中国科学技术大学

2015 年硕士学位研究生入学考试试题

（数学 （理））

所有试题答案写在答题纸上，答案写在试卷上无效

■不使用计算器

一、 单项选择题（每小题 7 分，满分 28）

(1) 当 $x > 0$ 时，曲线 $y = x\sin\dfrac{1}{x}$ (①)。

(A) 有且只有水平渐近线; (B) 有且只有竖直渐近线;
(C) 既有水平渐近线，又有竖直渐近线;
(D) 既无水平渐近线，又无竖直渐近线。

(2) 已知函数 $y = f(x)$ 对一切 x 满足 $xf''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}$，若 $f'(x_0) = 0\ (x_0 \neq 0)$，则 (②)。

(A) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值; (B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值;
(C) $(x_0,\ f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点;
(D) $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(x_0,\ f(x_0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点。

(3) 曲线 $y = \sin^{3/2} x\ (0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为 (③)。

(A) $\dfrac{4}{3}$; (B) $\dfrac{4}{3}\pi$; (C) $\dfrac{2}{3}\pi^2$; (D) $\dfrac{2}{3}\pi$。

(4) 设 $f(x)$ 连续，则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^x tf(x^2 - t^2)\mathrm{d}t =$ (④)。

(A) $xf(x^2)$; (B) $-xf(x^2)$; (C) $2xf(x^2)$; (D) $-2xf(x^2)$。

二、 填空题（每小题 8 分，满分 32）

(5) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n + 3\sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}\right) =$ ⑤ 。

(6) 定积分 $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x =$ ⑥ 。

(7) 设 L 为取正向的圆周 $x^2 + y^2 = 9$，则曲线积分 $\displaystyle\oint_L (2xy - 2y)\mathrm{d}x + (x^2 - 4x)\mathrm{d}y =$ ⑦ 。

(8) 设区域 D 为 $x^2+y^2\leqslant R^2$，则 $\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ___⑧___。

三、 (10 分) 已知函数 $u=u(x,y,z)$ 满足方程 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$，设 $x=\xi, y=\xi+\eta, z=\xi+\zeta$，求 $u=u(\xi,\eta,\zeta)$ 应满足的方程.

四、 (10 分) 求 $\iint_S z\cos\theta\,\mathrm{d}S$, 其中 S 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=1\,(z\geq 0)$, θ 是球面外向法线与 z 轴正向的夹角.

五、 （15 分）求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n-1}$ 的收敛域，并且在其收敛域内求其和函数;

六、 (15 分) 求函数 $z=(2x+3y-6)^2$ 在椭圆 $x^2+4y^2\leqslant 4$ 中的最大值和最小值。

七、 （15 分）求微分方程

$$y''+4y'+4y=e^{ax}$$

的通解，其中 a 为常数。

八、 (15 分) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<\frac{\pi}{2}\\ 0, & \frac{\pi}{2}\leq|x|\leq\pi\end{cases}$. 试将 $f(x)$ 展开成以 2π 为周期的 Fourier 级数，并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ 的和.

九、 (10 分) 设定义在 $[-1,1]$ 上的函数 $f(x)$ 有 2 阶导函数且 $|f''(x)|\leq 1$ 对任意 $x\in[-1,1]$ 成立. 若 $f(-1)=f(1)$, 证明: 当 $x\in[-1,1]$ 时, $|f'(x)|\leq 1$.