中国科学技术大学

2013 年硕士学位研究生入学考试试题

（量子力学）

所有试题答案写在答题纸上，答案写在试卷上无效

□需使用计算器　　　　X □不使用计算器

（共 9 题，共 150 分）

1，（15 分） 一个质量为 μ 的粒子处在一维无限深方势阱中，

$$V(x)=\begin{cases}0 & 0<x<a\\ \infty & x<0,x>a\end{cases}$$

假定开始时粒子处于基态和第一激发态的概率各为二分之一，

（a）（5 分） 请算出 t 时刻粒子的能量期望值；

（b）（10 分）请求出 t 时刻 在 $x=a/2$ 处发现粒子的概率密度。

2,（15 分）质量为 μ 的粒子限制在 xy 平面内的一半径为 R 的圆环上运动（转子），θ 为其角位置。已知 $t=0$ 时刻的粒子波函数为 $\psi(\theta,0)=\cos^2\theta$，试求粒子在任意 $t\geq 0$ 时刻

（a）（5 分）波函数；

（b）（5 分） 测量角动量 z 方向分量 $\hat{L}_z$ 的可能值与相应概率；

（c）（5 分） 处于第二能量激发态的概率。

3，（15 分）一个量子系统，其哈密顿量可写为

$$\hat{H}=\hbar\omega(\hat{a}^{+}\hat{a}+\alpha\hat{a}+\beta\hat{a}^{+})$$

其中 $\hbar\omega$ 为实数，α,β 为数，而算符 $\hat{a}$ 及其厄米共轭 $\hat{a}^{+}$ 分别为吸收算符与发射算符，满足对易关系 $[\hat{a},\hat{a}^{+}]=1$。试求此系统的能量本征值。

4，（20 分）一个量子系统处于角动量平方 $\hat{L}^2$ 和 z 方向投影 $\hat{L}_z$ 的共同本征态

（a）（10 分）证明在此态中 $\left\langle \hat{L}_x^2 \right\rangle = \left\langle \hat{L}_y^2 \right\rangle$；

（b）（10 分） 计算在此态中，测量 $\hat{L}_x$ 的平均平方差 $\overline{(\Delta L_x^2)} = ?$

5，（25 分） 粒子被一维势垒

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0; x > a \\ V_0 & 0 < x < a \end{cases}$$

散射。当粒子的能量 $E = 2V_0$ 时，粒子全部穿过；问当 $E = V_0$ 时，

粒子被反射回去的最小概率是多少？

6，（10 分）

(a)（5 分）微观体系常是若干种全同粒子组成的复合粒子，例如原子核、原子等。微观粒子分 Fermi 子与 Bose 子两类。对于由若干种全同 Fermi 子组成的复合粒子，请从粒子体系波函数在粒子交换下的变换行为证明：总数为奇数个 Fermi 子组成的复合粒子为 Fermi 子，总数为偶数个 Fermi 子组成的复合粒子为 Bose 子；

(b)（5 分）极低温下 ^{4}He 液体和 ^{3}He 液体会表现极不相同的特性，为什么？常温下 ^{4}He 气体和 ^{3}He 气体的特性基本相同，又为什么？

7，(20 分)

在 Stern-Gerlach 实验中，用两块磁铁制备沿 z 轴正方向的非均匀磁场，已知磁场梯度 ∇B 也沿 z 轴正方向。从温度为 T 的高温炉出射的处于基态的银原子束通过准直装置沿 y 方向入射进入 Stern-Gerlach 实验装置，质量为 M 的银原子动能为 $3k_BT/2$，k_B 为 Boltzmann 常量。基态银原子磁矩来自于其核外层唯一的价电子，磁矩可表示为 $\vec{\mu} = -\mu_B\vec{\sigma}$，$\mu_B$ 为 Bohr 磁子，$\vec{\sigma}$ 为电子自旋 Pauli 矩阵。经过磁场，入射银原子束将分裂成两束，最后在观测屏上出现两条亮线。设非均匀磁场在 y 方向的间距为 d，而观测屏紧挨非均匀磁场边缘。

(a) （10 分）请导出入射银原子束分裂的位移的表达式；

(b) （5 分）若入射到 Stern - Gerlach 实验装置的银原子束没有极化，求在观测屏上分裂的上、下两束银原子的强度比；

(c) （5 分）若入射到 Stern-Gerlach 实验装置的银原子束部分极化，自旋态的密度矩阵为 $\rho(0) = \frac{1}{2}\left(1 + \vec{\sigma} \cdot \vec{P}\right)$，其中 $\vec{P} = \left(P_x, P_y, P_z\right)$ 是一个实数矢量，求在观测屏上分裂的上、下两束银原子的强度比。

8，(20 分)

空间两个定域中子相对位置用位置矢量 $\vec{a}$（视为常量）表示，两个中子通过其磁矩发生相互作用，相应的 Hamilton 量可以表示为

$$\hat{H}=\frac{\vec{\mu}_1\cdot\vec{\mu}_2}{a^3}-3\frac{(\vec{\mu}_1\cdot\vec{a})(\vec{\mu}_2\cdot\vec{a})}{a^5}$$

磁矩取为 $\vec{\mu}_i=-\mu\vec{\sigma}_i=-\frac{2\mu}{\hbar}\vec{s}_i\approx-\frac{3.82\mu_N}{\hbar}\vec{s}_i$，其中 $i=1,2$，而 $\mu_N=e\hbar/2m_pc$ 为核磁子。

(a) (10 分)试写出该体系自旋空间运动的一组力学量完全集(CSCO)，求解定态能级与相应本征态；

(b) (5 分)已知 t=0 初始时刻，两个中子自旋同向而且均沿着与矢量 $\vec{a}$ 垂直方向，请求解任意 t 时刻体系的自旋状态；

(c) (5 分) t 时刻测体系总自旋，得 $\vec{a}$ 方向分量为零，给出测量后瞬时的总自旋态。

9，(10 分)

束缚定态的微扰计算中，若 Hamilton 量某个未扰（零级近似）能级出现简并，则首先需要确定“正确”的零级波函数。通常需要在简并子空间中，将微扰 Hamilton 量项对角化。在某些场合，守恒量可能会对此带来方便。假设体系 Hamilton 量为 $\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{H}'$，$\hat{H}'$ 为微扰项。若有某一守恒量 $\hat{A}$，与 $\hat{H}_0,\hat{H}'$ 都对易，而且 $\hat{H}_0$ 的某个能级的简并子空间，由该守恒量 $\hat{A}$ 的不同本征值的本征态张成，则 $\hat{A}$ 的这些不同本征值的本征态必定是正确的零级波函数。请你证明这一事实，也就是证明在此子空间中，$\hat{H}'$ 已对角化。