中国科学技术大学

2013年硕士学位研究生入学考试试题

（线性代数与解析几何）

所有试题答案写在答题纸上，答案写在试卷上无效，不得使用计算器

一、填空题（每空6分，共60分。答案需化简）

1. 两直线$1-x=2y=3z$与$x=y+2=2z+4$的夹角为__①__，距离为__②__。

2. 当实数a,b,c满足__③__时，曲面$z=ax^2+bxy+cy^2$是椭圆抛物面。

3. 实方阵$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$的伴随方阵为__④__，Jordan 标准形为__⑤__。

4. 设V是次数≤ 3的实系数多项式$f(x)$全体在多项式的加法和数乘运算下构成的实数域上的线性空间。从V的基$1,x-1,(x-1)^2,(x-1)^3$到$1,x,x^2,x^3$的过渡矩阵为__⑥__。V上的线性变换$\mathscr{A}:f(x)\mapsto xf'(x)$在$1,x-1,(x-1)^2,(x-1)^3$下的矩阵为__⑦__，$\mathscr{A}$的最小多项式为__⑧__。

5. 多项式矩阵$\begin{pmatrix}1&1&1&\lambda\\1&1&\lambda&1\\1&\lambda&1&1\\\lambda&1&1&1\end{pmatrix}$的初等因子组为__⑨__。

6. 实二次型$Q(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3$的规范型为__⑩__。

二、解答题（共 90 分。需写出详细的解答过程）

7.（15 分）求 x 轴绕直线 $x=y=z-1$ 旋转所得旋转曲面的一般方程。

8.（15 分）设 $\mathscr{A}$ 是数域 F 上的有限维线性空间 V 上的线性变换，求证：

$$\dim(\operatorname{Im}\mathscr{A}\cap\operatorname{Ker}\mathscr{A})=\operatorname{rank}\mathscr{A}-\operatorname{rank}\mathscr{A}^2$$

9.（20 分）证明 Cayley-Hamilton 定理：数域 F 上的任意方阵 A 的特征多项式都是 A 的零化多项式。

10.（20 分）设 A,B 是 n 阶复方阵，$\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的线性变换 $\mathscr{A}: X\mapsto AX-XB$。求证：$\mathscr{A}$ 可逆的充要条件是 A 与 B 无公共的特征值。

11.（20 分）设 $\mathscr{A}$ 是数域 F 上的线性空间 V 上的线性变换，$f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 是 F 上的多项式，$g(x)$ 是 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的最大公因式，$h(x)$ 是 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的最小公倍式。求证：$\operatorname{Ker}h(\mathscr{A})=\operatorname{Ker}f_1(\mathscr{A})\oplus\operatorname{Ker}f_2(\mathscr{A})$ 的充要条件是 $g(\mathscr{A})$ 可逆。