (\mathbf{D}^T \mathbf{W}\mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{W}\mathbf{F} \quad (33)$$

再代入式(32), 则可以进一步提高求解精度。

其中 \mathbf{W} 是以 w 为对角元素的方阵。

本文权函数取如下的高斯函数:

$$w(r) = \begin{cases} \frac{e^{-r^2\beta^2} - e^{-\beta^2}}{1 - e^{-\beta^2}}, & r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases} \quad (34)$$

其中, $r = \sqrt{(x-x_l)^2 + (y-y_l)^2} / d_{ml}$, d_{ml} 为影响域半径, 参考文献[2], 本文算例中 β 均取 3。

6 数值算例

本文将以无限大带圆孔方板、悬臂梁和均质边坡为例, 应用该方法进行数值计算和具体分析。

6.1 无限大带圆孔方板

具有半径为 $a=1\text{m}$ 的中心圆孔的方板, 在无穷远处承受水平均匀拉力 $t=1\text{Pa}$ 的作用。材料参数取为 $E=10^{10}\text{Pa}$, $\nu=0.3$ 。按平面应变分析时, 其应力解析解^[14]为:

$$\sigma_x(x, y) = 1 - \frac{a^2}{r^2} \left\{ \frac{3}{2} \cos 2\theta + \cos 4\theta \right\} + \frac{3a^4}{2r^4} \cos 4\theta \quad (35)$$

$$\sigma_y(x, y) = -\frac{a^2}{r^2} \left\{ \frac{1}{2} \cos 2\theta - \cos 4\theta \right\} - \frac{3a^4}{2r^4} \cos 4\theta \quad (36)$$

$$\sigma_{xy}(x, y) = -\frac{a^2}{r^2} \left\{ \frac{1}{2} \sin 2\theta + \sin 4\theta \right\} + \frac{3a^4}{2r^4} \sin 4\theta \quad (37)$$

位移的解析解为:

$$u_r = \frac{1}{4\mu} \left\{ r \left[\frac{\kappa-1}{2} + \cos 2\theta \right] + \frac{a^2}{r} \left[1 + (1+\kappa) \cos 2\theta \right] - \frac{a^4}{r^3} \cos 2\theta \right\} \quad (38)$$

$$u_\theta = \frac{1}{4\mu} \left[(1-\kappa) \frac{a^2}{r} - r - \frac{a^4}{r^3} \right] \sin 2\theta \quad (39)$$

式中： $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ； $\kappa = \begin{cases} 3-4\nu & \text{平面应变} \\ 3-\nu & \text{平面应力} \end{cases}$ ； r 、 θ

是相对于原点在圆孔中心的坐标系的极坐标。

由于结构和边界条件具有 1/4 对称性，因此取 1/4 模型作为研究对象，计算区域尺寸为 5 m×5 m，如图 1 所示。对其区域进行节点离散，采用 577 个节点和 1062 个辅助点进行计算。节点分布如图 2 所示。采用 ABAQUS 有限元对比分析时，与无网格具有相同的节点，选用 CPS3 单元。

图 3 所示的是在 $x=0$ 截面上各点的正应力分布，可见，经过加权处理后，不仅解的稳定性得到了改善，并且解的精度得到了较大的提升，在 $x=0$ ， $y=3$ 处，未加权时的水平应力为 2.479 Pa，加权后的应力为 3.157 Pa，误差从 17.38%降低到 5.23%，与相同节点情况下 ABAQUS 给出的应力值 3.102 Pa 相差不大。

从 $x=0$ 截面上的竖向位移来看，如图 4 所示，本文得到的加权解不仅要远远好于未加权情况下的解，而且也大大好于 ABAQUS 给出的结果，这是由于采用混合法后，使得位移的精度得到了进一步的提高。

图 5 给出了 σ_x 的分布云图，可见得到的解具有较高的光滑性。

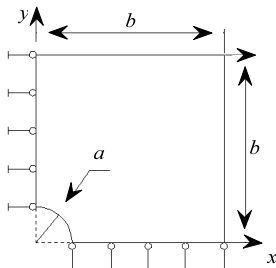


图 1 1/4 模型

Fig.1 A quarter model

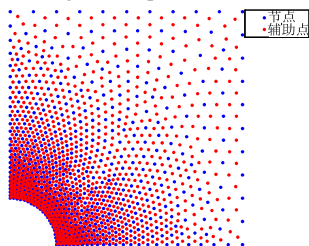


图 2 节点布置图

Fig.2 Node arrangement

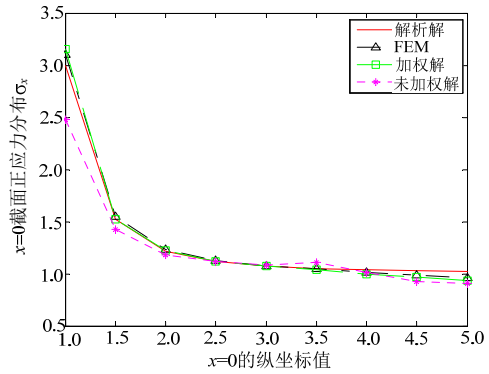


图 3 $x=0$ 截面的正应力 σ_x 分布

Fig.3 Normal stress σ_x on the plane of $x=0$

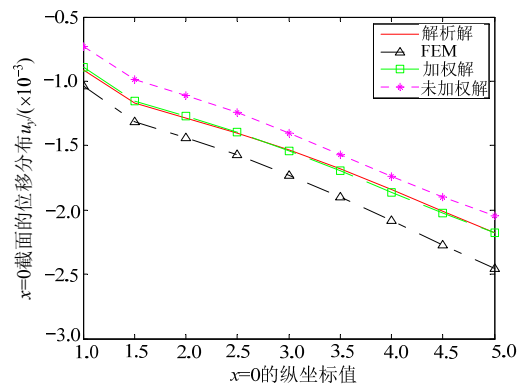


图 4 $x=0$ 截面的位移 u_y 分布

Fig.4 Displacement u_y on the plane of $x=0$

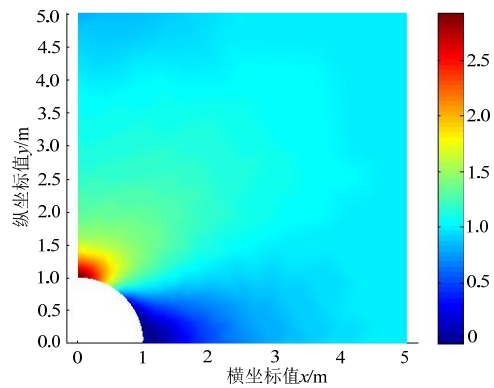


图 5 σ_x 应力云图

Fig.5 Contour plot of σ_x

6.2 悬臂梁

如图 6 所示悬臂梁，在其自由端承受一抛物线型分布的表面力。载荷(表面分布力的积分) $P=-1000$ N，长 $L=48$ m，宽 $D=12$ m，取单位厚度，材料的弹性模量 $E=30$ MPa，泊松比 $\nu=0.3$ ，不计自重。考虑平面应力情况，其应力、位移的解析解^[16]为：

$$u = -\frac{Py}{6EI} \left[(6L-3x)x + (2+\nu) \left(y^2 - \frac{D^2}{4} \right) \right] \quad (40)$$

$$v = \frac{P}{6EI} \left[3vy^2(L-x) + (4+5v)\frac{D^2x}{4} + (3L-x)x^2 \right] \quad (41)$$

$$\sigma_{xx} = -\frac{P(L-x)y}{I} \quad (42)$$

$$\sigma_{yy} = 0 \quad (43)$$

$$\tau_{xy} = \frac{P}{2I} \left[\frac{D^2}{4} - y^2 \right] \quad (44)$$

其中, I 为惯性矩, 对于单位厚度的矩形截面梁有 $I = D^3 / 12$, 采用 52 个规则的节点和 36 个辅助点离散模型, 节点布置如图 7 所示。有限元解由 ABAQUS 求解得到, 采用 CPE4 单元。

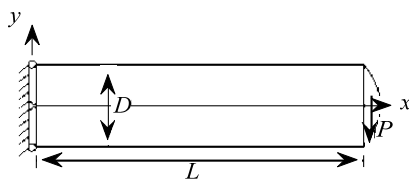


图 6 悬臂梁

Fig.6 Cantilever beam

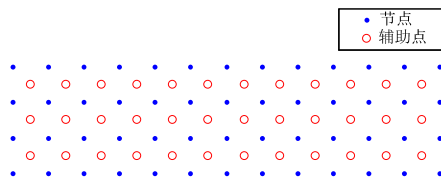


图 7 节点布置图

Fig.7 Node arrangement

中心截面的竖向位移如图 8 所示, 梁端部的解析解为 0.00890, 本文得到的解为 0.00881, ABAQUS 的解为 0.00876, 本文方法的误差 1.01% 要小于 ABAQUS 的误差 1.57%。从 $x=L/2$ 的截面上的剪应力来看, 如图 9 所示, 本文获得了几乎精确的解, 而 ABAQUS 的误差特别大, 这是由于 CPE4 单元是协调元造成的。从图 10 的竖向位移云图看, 解具有很好的规律性。

图 11 给出了悬臂梁上表面正应力 σ_{xx} 的分布, 由计算结果可看出, 本文方法的计算精度远高于文献[17]中的直接配点法, 而与文献[17]中的 MWLS 的计算精度相当, 但 MWLS 采用 159 个节点, 而本文方法仅用 52 个节点, MWLS 的节点个数是本文方法的 3 倍多。需要指出的是, 本文的结果只是在位移边界附近误差较大, 而位移边界条件的施加对无网格来讲, 本身就是比较头疼的问题, 如将来有合适的解决方案, 本文方法的精度会得到显著提高。

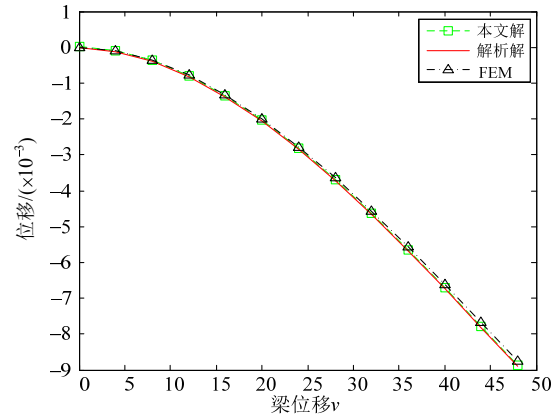


图 8 沿 $y=0$ 截面的位移 v 分布

Fig.8 Displacement v on the plane of $y=0$

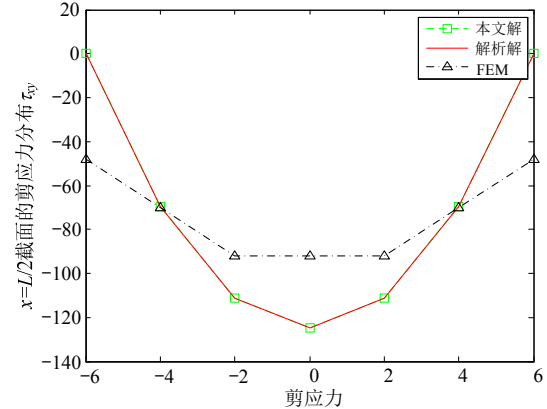


图 9 $x=L/2$ 截面的剪应力分布

Fig.9 Shear stress on the plane of $x=L/2$

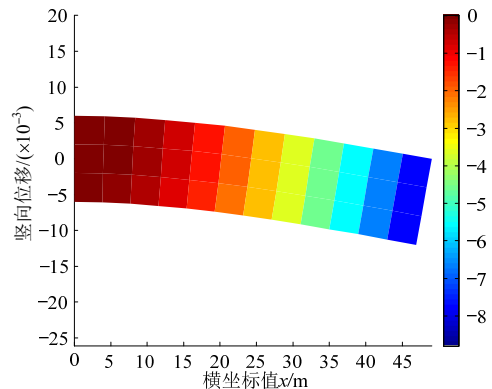


图 10 竖向位移云图

Fig.10 Contour plot of the vertical displacement

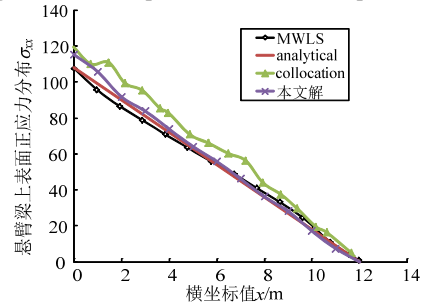


图 11 悬臂梁上表面正应力 σ_{xx} 分布

Fig.11 Stress σ_{xx} at points on the upper surface of the beam

6.3 均质边坡

一均质边坡^[18], 边坡材料弹性模量 $E=80 \text{ MPa}$, 重度为 $\gamma=19.62 \text{ kN/m}^3$, 泊松比 $\nu=0.43$ 。边界条件为两侧为法向约束, 底部为固定约束。该边坡仅受重力作用, 边坡尺寸如图 12 所示, 节点布置见图 13。图 14 及图 15 给出了边坡竖向位移云图及应力云图, 可见应力的光滑性要比位移的光滑性差, 尽管如此, 它要比有限元得到的间断应力场好得多, 如施加光滑处理, 会得到更好的应力场。

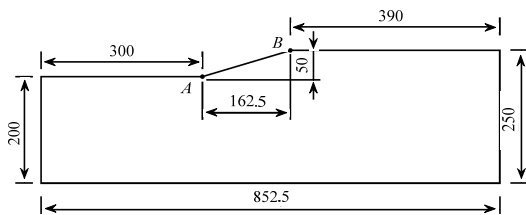


图 12 边坡模型图 /cm

Fig.12 Model of slope

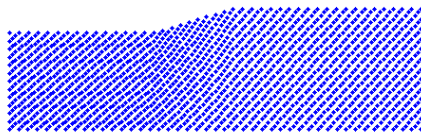


图 13 节点布置图

Fig.13 Node arrangement

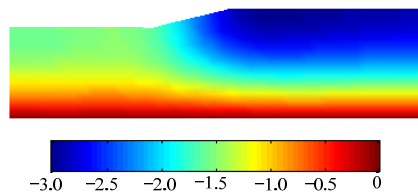


图 14 竖向位移云图

Fig.14 Contour plot of u_y

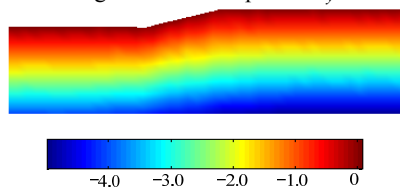


图 15 σ_y 应力云图

Fig.15 Contour plot of σ_y

7 结论

本文将欧拉插值引入求解弹性力学问题的最小二乘配点无网格法, 通过以下技术措施:

(1) 同时将位移和应变作为未知量, 形成最小二乘混合配点法;

(2) 在欧拉插值中引入高斯权函数。

从而大大提高了求解精度。

由于这种方法不需要域积分, 所以求解效率

较高。

算例表明, 该方法具有和有限元相当的精度, 在某些问题上甚至高于有限元的精度。

参考文献:

- [1] Atluri S N, Shen S. The meshless method [J]. Technology Science Press, Forsyth, 2002: 1-300.
- [2] 张雄, 刘岩. 无网格法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 1-227.
Zhang Xiong, Liu Yan. The meshless method [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004: 1-227. (in Chinese)
- [3] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin methods [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, 37(2): 229-256.
- [4] 庞作会, 葛修润, 郑宏, 等. 一种新的数值方法-无网格伽辽金法(EFGM) [J]. 计算力学学报, 1999, 16(3): 320-329.
Pang Zuohui, Ge Xiurun, Zheng Hong, et al. A new numerical method - EFGM meshless (EFGM) [J]. Journal of Computational Mechanics, 1999, 16(3): 320-329. (in Chinese)
- [5] Cummins S J, Rudman M. An SPH projection method [J]. Journal of computational physics, 1999, 152(2): 584-607.
- [6] Nayroles B, Tuzot G, Villon P. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements [J]. Computational Mechanics, 1992, 10(5): 307-318.
- [7] 金峰, 方修君. 扩展有限元法及与其它数值方法的联系[J]. 工程力学, 2008, 25(增刊 I): 1-17.
Jin Feng, Fang Xiujun. Extended contact with the finite element method and other numerical methods [J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(Suppl I): 1-17. (in Chinese)
- [8] Wang X, Liu W K. Extended immersed boundary method using FEM and RKPM [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004, 193(12): 1305-1321.
- [9] Duarte C A, Oden J T. Hp clouds-an hp meshless method [J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 1996, 12(6): 673-706.
- [10] Atluri S N, Zhu T. A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics [J]. Computational Mechanics, 1998, 22(2): 117-127.
- [11] 杨建军, 郑健龙. 无网格法求解轴对称弹性力学问题 [J]. 工程力学, 2012, 29(8): 8-13.
Yang Jianjun, Zheng Jianlong. Meshless method to solve the axisymmetric elasticity problem [J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(8): 8-13. (in Chinese)

(参考文献[12]-[18]转第 48 页)

- 进展, 2012, 42(6): 771—784.
- Ge Jianli, Yang Guolai, Lü Jia. Advances in isogeometric analysis research [J]. *Advances in Mechanics*, 2012, 42(6): 771—784. (in Chinese)
- [3] 许华强, 徐岗, 胡维华, 等. 面向等几何分析的 B 样条参数体生成方法[J]. *图学学报*, 2013, 34(3): 43—48.
Xu Huaqiang, Xu Gang, Hu Weihua, et al. Generation method of B-splines parametric volumes for isogeometric analysis [J]. *Journal of Graphics*, 2013, 34(3): 43—48. (in Chinese)
- [4] 林允朋. 等几何分析中的 NURBS 体造型及算法[D]. 成都: 电子科技大学, 2012.
Lin Yunpeng. NURBS-based modeling and algorithm in isogeometric analysis [D]. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2012. (in Chinese)
- [5] Wang Dongdong, Liu Wei, Zhang Hanjie. Novel higher order mass matrices for isogeometric structural vibration analysis [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2013, 260(1/2/3/4): 92—108.
- [6] Lu J, Zhou X L. Cylindrical element: Isogeometric model of continuum rod [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200(1/2/3/4): 233—241.
- [7] 陈涛, 莫蓉, 张欣. 固体介质瞬态传热问题的等几何分析[J]. *计算机集成制造系统*, 2011, 17(9): 1988—1996.
Chen Tao, Mo Rong, Zhang Xin. Isogeometric analysis for transient heat conduction of solid medium [J]. *Computer Integrated Manufacturing Systems*, 2011, 17(9): 1988—1996. (in Chinese)
- [8] 张勇, 林皋, 胡志强, 等. 基于等几何分析的比例边界有限元方法[J]. *计算力学学报*, 2012, 29(3): 433—438.
Zhang Yong, Lin Gao, Hu Zhiqiang, et al. Scaled boundary finite element method based on isogeometric analysis [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2012, 29(3): 433—438. (in Chinese)
- [9] 李伟伟. 基于 B 样条及 NURBS 的等几何分析研究[D]. 长春: 吉林大学, 2013.
Li Weiwei. Isogeometric analysis based on B-spline and NURBS [D]. Changchun: Jilin University, 2013. (in Chinese)
- [10] Rosolen A, Arroyo M. Blending isogeometric analysis and local maximum entropy meshfree approximants [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2013, 264(1): 95—107.
- [11] 方少文, 袁行飞, 钱若军, 韩向科. 采用不同插值函数的流体力学有限元数值波动研究[J]. *工程力学*, 2013, 30(11): 266—271.
Fang Shaowen, Yuan Xingfei, Qian Ruojun, Han Xiangke. Numerical wave of finite element solution in fluid mechanics using different interpolation function [J]. *Engineering Mechanics*, 2013, 30(11): 266—271. (in Chinese)

(上接第 33 页)

- [12] 钱向东. 基于紧支径向基函数的配点型无网格法[J]. *河海大学学报*, 2001, 29(1): 96—98.
Qian Xiangdong. Based collocation compactly support-ed radial basis function meshless method [J]. Hohai University, 2001, 29(1): 96—98. (in Chinese)
- [13] Zhang X, Liu X H, Song K Z, et al. Least - squares collocation meshless method [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 51(9): 1089—1100.
- [14] Liu G R. Meshfree methods: Moving beyond the finite element method [M]. In the United States, CRC Press, 2010: 2—40.
- [15] 吕桂霞, 沈隆钧, 沈智军. 有限点方法研究[J]. *计算物理*, 2008, 25(5): 505—524.
Lü Guixia, Shen Longjun, Shen Zhijun. Finite point method research [J]. *Computational Physics*, 2008, 25(5): 505—524. (in Chinese)
- [16] Timoshenko S P, Goodier J N. *Theory of elasticity* [M]. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1987: 37—888.
- [17] 张雄, 胡炜, 潘小飞, 等. 加权最小二乘无网格法[J]. *力学学报*, 2003, 35(4): 425—431.
Zhang Xiong, Hu Wei, Pan Xiaofei, et al. The weighted least squares meshless method [J]. *Mechanics*, 2003, 35(4): 425—431. (in Chinese)
- [18] Zheng H, Liu D F, Li C G. Slope stability analysis based on elasto-plastic finite element method [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, 64(14): 1871—1888.