山东师范大学

硕士研究生入学考试试题

考试科目：数学分析

注意事项：1．本试卷共七道大题（共计16个小题），满分150分；
2．本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3．必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。

* *

一.（14分）求下列极限

1. $\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

二.（16分）求下列导数、偏导数与微分

1. 设函数 $z=f(xy,x+y,\frac{y}{x})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 dz，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2. 设函数 $y=x^{\tan x}$，$x\in(0,\frac{\pi}{2})$. 求 $\dfrac{dy}{dx}$.

三（40分）计算下列各种积分

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta$.

2. $\iiint\limits_V(x^2+y^2)dxdydz$，其中 V 是由曲面 $2(x^2+y^2)=z$ 与 $z=4$ 所围有界区域.

3. $\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中L为按段光滑闭曲线且L所围内部区域包含原点.

4. $\iint\limits_S (y^2+z^2)dS$，其中S是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$.

5. $I=\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)-\ln x}{1+x^2}dx$.

四.（14分）求函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $(0,2\pi]$ 上的傅里叶展开式，并据此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

五.（6分）求函数 $f(x,y)=x^3+2x^2-2xy+y^2$ 的极值点.

六.（30分）讨论下列各题

1. 试确定函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x+\frac{1}{n})^n$ 的收敛域，并讨论其和函数的连续性.

2. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

试讨论 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处的连续性、偏导存在性与可微性.

七.（30分）证明下列各题

1. 设 $f(x)$ 为区间 $[a,b]$ 上二阶可导函数，$f(a)=f(b)=0$，并存在一点 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)>0$. 试证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)<0$.

2. 设$f(x)$为区间$[a,b]$上连续的正值函数，试证明

$$\iint\limits_D \frac{f(x)}{f(y)}\,dx\,dy \geq (b-a)^2,$$

其中$D=[a,b]\times[a,b]$.

3. 设$f(x)$在$[0,a]$上连续，$f(0)=0$，试证明

$$\left|\int_0^a f(x)\,dx\right| \leq \frac{Ma^2}{2},$$

其中$M=\max\limits_{0\le x\le a}|f(x)|$.