

迭代学习型瞬时最优控制及其收敛性分析

童少伟¹⁾

(西南交通大学力学与工程学院, 成都 611756)

摘要 将传统的瞬时最优控制和智能算法中的迭代学习控制相结合, 提出了基于最优控制算法和智能控制算法的迭代学习型瞬时最优控制算法. 该方法以线性系统为模型, 以系统的响应与期望响应的差值为反馈, 以二次型性能泛函为目标函数, 通过迭代学习修正主动控制器的控制信号, 提高主动控制的效果. 针对迭代学习型瞬时最优控制算法迭代的特性, 本文采用范数方法给出了该方法收敛的充分条件. 为验证方法的有效性, 选取第二代基准模型作为计算模型, 埃尔森特罗地震波南北分量作为输入载荷, 数值仿真结果表明, 迭代学习型瞬时最优控制算法较传统的瞬时最优控制算法有更好的控制效果.

关键词 瞬时最优控制, 迭代学习控制, 地震响应, 性能函数

中图分类号: P315.9 文献标识码: A doi: 10.6052/1000-0879-15-106

OPTIMAL CONTROL USING INSTANTANEOUS OPTIMAL AND ITERATIVE LEARNING CONTROL AND THE CONVERGENCE ANALYSIS

TONG Shaowei¹⁾

(School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China)

Abstract By combining instantaneous optimal control and iterative learning control (ILC), one new hybrid control strategy called instantaneous optimal iterative learning control is proposed. Linear system is chosen as the model for the new control strategy, and the quadratic performance function of the system is chosen as the objective function to be minimized. During the process of controlling responses of the system, the core idea of the iterative learning control is introduced in order to modify the control signals. By introducing the norms of matrices, the sufficient condition of convergence for the new control strategy is established in the paper. The model of a 20-floor building in the second generation benchmark vibration control is selected for numerical simulation. In the numerical simulation, the north-south component of the El wave is introduced as the excitation. Comparing to the instantaneous optimal control, results of the simulation show that instantaneous optimal iterative learning control improves the effectiveness.

Key words instantaneous optimal control, iterative learning control, seismic response, performance function

建筑结构在受到诸如地震、风载荷等外界载荷作用时, 会产生动力响应, 尤其是在受到强烈地震作用时, 过大的结构响应将直接影响结构的安全性. 减小建筑结构在外界载荷作用下的动力响应, 一直

是国内外学者长期以来研究目标. 目前, 业内已经发展了大量的控制策略, 包括被动控制、主动控制以及半主动控制等. 其中, 主动控制和半主动控制策略中最优控制算法是核心部分. 目前, 已经发展了包括经

2015-04-17 收到第 1 稿, 2015-07-06 收到修改稿.

1) 童少伟, 博士生, 主要从事结构振动控制研究. E-mail: wt900800@126.com

引用格式: 童少伟. 迭代学习型瞬时最优控制及其收敛性分析. 力学与实践, 2015, 37(6): 698-703

Tong Shaowei. Optimal control using instantaneous optimal and iterative learning control and the convergence analysis. *Mechanics in Engineering*, 2015, 37(6): 698-703

典线性二次型最优控制算法、 H_2 控制算法、瞬时最优控制算法^[1-3]以及模糊控制、神经网络控制等多种控制算法. 发展控制效果好、鲁棒性高的控制算法一直是国内外学者长期以来的目标.

众多控制算法中, 瞬时最优控制算法由于其模型概念明确、控制器设计时无需求解黎卡提方程而受到广泛的关注^[4]. 然而, 瞬时最优控制算法也是基于经典的二次型性能泛函导出的, 经典型的二次型性能泛函必然需要选择合理的状态向量和控制力向量权系数矩阵 Q 和 R . 不合理的 Q 和 R 权系数矩阵可能导致控制效果显著下降, 甚至导致受控结构本身不稳定. 如何提高权系数矩阵的适应性是一个亟待解决的问题.

迭代学习控制是智能控制的一个分支, 它通过自学习的方式获得误差信息, 并将信息反馈给系统, 进而提高控制器的控制效果. 迭代学习控制可以追溯到 1978 年日本学者 Uchiyama^[5] 提出的一个控制运动机械手臂的概念, 后来 Arimoto 等^[6] 发展了内山的概念, 并于 1984 年明确提出了迭代学习控制方法. 迭代学习控制通过分析系统输出与期望值的误差来修正控制量. 文献^[7] 对迭代学习型控制等三类迭代型控制进行了总结分析, 依据至 2007 年三类迭代型控制论文的收录量, 作者认为迭代学习型控制是最热门的迭代型控制方法; 文献^[8] 提出了基于模型的非线性迭代学习控制方法; 文献^[9] 将迭代学习控制方法与非线性模型预测控制器相结合并提出非线性模型的预测控制方法. 迭代学习型控制在机械行业中应用较多, 而在工程结构振动控制中较少. 工程结构振动中往往存在不确定性, 例如前述的地震载荷即为随机激励的情况, 传统的最优控制算法仅考虑结构的响应反馈, 而不考虑输入载荷的前馈项, 并且无法根据输入载荷在线实时调整控制力. 传统最优控制方法和迭代学习型智能控制的结合恰好能解决这一弊端.

本文基于传统的瞬时最优控制算法和迭代学习控制, 提出迭代学习型瞬时最优控制算法, 给出了该方法收敛性证明, 并采用具体的高层建筑数值算例验证新型算法的有效性.

1 控制律推导

考虑动力学模型

$$M \cdot \ddot{x} + C \cdot \dot{x} + K \cdot x = H \cdot u + P \cdot \ddot{x}_g \quad (1)$$

其中, M , C 和 K 分别为系统的质量、阻尼和刚度

矩阵; x , \dot{x} 和 \ddot{x} 分别为系统的位移、速度、加速度向量; H 为控制力位置矩阵; u 为主动控制器输入的控制力; P 为地震载荷转换矩阵; \ddot{x}_g 为输入地震波.

对应的状态方程为

$$\dot{z} = A \cdot z + B \cdot u + E \cdot \ddot{x}_g \quad (2)$$

其中, $A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1} \cdot K & -M^{-1} \cdot C \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \cdot H \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \cdot P \end{bmatrix}$ 分别为系统矩阵、作动力转换矩阵及外激励转换矩阵, z 为系统状态向量.

考虑性能函数

$$J(t) = \frac{1}{2} [z^T(t) \cdot Q \cdot z(t) + u^T(t) \cdot R \cdot u(t)] \quad (3)$$

由文献^[1]可知, 当系统考虑如式(3)所示的性能函数时, 系统最优化控制力为

$$u(t) = -\frac{\Delta t}{2} \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot Q \cdot z(t) \quad (4)$$

其中 Δt 为系统采样时间间隔. 给定系统及其瞬时最优化控制算法中的权系数矩阵 Q 和 R 后, 系统控制力仅与系统的响应相关. 为提高瞬时最优化控制算法的自适应能力, 引入迭代学习智能控制算法.

令迭代学习的初始条件为

$$z_0(t) = z(t) \quad (5)$$

$$u_0(t) = u(t) \quad (6)$$

令控制力增益矩阵为

$$\Gamma = -\frac{\Delta t}{2} \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot Q \quad (7)$$

则最优控制力可写成

$$u(t) = \Gamma \cdot z(t) \quad (8)$$

用下标 i 表示迭代步数, 可设计迭代学习控制型的瞬时最优化控制算法, 其中第 i 迭代步为

$$u_i(t) = \Gamma \cdot z_i(t + \Delta t) \quad (9)$$

考虑线性系统的可叠加性、外激励载荷的不可预测性及式(2), 可知 $z_{i+1}(t + \Delta t)$ 可由下述方程解得

$$\dot{z}_{i+1}(t + \Delta t) = A \cdot z_{i+1}(t + \Delta t) + B \cdot u_i(t) \quad (10)$$

令方程 (10) 的解为

$$\mathbf{z}_{i+1}(t + \Delta t) = f(\mathbf{u}_i(t), \mathbf{A}, \mathbf{B}) \quad (11)$$

对于高层建筑地震响应而言, 结构响应的期望轨迹一般为: $\mathbf{z}_d(t + \Delta t) = \mathbf{0}$, 因此, 式 (11) 计算出的结构响应实质为迭代过程中受控结构响应余量的估计值 (忽略了外激励项), 用误差型表示, 则式 (11) 可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{i+1}(t + \Delta t) &= \mathbf{e}_{i+1}(t + \Delta t) = \\ &\mathbf{z}_{i+1}(t + \Delta t) - \mathbf{z}_d(t + \Delta t) \end{aligned} \quad (12)$$

相应地, 式 (8) 中的控制力为迭代过程中控制力增量, 其实质为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i(t) &= \mathbf{u}_i(t) - \mathbf{u}_{i-1}(t) = \\ &\mathbf{\Gamma} \cdot [\mathbf{z}_i(t + \Delta t) - \mathbf{z}_{i-1}(t + \Delta t)] \end{aligned} \quad (13)$$

至此, 迭代学习控制可转化为标准形式的学习律

$$\mathbf{u}_i(t) = \mathbf{u}_{i-1}(t) + \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{e}_i(t + \Delta t) \quad (14)$$

式 (14) 亦可写成

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_0(t) + \sum_{i=1}^n \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{e}_i(t + \Delta t) \quad (15)$$

其中, n 为迭代终止步数。

相应的, 在式 (15) 所示的控制力下, 系统的响应为

$$\mathbf{z}(t + \Delta t) = f(\mathbf{u}_n(t), \ddot{\mathbf{x}}_g(t), \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{E}) \quad (16)$$

2 收敛性分析

首先, 引入 3 个假设。

假设 1: 期望控制力有界, 即 $\max_{t \in [0, T]} \|\mathbf{u}_d(t)\| \leq b_{u_d}$, 其中 b_{u_d} 为正常数;

假设 2: 外激励和噪声有界, 即 $\max_{t \in [0, T]} \|\boldsymbol{\beta}(t)\| \leq b_\beta$, $\max_{t \in [0, T]} \|\boldsymbol{\gamma}(t)\| \leq b_\gamma$, 其中 b_β 和 b_γ 为正常数;

假设 3: 每次迭代过程中, 轨迹总是从 $\mathbf{z}_d(0)$ 的领域开始, 即: $\|\mathbf{z}_d(0) - \mathbf{z}_i(t)\| \leq b_{q_0}$, 其中 b_{q_0} 为正常数;

P 型控制系统可视为特殊的 PD (proportional and differential) 控制系统, 可采用 PD 型控制系统来分析收敛性, 若采用 P 型控制系统, 可在反馈项中增添反馈遗忘因子 α 来保证收敛性。

考虑 PD 型控制律

$$\mathbf{u}_i(t) = \mathbf{u}_{i-1}(t) + (\mathbf{\Gamma} \cdot \frac{d}{dt} + \mathbf{L}) \cdot \mathbf{e}_i(t + \Delta t) \quad (17)$$

一般地, 将系统状态方程及输出方程写成

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{z}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\beta}(t) \quad (18)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{z}(t) + \boldsymbol{\gamma}(t) \quad (19)$$

其中, $\boldsymbol{\beta}(t)$, $\boldsymbol{\gamma}(t)$ 分别为外激励项和输出噪声项。

非齐次一阶线性方程 (18) 的解为

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &= e^{\mathbf{A} \cdot t} + \int_0^t e^{\mathbf{A} \cdot (t-\tau)} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau + \\ &\int_0^t e^{\mathbf{A} \cdot (t-\tau)} \cdot \boldsymbol{\beta}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (20)$$

记 $\Phi(t, \tau) = e^{\mathbf{A} \cdot (t-\tau)}$, 则式 (20) 可记为

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &= \Phi(t, 0) + \int_0^t \Phi(t, \tau) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau + \\ &\int_0^t \Phi(t, \tau) \cdot \boldsymbol{\beta}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (21)$$

记下标为 i 为迭代步, 由式 (21) 可知

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_i(t) - \mathbf{z}_{i+1}(t) &= \\ &\int_0^t \Phi(t, \tau) \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{u}_i(\tau) - \mathbf{u}_{i+1}(\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (22)$$

又 $\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{y}_d(t) - \mathbf{y}_i(t)$, $\mathbf{e}_{i+1}(t) = \mathbf{y}_d(t) - \mathbf{y}_{i+1}(t)$, 可知

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{i+1}(t) - \mathbf{e}_i(t) &= \mathbf{y}_i(t) - \mathbf{y}_{i+1}(t) = \\ &\mathbf{C} \cdot [\mathbf{z}_i(t) - \mathbf{z}_{i+1}(t)] = \\ &\mathbf{C} \cdot \int_0^t \Phi(t, \tau) \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{u}_i(\tau) - \mathbf{u}_{i+1}(\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (23)$$

即

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{i+1}(t) &= \mathbf{e}_i(t) - \mathbf{C} \cdot \int_0^t \Phi(t, \tau) \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{u}_i(\tau) - \\ &\mathbf{u}_{i+1}(\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (24)$$

将 PD 型控制律代入上式, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{i+1}(t) &= \mathbf{e}_i(t) - \mathbf{C} \cdot \int_0^t \Phi(t, \tau) \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{\Gamma} \cdot \dot{\mathbf{e}}_i(\tau) + \\ &\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_i(\tau)) d\tau = \\ &\mathbf{e}_i(t) - \mathbf{C} \cdot \int_0^t \Phi(t, \tau) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{\Gamma} \cdot \dot{\mathbf{e}}_i(\tau) d\tau - \\ &\mathbf{C} \cdot \int_0^t \Phi(t, \tau) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_i(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (25)$$

令 $\mathbf{G}(t, \tau) = \mathbf{C} \cdot \Phi(t, \tau) \cdot \mathbf{B} \cdot \Gamma$, 并利用分部积分公式, 可得

$$\int_0^t \mathbf{C} \cdot \Phi(t, \tau) \cdot \mathbf{B} \cdot \Gamma \cdot \dot{e}_i(\tau) d\tau = \mathbf{G}(t, \tau) de_i(\tau) = \mathbf{G}(t, \tau) \cdot e_i(\tau)|_0^t - \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{G}(t, \tau) \cdot e_i(\tau) d\tau \quad (26)$$

将式 (26) 代入式 (24), 可得

$$e_{i+1}(t) = e_i(t) - \mathbf{G}(t, \tau) \cdot e_i(\tau)|_0^t + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{G}(t, \tau) \cdot e_i(\tau) d\tau - \int_0^t \mathbf{C} \cdot \Phi(t, \tau) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{L} \cdot e_i(\tau) d\tau \quad (27)$$

又

$$\mathbf{G}(t, \tau) \cdot e_i(\tau)|_0^t = \mathbf{C} \cdot \Phi(t, \tau) \cdot \mathbf{B} \cdot \Gamma \cdot e_i(t) - \mathbf{C} \cdot \Phi(t, 0) \cdot \mathbf{B} \cdot \Gamma \cdot e_i(0) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \cdot \Gamma \cdot e_i(0) \quad (28)$$

将式 (28) 代入式 (27) 可得

$$e_{i+1}(t) = e_i(t) - \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \cdot \Gamma \cdot e_i(t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{G}(t, \tau) \cdot e_i(\tau) d\tau - \int_0^t \mathbf{C} \cdot \Phi(t, \tau) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{L} \cdot e_i(\tau) d\tau \quad (29)$$

对方程 (29) 两端取范数, 可得

$$\|e_{i+1}(t)\| \leq \|\mathbf{I} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \cdot \Gamma\| \cdot \|e_i(t)\| + \int_0^t \left\| \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{G}(t, \tau) \right\| \cdot \|e_i(\tau)\| d\tau + \int_0^t \|\mathbf{C} \cdot \Phi(t, \tau) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}\| \cdot \|e_i(\tau)\| d\tau \quad (30)$$

令

$$b_1 = 2 \cdot \max_{t, \tau \in [0, T]} \left\{ \left\| \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{G}(t, \tau) \right\|, \|\mathbf{C} \cdot \Phi(t, \tau) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}\| \right\}$$

则

$$\|e_{i+1}(t)\| \leq \|\mathbf{I} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \cdot \Gamma\| \cdot \|e_i(t)\| + \int_0^t b_1 \cdot \|e_i(\tau)\| d\tau \quad (31)$$

将式 (31) 两端同乘以 $e^{-\lambda t}$, 取 λ 范数, 并考虑 $\int_0^t e^{\lambda \cdot t} d\tau = \frac{e^{\lambda \cdot t} - 1}{\lambda}$, 则式 (31) 中右边第 2 项为

$$e^{-\lambda t} \cdot \int_0^t b_1 \cdot \|e_i(\tau)\| d\tau = e^{-\lambda t} \cdot \int_0^t b_1 \cdot \|e_i(\tau)\| \cdot e^{-\lambda \tau} \cdot e^{\lambda \tau} d\tau \leq b_1 \cdot e^{-\lambda t} \cdot \|e_i(\tau)\|_{\lambda} \cdot \int_0^t e^{\lambda \tau} d\tau = b_1 \cdot \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} \cdot \|e_i(\tau)\|_{\lambda} \quad (32)$$

由式 (31) 和式 (32) 可得

$$\|e_{i+1}(t)\|_{\lambda} \leq \|\mathbf{I} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \cdot \Gamma\| \cdot \|e_i(t)\|_{\lambda} + b_1 \cdot \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} \cdot \|e_i(\tau)\|_{\lambda} \quad (33)$$

令 $\rho = \|\mathbf{I} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \cdot \Gamma\|$, $\tilde{\rho} = \rho + b_1 \cdot \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda}$, 且取 $\rho \leq 1$, 则可取 λ 足够大, 可保证 $\tilde{\rho} \leq 1$, 可得

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|e_i(t)\|_{\lambda} = 0 \quad (34)$$

考虑式 (19) 输出方程, 若噪声不为 0, 则

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{y}_d(t) &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{z}_d(t) + \gamma(t) \\ \mathbf{y}_i(t) &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{z}_i(t) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

由式 (35) 可知

$$\begin{aligned} e'_i(t) &= \mathbf{y}_d(t) - \mathbf{y}_i(t) = \\ &= \mathbf{C} \cdot [\mathbf{y}_d(t) - \mathbf{y}_i(t)] + \gamma(t) = \\ &= e_i(t) + \gamma(t) \end{aligned} \quad (36)$$

对式 (36) 两端取 λ 范数, 可得

$$\|e'_i(t)\|_{\lambda} = \|e_i(t)\|_{\lambda} + \|\gamma(t)\|_{\lambda} \quad (37)$$

考虑假设 2, 则控制力增量为

$$\tilde{\mathbf{u}}_{i+1}(t) = \Gamma \cdot \frac{d}{dt} e'_i(t) + \mathbf{L} \cdot e'_i(t) \quad (38)$$

由式 (38) 和式 (37) 可得

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{u}}_{i+1}(t) &= \Gamma \cdot \lim_{i \rightarrow \infty} [\dot{e}_i(t) + \dot{\gamma}_i(t)] + \\ &= \mathbf{L} \cdot \lim_{i \rightarrow \infty} [e_i(t) + \gamma_i(t)] \end{aligned} \quad (39)$$

对式 (39) 两端取 λ 范数, 可得

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{u}}_{i+1}(t)\|_{\lambda} = \|\mathbf{\Gamma}\| \cdot \lim_{i \rightarrow \infty} [\|\dot{\mathbf{e}}_i(t)\|_{\lambda} + \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}_i(t)\|_{\lambda}] + \|\mathbf{L}\| \cdot \lim_{i \rightarrow \infty} [\|\mathbf{e}_i(t)\|_{\lambda} + \|\boldsymbol{\gamma}_i(t)\|_{\lambda}] \quad (40)$$

将式(34)代入上式,可得

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{u}}_{i+1}(t)\|_{\lambda} \leq \|\mathbf{\Gamma}\| \cdot \lim_{i \rightarrow \infty} \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}_i(t)\|_{\lambda} + \|\mathbf{L}\| \cdot \lim_{i \rightarrow \infty} \|\boldsymbol{\gamma}_i(t)\|_{\lambda} \quad (41)$$

由式(41)可知, $\|\tilde{\mathbf{u}}_{i+1}(t)\|_{\lambda}$ 为关于 $\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}_i(t)\|_{\lambda}$, $\|\boldsymbol{\gamma}_i(t)\|_{\lambda}$ 的有界函数.

由式(20)可得

$$\mathbf{z}_d(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} + \int_0^t \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-\tau)} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_d(\tau) d\tau + \int_0^t \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-\tau)} \cdot \boldsymbol{\beta}(\tau) d\tau \quad (42)$$

$$\mathbf{z}_i(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} + \int_0^t \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-\tau)} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_i(\tau) d\tau \quad (43)$$

由式(42)和式(43)可以得到

$$\tilde{\mathbf{z}}'_i(t) = \mathbf{z}_d(t) - \mathbf{z}_i(t) = \int_0^t \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-\tau)} \cdot \mathbf{B} \cdot [\mathbf{u}_d(\tau) - \mathbf{u}_i(\tau)] d\tau + \int_0^t \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-\tau)} \cdot \boldsymbol{\beta}(\tau) d\tau \quad (44)$$

对式(44)两端取 λ 范数,可得

$$\|\tilde{\mathbf{z}}'_i(t)\| \leq \int_0^t \left\| \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-\tau)} \cdot \mathbf{B} \right\| \cdot \|\mathbf{u}_d(\tau) - \mathbf{u}_i(\tau)\| d\tau + \int_0^t \left\| \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-\tau)} \right\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}(\tau)\| d\tau \quad (45)$$

令

$$b_3 = \sup_{t, \tau \in [0, T]} \left\| \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-\tau)} \cdot \mathbf{B} \right\|$$

$$b_4 = \sup_{t, \tau \in [0, T]} \left\| \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-\tau)} \right\|$$

可得

$$\|\tilde{\mathbf{z}}'_i(t)\| \leq \int_0^t b_3 \cdot \|\mathbf{u}_d(\tau) - \mathbf{u}_i(\tau)\| d\tau + \int_0^t b_4 \cdot \|\boldsymbol{\beta}(\tau)\| d\tau \quad (46)$$

对方程(46)两端同乘以 $e^{-\lambda t}$, 可得

$$e^{-\lambda t} \cdot \|\tilde{\mathbf{z}}'_i(t)\| \leq e^{-\lambda t} \cdot \int_0^t b_3 \cdot \|\mathbf{u}_d(\tau) - \mathbf{u}_i(\tau)\| \cdot e^{-\lambda \tau} \cdot e^{\lambda t} d\tau + e^{-\lambda t} \cdot \int_0^t b_4 \cdot \|\boldsymbol{\beta}(\tau)\| \cdot e^{-\lambda \tau} \cdot e^{\lambda t} d\tau$$

$$\leq b_3 \cdot e^{-\lambda t} \cdot \|\mathbf{u}_d(\tau) - \mathbf{u}_i(\tau)\| \int_0^t e^{\lambda \tau} d\tau + b_4 \cdot e^{-\lambda t} \cdot \|\boldsymbol{\beta}(\tau)\| \int_0^t e^{\lambda \tau} d\tau =$$

$$b_3 \cdot \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} \cdot \|\mathbf{u}_d(\tau) - \mathbf{u}_i(\tau)\|_{\lambda} + b_4 \cdot \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} \cdot \|\boldsymbol{\beta}(\tau)\|_{\lambda} =$$

$$b_3 \cdot \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} \cdot \|\tilde{\mathbf{u}}_i(\tau)\|_{\lambda} + b_4 \cdot \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} \cdot \|\boldsymbol{\beta}(\tau)\|_{\lambda} \quad (47)$$

将式(39)代入式(47),可得

$$\|\tilde{\mathbf{z}}'_i(t)\|_{\lambda} \leq b_3 \cdot \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} \|\mathbf{\Gamma}\| \cdot \lim_{i \rightarrow \infty} \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|_{\lambda} + \|\mathbf{L}\| \cdot \lim_{i \rightarrow \infty} \|\boldsymbol{\gamma}(t)\|_{\lambda} + b_4 \cdot \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} \cdot \|\boldsymbol{\beta}(t)\|_{\lambda} \quad (48)$$

由式(48)可知, $\|\tilde{\mathbf{z}}'_i(t)\|_{\lambda}$ 为关于 $\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|_{\lambda}$, $\|\boldsymbol{\gamma}(t)\|_{\lambda}$, $\|\boldsymbol{\beta}(\tau)\|_{\lambda}$ 有界收敛的函数. 所以, 当不考虑初始偏差、外激励及噪声时, $\|\tilde{\mathbf{u}}_{i+1}(t)\|_{\lambda}$, $\|\tilde{\mathbf{z}}'_i(t)\|_{\lambda}$ 均收敛于 0; 否则 $\|\tilde{\mathbf{u}}_{i+1}(t)\|_{\lambda}$, $\|\tilde{\mathbf{z}}'_i(t)\|_{\lambda}$ 关于 $\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|_{\lambda}$, $\|\boldsymbol{\gamma}(t)\|_{\lambda}$ 和 $\|\boldsymbol{\beta}(\tau)\|_{\lambda}$ 有界收敛, 所以, 式(15)和(16)所示系统的收敛条件为

$$\rho = \|\mathbf{I} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{\Gamma}\| \leq 1 \quad (49)$$

其中 \mathbf{I} 为单位矩阵.

3 算例分析

本文选择 20 层第二代基模型作为计算模型, 该模型是按照美国加利福尼亚州规范设计, 模型全高 80.77 m, 平面布局为 30.48 m × 36.58 m, 东西向 6 跨, 南北向 5 跨, 每跨均为 6.1 m; 竖向除首层为 5.49 m 外, 其余均为 3.65 m. 采用静力凝聚法对原结构进行自由度缩减, 可得 20 自由度平动模型^[10]. 结构阻尼比设定为 0.02, 阻尼矩阵采用瑞利阻尼.

考虑结构主动控制器为层间主动拉索型控制器结构, 采用全状态反馈. 为了分析迭代学习型瞬时最优化控制算法的有效性, 分别对控结构、经典瞬时最优化控制、迭代学习型瞬时最优控制 3 种工况

下的结构地震响应进行分析. 考虑系统输入地震波为埃尔森特罗地震波南北向分量, 其峰值加速度为 3.417 m/s^2 , 持续时间为 10 s .

图 1 ~ 图 4 分别为选定地震载荷作用下, 结构各楼层位置的位移、速度、加速度及层间位移响应峰值.

由图 1 中的位移响应峰值可知, 迭代学习型瞬时最优控制算法较传统的瞬时最优控制算法控制好, 尤其在高层位置, 其位移响应峰值控制效果明显; 由图 2 中的速度响应峰值可知, 迭代学习型瞬时最优控制算法对结构的速度响应控制在底层和高层部分控制效果明显, 而在第 9 ~ 10 层控制效果较差; 由图 3 加速度响应峰值可以看出, 相对而言, 加速度响应的控制效果并不明显; 而由图 4 中

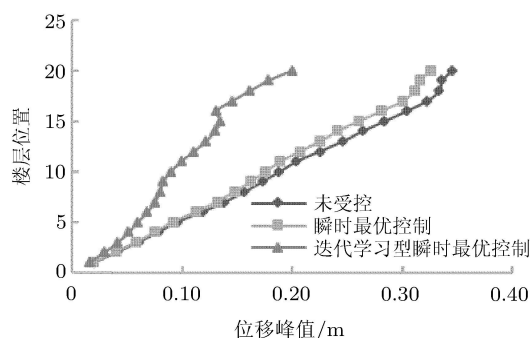


图 1 位移响应峰值

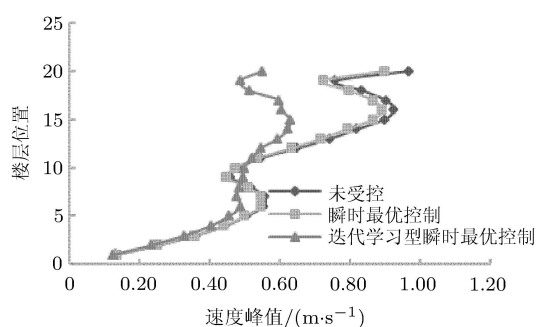


图 2 速度响应峰值

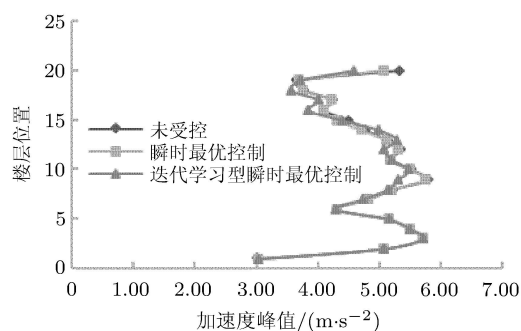


图 3 加速度响应峰值

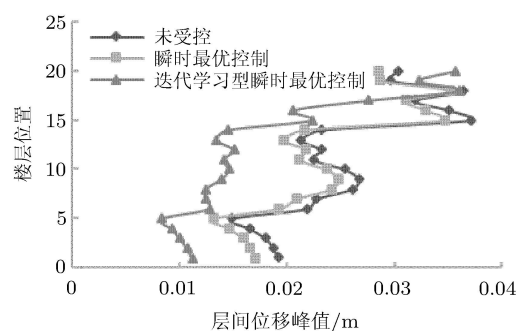


图 4 层间位移响应峰值

的层间位移响应峰值可知, 迭代学习型瞬时最优控制算法在除了第 19 和第 20 层以外的楼层均有明显的控制效果.

4 结论

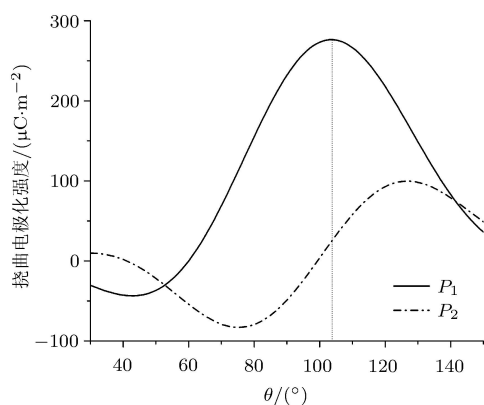
本文基于最优控制算法和智能控制算法, 提出了迭代学习型瞬时最优控制算法. 该方法以线性系统为模型, 以系统的响应与期望响应的差值为反馈, 以离散系统二次型性能泛函为目标函数, 通过迭代学习修正主动控制器的控制信号, 提高主动控制的效果, 并给出了该方法的收敛性条件.

通过选取的数值算例可知, 较瞬时最优控制算法而言, 本文提出的迭代学习型瞬时最优控制算法对在地震载荷作用下高层建筑结构的响应控制有较明显的改善, 其中尤其以位移控制效果改善最为明显.

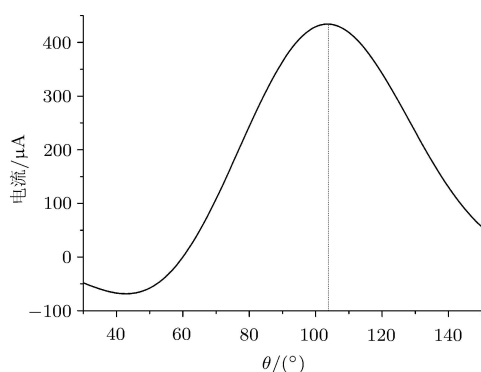
参考文献

- 1 Yang JN, Akbarpour A, Ghaemmaghami P. Optimal control algorithms for earthquake-excited buildings. The 2nd International Symposium on Structural Control, Waterloo, 1985
- 2 Yang JN, Akbarpour A, Ghaemmaghami P. New optimal control algorithms for structural control. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 1988, 113(9): 1369-1386
- 3 Yang JN, Li Z, Liu SC. Stable controllers for instantaneous optimal control. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 1992, 113(9): 1612-1630
- 4 Bahar O, Mahzoon M, Bann MR, et al. Discrete instantaneous optimal control method. *Iranian Journal of Science & Technology*, 2004, 28(B1): 9-20
- 5 Uchiyama M. Formulation of high-speed motion of a mechanical arm by trial. *Translation of the Society of Instrumentation and Control Engineers*, 1978, 14(6): 706-712
- 6 Arimoto S, Kawamura S, Miyazaki F. Bettering operation of robotics by learning. *Journal of Robotic System*, 1984, 1(2): 123-140

(下转第 707 页)



(a) 极化强度变化



(b) 载荷频率 50 Hz 下电流变化

图 4 SGS2 各参量随裂纹扩展变化

本例中当 SGS2 的电流为最大值时, $d' = 2.37 \times 10^{-4} \text{ m}$, $\Delta a = 4.56 \times 10^{-4} \text{ m}$. 总之, 根据应变梯度传感器电荷跃变, 可获知裂纹扩展长度和裂纹尖端坐标, 达到监测裂纹扩展的目的.

4 结论

本文提出了一种基于 BST 薄膜的应变梯度传感器来捕获应变梯度, 以形成监测 I 型裂纹扩展状态的初步理论依据. 解析推导了 I 型裂纹尖端应变梯度的分布, 讨论了裂纹扩展过程中裂纹尖端附近

一点各应变梯度分量的变化, 最后得出基于挠曲电效应的应变梯度传感器测定裂纹位置的计算方法和监测裂纹扩展的布片方案. 本文结果可为基于应变梯度的挠曲电传感器的研制及其在结构健康监测中的应用提供理论参考. 挠曲电感应技术对结构健康监测来说有很大发展空间.

参考文献

- 1 Staszewski W. Monitoring on-line integrated technologies for operational reliability-monitor. *Air & Space Europe*, 2000, 2(4): 67-72
- 2 Baskaran S, He XT, Chen Q, et al. Experimental studies on the direct flexoelectric effect in α -phase polyvinylidene fluoride films. *Applied Physics Letters*, 2011, 98: 242901
- 3 李康, 骆英, 徐晨光等. 基于 BST 微悬臂梁横向挠曲电系数的测定. *压电与声光*, 2014, 36(5): 798-800
- 4 Huang WB, Yan X, Kwon SR, et al. Flexoelectric strain gradient detection using $\text{Ba}_{0.64}\text{Sr}_{0.36}\text{TiO}_3$ for sensing. *Applied Physics Letters*, 2012, 101(25): 252903
- 5 Kwon SR, Huang WB, Zhang SJ, et al. Flexoelectric sensing using a multilayered barium strontium titanate structure. *Smart Materials and Structures*, 2013, 22: 115017
- 6 刘官厅. 弹性与断裂力学复变方法研究进展. *力学与实践*. 2010, 32(3): 10-15
- 7 赵建生. 断裂力学及断裂物理. 武汉: 华中科技大学出版社, 2003
- 8 魏庆同, 郎福元, 赵邦戟. I 型裂纹扩展方向及稳定性. *甘肃工业大学学报*, 1986, 12(3): 51-55
- 9 Kogan SM. Piezoelectric effect during inhomogeneous deformation and acoustic scattering of carriers in crystals. *Soviet Physics-Solid State*, 1964, 5(10): 2069-2070
- 10 Shu LL, Wei XY, Pang T, et al. Symmetry of flexoelectric coefficients in crystalline medium. *Journal of Applied Physics*, 2011, 110(10): 104106
- 11 Thanh DN, Mao S, Yeh YW, et al. Nanoscale flexoelectricity. *Advanced Materials*, 2013, 25: 946-974
- 12 Kwon SR, Huang WB, Shu LL, et al. Flexoelectricity in barium strontium titanate thin film. *Applied Physics Letters*, 2014, 105: 142904

(责任编辑: 刘希国)

(上接第 703 页)

- 7 Wang YQ, Gao FR, Doyle III FJ. Survey on iterative learning control, repetitive control, and run-to-run control. *Journal of Process Control*, 2009, 19: 1589-1600
- 8 Smolders K, Volckaert M, Swevers J. Tracking control of nonlinear lumped mechanical continuous-time systems: a model-based iterative learning approach. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2008, 22(8): 1896-1916

- 9 Cueli JR, Bordons C. Iterative nonlinear model predictive control stability, robustness and applications. *Control Engineering Practice*, 2008, 16(9): 1023-1034
- 10 Lynch JP, Law KH. Energy market-based control of linear civil structures. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2002, 31(10): 1855-1877

(责任编辑: 刘希国)