# 中国科学技术大学

## 2013 年硕士学位研究生入学考试试题

(概率论与数理统计)

**所有试题解答写在答题纸上，答案写在试卷上无效**

■ 不使用计算器

## 一、 计算题(说理要充分。每小题8 分，共88 分)

1. 设 $A$ 与 $B$ 独立, $B$ 与 $C$ 独立, $A$ 与 $C$ 互斥, 且 $\mathrm{P}(A)=1/2$, $\mathrm{P}(B)=1/4$ 和 $\mathrm{P}(C)=1/8$. 求$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)$.

2. 设随机变量 $X, Y$ 和 $Z$ 满足 $\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}(Z)<\infty$, $\mathrm{Var}(Y)=4\mathrm{Var}(X)$, 相关系数 $\rho_{X,Y}=-1$, $\rho_{X,Z}=1/2$, 求 $X$ 与 $Y+Z$ 的相关系数 $\rho_{X,Y+Z}$.

3. 设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立，其中 $X$ 服从 $\{1,2,\ldots,n\}$ 上的均匀分布(即取每个值的概率为 $1/n$)，$Y$ 具有概率密度函数 $f(y)$, 问 $X+Y$ 是否具有概率密度函数? 若有，请求出该概率密度函数.

4. 投掷一枚均匀的硬币, 如果硬币出现正面, 则再抛掷一颗均匀的骰子; 如果硬币出现反面, 则再抛掷 2 颗均匀的骰子. 记 $Y$为抛掷的骰子出现的点数或点数和，求 $\mathrm{P}(Y=4)$.

5. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为正值且独立同分布的随机变量，求 $\mathrm{E}\left[\frac{X_1+X_2+\cdots+X_k}{X_1+X_2+\cdots+X_n}\right]$, 其中 $1\le k\le n$.

6. 设随机向量 $(X,Y)$ 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}(1+xy)/4, & |x|<1, |y|<1;\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

(1) 求$\mathrm{Var}(X)$; (2) $X$ 与 $Y$ 相互独立吗? (3) $X^2$ 与 $Y^2$ 相互独立吗?（说明原因）

7. 设随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_{2n}$ 相互独立，且皆服从 $N(\mu, \sigma^2)$ 分布，其中 $\sigma^2 > 0$. 定义

$$\overline{X} = \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{2n} X_j, \quad Y = \sum_{i=1}^{n}(X_i + X_{n+i} - 2\overline{X})^2,$$

求 $\mathrm{E}Y$.

8. 设随机变量 $X$ 服从 $(a, b)$ 区间上的均匀分布，其中 $0 < a < b < \infty$. 在给定 $X = x$ 的条件下，$Y$ 的条件分布是参数为 $x$ 的指数分布，证明：$XY$ 服从参数为 1 的指数分布.

9. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为来自于正态总体 $N(\mu, 1)$ 的简单随机样本, 若要求参数 $\mu$ 的置信系数为 0.95 的置信区间长度不超过 1, 求至少需要抽取的样本量 $n$.

10. 设随机变量 $X$ 的概率密度函数为$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-x}$, $x > 0$, 其中 $\alpha > 1$, $\Gamma(t)$ 为 Gamma 函数，满足 $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$, $t > 0$. 证明：$\mathrm{P}\left(0 < X < 2\alpha\right) \geq \frac{\alpha-1}{\alpha}$.

11. 设 $X_1, \ldots, X_9$ 和 $Y_1, \ldots, Y_5$ 分别是从正态总体 $N(0, 4)$ 和 $N(8, 9)$ 取出的一组简单样本(即独立同分布样本), 彼此相互独立, 记 $\overline{Y} = \sum_{j=1}^{5} Y_j/5$, 问

$$\frac{\sum_{i=1}^{9} X_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{5}(Y_j - \overline{Y})^2}}$$

服从什么分布?

二、 **(18分)** 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是从具有概率密度函数

$$f(x, \theta) = \begin{cases} 2\left(\frac{\theta}{\pi}\right)^{1/2}\exp(-\theta x^2), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

的总体中抽出的一组样本. 用 C-R 不等式法证明 $\widehat{\theta} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 是 $1/\theta$ 的最小方差无偏估计. (已知 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$)

三、**(24 分)** 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是抽自总体 $X$ 的一组样本，已知 $X$ 服从三点分布：

$$\mathrm{P}(X=-1)=p, \quad \mathrm{P}(X=0)=1-3p, \quad \mathrm{P}(X=1)=2p,$$

其中 $0<p<1/3$ 为未知参数.

(1) 试分别用样本的一阶和二阶原点矩来估计未知参数 $p$;

(2) 试求 $p$ 的极大似然估计；

(3) 证明这三个点估计都是无偏估计；

(4) 问这两个无偏估计，哪个更有效（即哪个方差最小）？.

四、**(20 分)** 某厂用自动装瓶机装油，规定每瓶质量 500 克，标准差不超过 10 克，每天定时检查. 某天抽取 9 瓶，测得平均质量为 499 克，标准差 16.03. 假设瓶装酒的重量服从正态分布. 问(1) 这台机器工作时是否有系统偏差；(2) 该机器工作是否稳定？（取检验水平 $\alpha=0.05$）

附表:

满足条件 $F(v_\beta)=1-\beta$ 的点 $v_\beta$ 称为分布函数 $F$ 的上 $\beta$ 分位点，其中 $0<\beta<1$. 设 $u_\beta$, $\chi_n^2(\beta)$ 和 $t_n(\beta)$ 分别表示标准正态分布，自由度为 $n$ 的 $\chi^2$-分布和自由度为 $n$ 的 $t$分布的上 $\beta$ 分位点.

$u_{0.025}=1.9600,\ u_{0.05}=1.6449,\ u_{0.10}=1.2832;$

$t_8(0.025)=2.306,\ t_9(0.025)=2.262,\ t_8(0.05)=1.860,\ t_9(0.05)=1.833;$

$\chi_8^2(0.025)=17.535,\ \chi_8(0.05)=15.507,\ \chi_9^2(0.025)=19.023,\ \chi_9^2(0.05)=16.919.$