山 东 师 范 大 学
硕士研究生入学考试试题

考试科目： 离散数学

注意事项：1．本试卷共 10 道大题（共计 26 个小题），满分 150 分；
2．本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3．必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。

* *

一、（15 分）

1．试用真值表判断下列命题公式的类型（重言式、矛盾式、可满足式），并写出成真赋值和成假赋值：

$$(\neg p \to q) \to (q \to \neg p)$$

2．用等值演算法判断下列命题公式的类型：

$$(p \vee \neg p) \to (\neg(q \to r) \wedge r)$$

二、（15 分）

1．利用求主析取范式的方法判断下面两式是否等价：

①$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$

②$(p \vee (q \wedge r)) \wedge (q \vee (\neg p \wedge r))$

2．构造下列推理证明（每步注明依据）

前提：$p \to (q \to r), \neg s \vee p, q$

结论：$s \to r$

三、（15 分）

1．将下列函数 $f(x)$ 在点 c 连续的定义符号化：

对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使当 $|x-c| < \delta$ 时，恒有 $|f(x)-f(c)| < \varepsilon$，则称函数 $f(x)$ 在点 c 连续。

2．求下列公式的前束范式：

$$\forall x(\forall y P(x) \vee \forall z Q(z,y) \to \neg(\forall y R(x,y)))$$

3、证明下列蕴涵式：

$$\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall x(R(x) \to \neg Q(x))$$
$$\Rightarrow \forall x(R(x) \to \neg P(x))$$

四、(10 分)

设 u 为群 $<G,\circ>$ 中的一元，在 G 中定义运算 $*$ 如下： $a*b=a\circ u^{-1}\circ b$

其中 u^{-1} 为 u 在 G 中的逆元，试证明 $<G,*>$ 为群。

五、(15 分)

设 $<G,\circ>$ 为一个群，其中 $G=\{\varphi|\varphi: x \to ax+b, 其中a,b\in R且a\neq 0, x\in R\}$

二元运算 $\circ$ 是映射的复合。

1. 若 S 为 G 中 $a=1$ 的所有映射构成的集合，证明 $<S,\circ>$ 为 $<G,\circ>$ 的子群。
2. 写出 S 在 G 中所有的左陪集。

六、(20 分)

设 $<G,*>$ 为 n 阶有限群，e 为其幺元，试证：

1. 对任意 $a\in G$, a 的阶必为 n 的因子，且 $a^n=e$ 。
2. 若 n 为质数，则 $<G,*>$ 必为循环群。

七、(15 分)

已知 a, b, c, d, e, f, g 这七个人会讲的语言分别是：

a 会讲英语和德语；b 会讲英语和汉语；c 会讲英语、俄语和意大利语；d 会讲汉语和日语；e 会讲意大利语和德语；f 会讲俄语、日语和法语；g 会讲德语和法语。如何将他们的座位安排在一张圆桌旁，使得每个人都与他身边的人交谈？

八、(15 分)

设 R_1 是定义在 A 上的偏序关系，在 A 上定义新的关系 R_2：

对任意的 x, y∈A, $\langle x, y\rangle \in R_2$ 当且仅当 $\langle y, x\rangle \in R_1$.

1. 证明 R_2 也是 A 上的偏序关系；
2. 假设 R_1 是 Z 上的 小于等于关系，试判断：
   R_2 是什么关系，并给出理由；
3. 分析 $<Z,R_1>$ 中的极大元、极小元、最大元、最小元与 $<Z,R_2>$ 中的极大元、极小元、最大元、最小元之间的关系。

九、(15 分)

设 R_1 为定义在整数集合 Z 上的如下关系：

即对任意的 x, y∈Z, $<x,y>\in R_1$ 当且仅当 $x\equiv y \pmod k$.

1. 证明 R_1 为 Z 上的等价关系；

2. 给出由 R_1 导出的 Z 的划分；

3. 分别令 $k=s$ 和 $k=t$. 证明由 R_s 导出的划分细分由 R_t 导出的划分当且仅当 t 整除 s 。

十、（15 分）

设 <H, *> 是群 <G, *> 的子群，在 G 上定义二元关系 R：

对任意的 a，b∈G，<a, b>∈R 当且仅当 $a*b^{-1}\in H$ 。

1. 证明 R 是群 G 上的等价关系；
2. 给出群 G 的一个划分表示；
3. 若 G 是有限群，则 |H| 能整除 |G|。