

文章编号: 1000-4750(2015)10-0233-06

# 基于镜像激励的结构动力学系统的设计点激励

任丽梅, 刘建民, 肖玉柱

(长安大学理学院, 陕西, 西安 710064)

**摘 要:** 在随机振动及结构可靠性研究中, 动力学系统的设计点激励有着不可替代的作用, 但非线性动力学系统设计点激励的计算方法仍是当今研究者的焦点之一。该文利用振子自由振动响应的镜像激励, 给出了高斯白噪声激励下非线性系统的设计点激励, 并将其应用到首穿失效概率估计问题中, 与原始的蒙特卡罗模拟相比较, 两者体现了高度的一致性。为进一步说明该文方法的正确性, 针对线性系统, 利用解析方法获得设计点激励的准确值, 利用镜像方法所得近似值, 将其均应用到首穿失效概率的计算中, 数值例子显示, 两种方法所得设计点激励稍有不同, 但在计算首穿失效概率时, 展现出同样的有效性。

**关键词:** 结构动力学; 设计点激励; 镜像激励; 首穿失效概率; 自由振动响应

中图分类号: O327 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2014.03.0232

## DESIGN-POINT EXCITATION OF STRUCTURAL DYNAMIC SYSTEMS BASED ON MIRROR-IMAGE EXCITATION

REN Li-mei, LIU Jian-min, XIAO Yu-zhu

(School of Science, Chang'an University, Xi'an, Shaanxi 710064, China)

**Abstract:** For structural dynamic systems, the design-point excitation plays an important role in structural reliability assessment and random vibration. The calculation method of design-point excitation is still an important research focus today. This paper suggests a procedure to obtain the design-point excitation of non-linear systems based on mirror-image excitation of the free-vibration response. It is shown that the design-point excitation thus obtained is effective in estimating excursion probabilities in non-linear dynamic systems when compared with the Monte Carlo method. In order to further illustrate the effectiveness of the method, the paper gives a numerical example of linear dynamic systems. We obtain the design-point excitation based on both the analytical method and mirror-image excitation. It is shown that the two methods have the same effectiveness when estimating excursion probabilities.

**Key words:** structural dynamics; design-point excitation; mirror-image excitation; first passage probability; free-vibration response

在时不变结构中, 设计点是位于极限状态曲面上, 与原点距离最近的点, 它是结构可靠性研究的关键一环, 也在许多数值方法中具有重要的作用。近年来, 随机振动的许多问题均可用时不变结构理论的计算工具解决<sup>[1-3]</sup>, 此时解决问题的一个基本步骤, 即是求解设计点。为此, 需将随机激励离

散成为有限多个随机变量, 此时的设计点是一向量。在随机激励的样本轨道空间中, 设计点所处的样本轨道称为设计点激励, 相应的系统响应称为设计点响应, 这一对特殊的输入-输出对是随机振动问题中最感兴趣的样本轨道, 而且因为由设计点激励也可得设计点, 使得设计点激励本身在随机振动的

收稿日期: 2014-03-25; 修改日期: 2014-09-01

基金项目: 国家自然科学基金项目(11202035, 11402034); 长安大学中央高校基础科研基金项目(CHD2011JC019)

通讯作者: 任丽梅(1975—), 女, 陕西人, 副教授, 博士, 从事非线性动力学及随机过程研究(E-mail: renlm1014@126.com).

作者简介: 刘建民(1960—), 男, 陕西人, 教授, 硕士, 理学院院长, 从事概率论数理统计及排队论研究(E-mail: ljm1014@163.com);

肖玉柱(1980—), 男, 辽宁人, 副教授, 博士, 从事非线性动力学及随机过程研究(E-mail: yuzhuxiao@mail.nwpu.edu.cn).

研究中也成为热点之一。

在非线性动力学系统,关于设计点激励的研究始于 Drenick 在 1977 年的研究<sup>[4]</sup>,那时设计点激励被称为“关键激励”,随后在地震工程、材料工程等应用领域中,研究者<sup>[5-12]</sup>提出许多获得设计点激励的方法,其中 Drenick 与 Takewaki 利用等效线性化方法得到非线性系统的设计点激励的近似解。

在本文中,针对高斯白噪声激励的非线性系统,利用镜像方法得到设计点激励,并给出非线性系统的数值算例,演示了所得的设计点激励,及其在结构系统首穿失效问题中的应用。并且为了比较,本文针对线性系统,利用解析方法与镜像方法获得设计点激励,并将其应用到结构动力学系统首穿失效概率的计算中,数值例子显示,两种方法所得设计点激励稍有不同,但在首穿失效概率的计算中,展现出同样的有效性。

## 1 设计点激励

对于线性系统,由于可利用杜哈梅积分将系统响应表示成脉冲响应与随机激励的函数,因此本部分给出高斯白噪声激励的线性系统设计点激励的解析表达式。

根据文献[13-15],有限方差、零均值、单边谱密度为  $G_0$  的高斯白噪声激励  $f(t)$  的离散形式可表示为:

$$f(t) = \sum_{i=1}^n u_i s_i(t) = S(t)^T U, \quad 0 < t < T \quad (1)$$

其中:  $U = (u_1, \dots, u_n)^T$  是相互独立的标准正态随机向量;  $S(t) = (s_1(t), \dots, s_n(t))^T$  是与激励过程的协方差函数有关的基函数。

考虑式(1)激励的线性系统:

$$m\ddot{X}(t) + c\dot{X}(t) + rX(t) = f(t)$$

利用杜哈梅积分,系统响应为:

$$X(t) = \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad 0 < t < T, \quad (2)$$

其中,  $h(t)$  为单位脉冲响应函数,依赖于输入及系统的特性。将式(1)代入(2)中,并改变积分与求和的顺序,可得:

$$X(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^n u_i s_i(t)h(t-\tau)d\tau = \sum_{i=1}^n u_i a_i(t) = A(t)^T U \quad (3)$$

其中:  $A(t) = (a_1(t), \dots, a_n(t))^T$ , 且  $a_i(t) = \int_0^t s_i(\tau)h(t-\tau)d\tau$ 。响应过程是正态随机向量  $U$  与确定型函数  $A(t)$  的点积,而  $A(t)$  是激励的基函数  $S(t)$  与单位脉冲响应函数的卷积。考虑在  $t_k$  时刻( $0 < t_k < T$ )的首穿失效随机事件  $\{X(t_k) > b\}$ , 其中  $b$  是系统安全域边界,即引起首穿失效事件发生的随机激励  $U$  满足:  $b - A(t_k)^T U \leq 0$ 。在结构可靠性理论中,称

$$b - A(t_k)^T U = 0 \quad (4)$$

为极限状态曲面方程。

在所有引起首穿失效事件  $\{X(t_k) > b\}$  发生的高斯白噪声激励的样本轨道中,有一条是与原点的距离最近的,也是首穿失效发生的可能性最大的样本轨道,即为设计点激励。求解优化问题:

$$\min \sum_{s=1}^k (u_s)^2,$$

$$\text{s.t. } b - A(t_k)^T U = 0$$

则可得  $t_k$  时刻设计点:

$$U^*(b, t_k) = \beta(b, t_k)\alpha(t_k) = b \frac{A(t_k)}{\|A(t_k)\|^2} \quad (5)$$

其中,最小距离  $\beta(b, t_k) = \frac{b}{\|A(t_k)\|}$ 。

则  $t_k$  时刻设计点激励为:

$$f^*(t) = S(t)^T U^*(b, t_k) = b \frac{S(t)^T A(t_k)}{\|A(t_k)\|^2} \quad (6)$$

$t_k$  时刻设计点响应为:

$$X^*(t) = A(t)^T U^*(b, t_k) = b \frac{A(t)A(t_k)^T}{\|A(t_k)\|^2} \quad (7)$$

## 2 镜像激励

由于非线性动力学系统无法表示为式(2)的形式,即无法给出式(4)所示的极限状态曲面方程,因此不能利用式(5)、式(6)来求解非线性系统的设计点及设计点激励,本文考虑到设计点激励的特殊性质,从能量角度分析,可知设计点激励与振子的自由振动响应的镜像激励一致。

考虑非线性振子( $0 \leq t \leq T$ ):

$$m\ddot{X}(t) + c\dot{X}(t) + R[X(t)] = f(t) \quad (8)$$

其中:  $m$  是质量;  $c$  是阻尼系数;  $R[\cdot]$  是  $X(t)$  的函数。

令  $X_F(t)$  表示振子的自由振动响应,即是式(8)的右边设置为 0 时的解,且具有初始条件

$X_F(0)=b, \dot{X}_F(0)=0$ ，并且对于任给  $\tau$ ，令  $X_1(t)=X_F(\tau-t)$ ，称  $X_1(t)$  为自由振动的镜像响应，则满足  $X_1(0)=X_F(\tau)$ ， $\dot{X}_1(0)=-\dot{X}_F(\tau)$ ， $X_1(\tau)=b, \dot{X}_1(\tau)=0$ 。设产生镜像响应  $X_1(t)$  的激励为  $f_1(t)$ ，称  $f_1(t)$  为自由振动的镜像激励，且两者满足：

$$f_1(t) = m\ddot{X}_1(t) + c\dot{X}_1(t) + R[X(t)] = m\ddot{X}_F(\tau-t) - c\dot{X}_F(\tau-t) + R[X_F(\tau-t)] - 2c\dot{X}_F(\tau-t) \quad (9)$$

最后一个等号的成立利用了：

$$m\ddot{X}_F(t) + c\dot{X}_F(t) + R[X_F(t)] = 0 \quad (10)$$

镜像激励即为设计点激励：

$$f_1^*(t) = f_1(t) \quad (11)$$

则可得设计点：

$$U^* = f_1^*(t) / \sqrt{2\pi G_0 / \Delta t} \quad (12)$$

现从能量的角度说明式(11)的合理性，令  $E_F(t)$  表示系统在自由振动运动时系统动能与势能的和。在时间区间  $0 \leq t \leq \tau$  内，在自由振动时能量的耗散表示为： $E_F(0) - E_F(\tau) = \int_0^\tau c\dot{x}_F^2(t)dt$ ，假设系统遭受到镜像激励，并假设  $E_1(t)$  表示此时的总能量，则可根据镜像激励的定义，有  $E_1(0) = E_F(\tau)$ ， $E_1(\tau) = E_F(0)$ ，即在自由振动运动中能量消耗和镜像激励的能量消耗数量相同。另一方面，由于  $\dot{X}_1(t) = -\dot{X}_F(\tau-t)$ ，镜像激励做的功可为：

$$W = \int_0^\tau 2c\dot{x}_1^2(t)dt$$

即  $W = 2(E_F(0) - E_F(\tau))$ ，表示在镜像激励下，系统消耗了输入能量的一半，而另一半能量系统则储存起来，用于在时刻  $\tau$  系统达到目标能量  $E_1(\tau) = E_F(0)$ 。

假设时刻  $\tau$  振子(8)的极限状态函数为： $g(f, \tau, b) = X(f, \tau) - b = 0$ ，在高斯白噪声场合，由式(5)与式(6)可知设计点激励与设计点是成比例的，求解设计点  $u^*(\tau) = \arg \min \{\|u(\tau)\|^2 : g(u, \tau, b) = 0\}$ ，即求解  $f^*(\tau, b) = \arg \min \{\|f\|^2 : g(f, \tau, b) = 0\}$ ，其中， $\|f\|^2$  表示输入能量，因此现在问题转化为：需要找到具有最小能量的输入激励  $f(t)$ ，使得在时刻  $\tau$  系统响应到达安全域边界  $b$ 。并且在此时系统响应的速率为零，即  $\dot{X}(f^*, \tau) = 0$ ，否则将有一部分输入能量转化为  $\tau$  时刻的系统动能，这是不需要的。

### 3 数值算例

考虑式(8)的振子，其中： $m=1000 \text{ kg}$ ， $R[X(t)] = k[X(t) + \gamma X(t)^3]$ ， $k=4000\pi^2 \text{ N/m}$ ， $\gamma=1 \text{ m}^{-2}$ ， $c=200\pi \text{ N}\cdot\text{s/m}$ ， $T=12 \text{ s}$ ，单边谱密度为  $G_0=10^6 \text{ N}^2\cdot\text{s/rad}$ ， $b=1.0676$ ，且  $\Delta t = \frac{T}{n}$ ， $t_k = k\Delta t$ ， $0=t_0 \leq t_1 \dots \leq t_n = T$ ，取  $\Delta t=0.01$ ，即  $n=1200$ ，利用镜像激励可得  $t_k$  时刻的设计点激励，据式(12)与式(7)可得设计点、设计点响应。图1给出时刻  $t_k=10 \text{ s}$  时的设计点激励与响应。事实上，所有离散时刻的设计点激励构成一个1200阶的下三角矩阵，在  $t_k$  时刻的设计点激励满足在  $t > t_k$  后为零。从图1可看出，在设计点激励下系统响应在时刻  $t_k$  首次到达安全域边界  $b$ 。

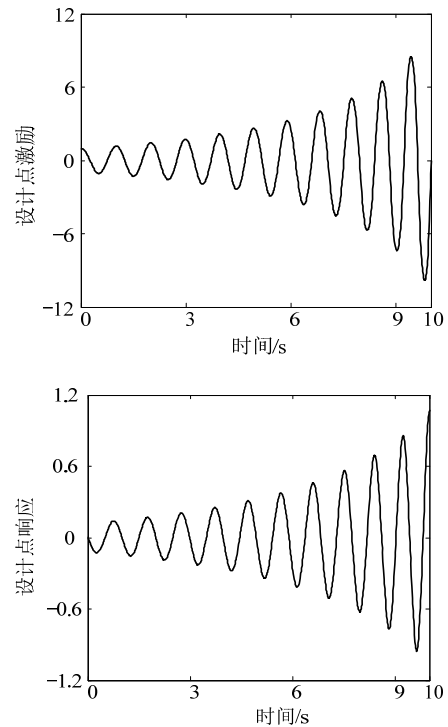


图1  $t_k=10 \text{ s}$  时设计点激励(上)、设计点响应(下)

Fig.1 Design-point excitation and responses at time  $t=10 \text{ s}$

### 4 设计点激励在随机振动中的应用

本部分首先给出非线性结构系统的数值算例，演示设计点激励在结构系统首穿失效问题中的应用。其次给出线性系统的数值算例，分别利用式(5)与式(12)两种方法获得设计点，并将其应用到首穿失效问题中去，结果显示，镜像激励获得的设计点同解析解同样有效。

例 1. 高斯白噪声激励的非线性系统。

$$\begin{cases} \ddot{Y}(t) + 2\eta\dot{Y}(t) + Y(t) + \varepsilon Y(t)^3 = \sqrt{\gamma}f(t) \\ Y(0) = \dot{Y}(0) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

激励终止时刻  $T = 50\text{ s}$ ,  $0 \leq t \leq T$ , 其中:  $\eta = 0.05$  是粘滞阻尼系数,  $f(t)$  是式(1)的白噪声,  $E[f(t)f(t+\tau)] = \delta(\tau)$ ,  $\gamma = 0.2$ ,  $b = 2$ ,  $\varepsilon$  是非线性参数, 取  $\Delta t = 0.05$ . 将式(13)离散后, 根据式(11)得到设计点激励, 根据式(12)得到设计点, 再利用文献[16]中方法, 利用设计点构造控制函数, 模拟 1000 个样本, 分析系统式(13)当非线性参数  $\varepsilon = 1$  的首穿失效概率估计问题, 并与原始的蒙特卡罗模拟相比较, 蒙特卡罗模拟用  $10^6$  个样本, 如图 2 所示, 实线是蒙特卡罗模拟的首穿失效概率值, \*线是利用镜像激励估计的值, 两者具有高度的一致性。说明由镜像激励所得的设计点激励在首穿失效概率的计算中是非常有效的。

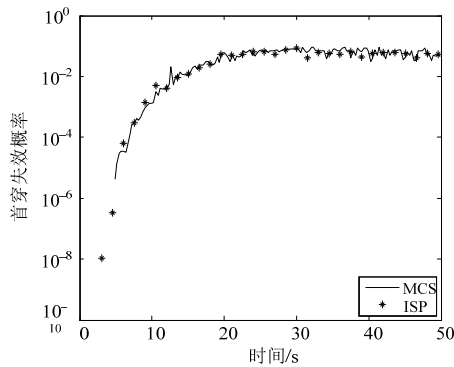


图 2 首穿失效概率模拟比较图

Fig.2 First failure probability simulation comparison chart

例 2. 高斯白噪声激励的线性系统。

考虑例 1 中  $\varepsilon = 0$  时的线性振子,  $b = 4$ , 其它参数与例 1 中一致。本部分采用两种方法获得设计点: 据优化方法, 利用式(5)得设计点的解析解; 据镜像激励, 利用式(11)得设计点激励, 式(12)得设计点。首先本文给出两种方法所得的设计点, 如图 3 所示, 图 3 中是离散时刻  $t_k = 50\text{ s}$  及  $t_k = 40\text{ s}$  的设计点, 图显示两者稍有不同, 由式(5)所得设计点解析解振幅较大, 这是因为在求解镜像激励时, 考虑的是在激励持时到达安全域边界的具有最小能量的输入。进一步, 利用文献[16]的方法, 应用设计点到首穿失效概率的计算中, 各模拟 1000 个样本, 模拟结果如图 4 所示。实线是优化方法所得解析解估计的首穿失效概率值, \*线是镜像激励估计的值, 两者具有高度的一致性。进一步, 将样本容量逐渐减小, 分别取 50 个、100 个、及 300 个样本进行模拟。

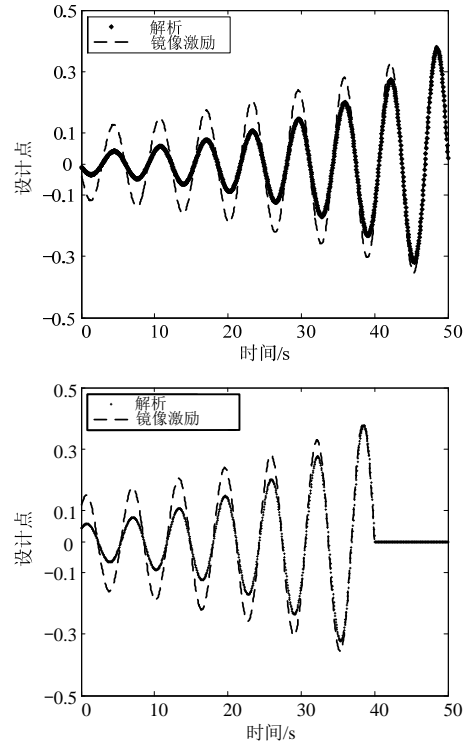


图 3 当  $t_k = 50\text{ s}$  (上)及  $t_k = 40\text{ s}$  (下)时设计点的比较图

Fig.3 Comparison chart of the design-point excitation at time  $t = 50\text{ s}$  and  $t = 40\text{ s}$

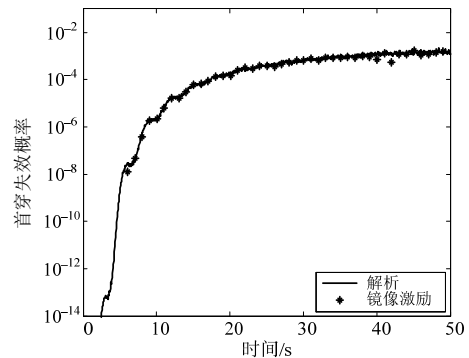
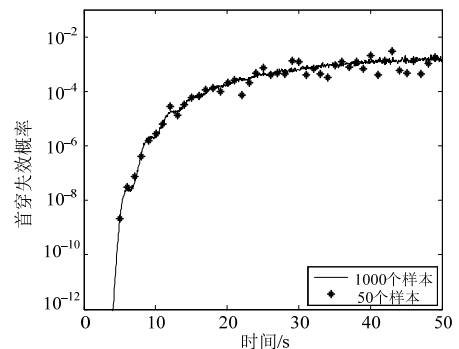


图 4 两种设计点计算的首穿失效概率比较图

Fig.4 First failure probability simulation comparison chart

图 5、图 6 是分别利用式(5)与式(12)计算的设计点, 取不同样本时计算的首穿失效概率。其中实线为 1000 个样本值时的首穿失效概率。\*线是不同样本时的模拟值, 失效概率值每隔 30 个点取一个值,



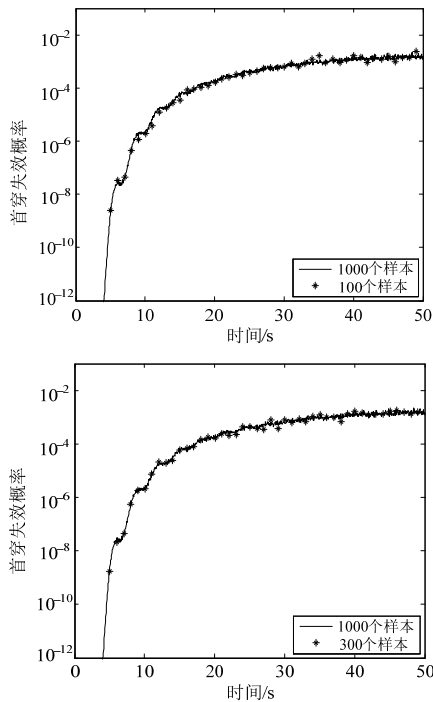


图5 利用优化方法所得设计点, 在取不同样本时的首穿失效概率比较图

Fig.5 First failure probability with different numbers of samples by Eq.5

从两图比较来看, 当取 50 个样本估计首穿失效概率时, 效果均不好, 取 300 个样本来模拟时效果均较好。当取样本量为 100 个的时候, 利用式(5)计算的模拟结果吻合较好。综合图 3~图 6 可看, 两种方法所的设计点激励稍有不同, 但在首穿失效概率的计算中, 展现出同样的有效性。

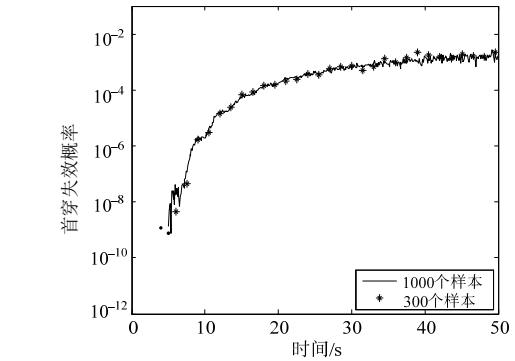
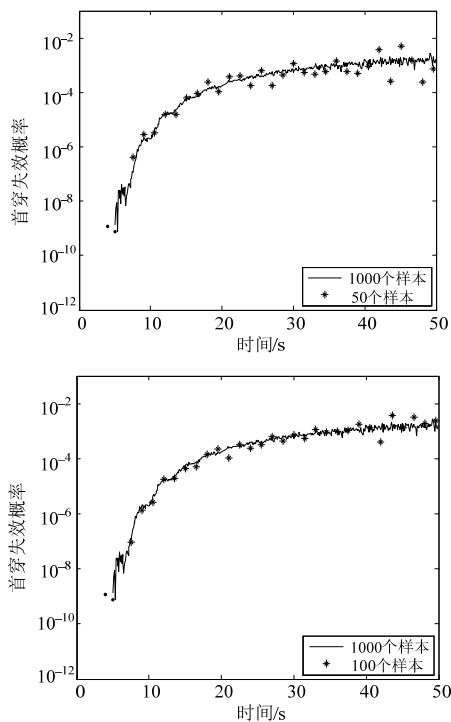


图6 利用镜像激励所得设计点, 在取不同样本时的首穿失效概率比较图

Fig.6 First failure probability with different numbers of samples by Eq.12

### 5 结论

本文利用振子自由振动响应的镜像激励, 给出了高斯白噪声激励下非线性系统的设计点激励, 并将设计点激励所获得的设计点成功应用到首穿失效问题中去, 所得首穿失效概率的估计值与蒙特卡罗模拟方法得到的高度一致。并在线性系统场合, 分别利用优化方法与镜像激励方法所得到设计点激励, 得到设计点的解析解式(5)与近似解式(12), 并将其应用到首穿失效问题中去, 比较可知, 在首穿失效概率的估计中, 镜像激励所得设计点与解析解相比同样有效, 两者得到的估计值保持了高度的一致。本文所提出的利用镜像激励方法获得设计点激励, 不仅在首穿失效问题中起到了重要的作用, 也将在随机动力学的系统响应研究及结构可靠性研究中起到重要的作用, 但不足之处是仅限于高斯白噪声激励。

### 参考文献:

- [1] Der Kiureghian A. The geometry of random vibrations and solutions by FORM and SORM [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2000(15): 81—90.
- [2] Au S K, Beck J L. First excursion probabilities for linear systems by very efficient importance sampling [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2001, 16: 193—207.
- [3] Franchin P. Reliability of uncertain inelastic structures under earthquake excitation [J]. Journal Engineering Mechanics, ASCE, 2004, 130(2): 1—12.
- [4] Drenick R F. The critical excitation and nonlinear systems [J]. Journal Applied Mechanics ASME, 1977, 44: 333—336.
- [5] Iyengar R N, Manohar C S. Nonstationary random critical seismic excitations [J]. Journal Engineering

- Mechanics, ASCE, 1987, 113(4): 521—549.
- [6] Srinivasan M. Critical base excitations of structural systems [J]. *Journal Engineering Mechanics*, ASCE, 1991, 117(6): 1403—1422.
- [7] Takewaki I. Critical excitations for elastic-plastic structures via statistical equivalent linearization [J]. *Probability Engineering Mechanics*, 2002, 17: 73—84.
- [8] Heonsang Koo, Armen Der Kiureghian, Kazuya Fujimura. Design-point excitation for non-linear random vibrations [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2005, 20: 136—147.
- [9] Au S K. Critical excitation of SDOF elasto-plastic systems [J]. *Journal of Sound Vibration*, 2006, 296: 714—733.
- [10] Crandall S H. Non-gaussian closure for random vibration of non-linear oscillators [J]. *International Journal Nonlinear Mechanics*, 1980, 15(4/5): 303—336.
- [11] Zuev K M, Katafygiotis L S. The horseracing simulation algorithm for evaluation of small failure probabilities [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2011, 26(2): 157—164.
- [12] Valdebenito M A, Pradlwarter H J. The role of the design point for calculating failure probabilities in view of dimensionality and structural nonlinearities [J]. *Structural Safety*, 2010(32): 101—111.
- [13] Hasofer A M. Distribution of the maximum of Gaussian process by a Monte Carlo method [J]. *Journal of Sound Vibration*, 1987, 112: 283—293.
- [14] Grigoriu M. Simulation of non-stationary Gaussian processes by random trigonometric polynomials [J]. *Journal Engineering Mechanics*, ASCE, 1993, 119(2): 328—343.
- [15] Li C C, Der Kiureghian A. Optimal discretization of random fields [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 1993, 119(2): 328—343.
- [16] 任丽梅, 徐伟, 都琳. 非平稳地震作用下线性系统的首次穿越[J]. *工程力学*, 2012, 44(3): 648—652.  
Ren Limei, Xu Wei, Du Lin. First passage probabilities of dynamical systems subjected to non-stationary earthquake [J]. *Engineering Mechanics*, 2012, 44(3): 648—652. (in Chinese)

(上接第 182 页)

- [14] 李驰, 黄浩, 孙兵兵, 高利平, 刘霖. 沙漠路基边坡抗风蚀能力现场试验研究[J]. *土木工程学报*, 2011, 44(增刊 2): 220—225.  
Li Chi, Huang Hao, Sun Bingbing, Gao Liping, Liu Lin. Field test study on the anti-wind erosion ability for desert roadbed slope [J]. *China Civil Engineering Journal*, 2011, 44(Suppl 2): 220—225. (in Chinese)
- [15] Li Chi, Ge Xiaodong, Huang Hao. Study on wind erosion resistance ability and slope stability of wind-eroded desert roadbed [J]. *ASCE, Forensic Engineering*, 2012: 746—755.
- [16] Li Chi, Huang Hao, Li Lin, Gao Yu, Ma Yunfeng, Farshad Amini. Geotechnical hazards assessment on wind-eroded desert embankment in Inner Mongolia Autonomous Region, North China [J]. *Natural Hazards*, 2015, 76(1): 235—257.
- [17] 李驰, 朱文会, 高瑜. 寒区公路风吹雪害的融雪侵蚀破坏机理研究[J]. *冰川冻土*, 2011, 33(4): 784—789.  
Li Chi, Zhu Wenhui, Gao Yu. Studied on the erosive mechanism of snow drifting disaster for cold region highway [J]. *Journal of Glaciology and Geocryology*, 2011, 33(4): 784—789. (in Chinese)
- [18] Ji Guanghong, Zhu Wenhui, Gao Yu, Li Chi. Quantitive analysis of snowmelt erosion about cold highway slopes [J]. *Advances in Biomedical Engineering*, 2012, 6: 349—357.