中国计量学院

2013 年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目名称: 数学分析

考试科目代码: 704

考 生 姓 名: ____________

考 生 编 号: ____________

考生须知:

1、所有答案必须写在**报考点提供的**答题纸上，做在试卷或草稿纸上无效。

2、答案必须写清题号，字迹要清楚，保持卷面清洁。

3、试卷、草稿纸必须随答题纸一起交回。

本试卷共 二 大题，共 二 页。

一、（共 **9** 小题，每小题 **10** 分，共 **90** 分）

1．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+a^n}\ (a>0)$.

2．证明不等式：$(x^2-1)\ln x>(x-1)^2$，$x>1$.

3．设 f 为 $[a,b]$ 上的二阶可导函数，$f(a)=f(b)=0$，并存在一点 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)>0$. 证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=0$.

4．求不定积分 $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\tan x}$.

5．研究函数列 $f_n(x)=x^n-x^{n+1}\ (n=1,2,\cdots)$ 在 $[0,1]$ 上的一致收敛性.

6．求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

7．设函数 $f(u,v)$ 的所有二阶偏导数连续，$z=f\left(x^2y,\dfrac{x^2}{y}\right)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

8．计算 $\displaystyle\int_C(\sin y+y)\,dx+x\cos y\,dy$，其中 C 为抛物线 $y=x(\pi-x)$ 在 x 轴上方的一段，方向从 $(0,0)$ 指向 $(\pi,0)$.

9. 设 n 为大于1的正整数，证明：

$$\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n.$$

二、（共 **4** 题，每小题 **15** 分，共 **60** 分）

1．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0,\\ A, & x=0,\end{cases}$ 其中函数 f 在点 $x=0$ 连续，g'' 连续且 $g(0)=1$.

(1) 求 A 的值；(2) 求 $f'(0)$；(3) 讨论导函数 f' 在 $x=0$ 的连续性.

2．计算二重积分 $\iint_D \sqrt{|y-x^2|}\,dxdy$，其中

$$D=\{(x,y)\,|\,|x|\le 1,\ 0\le y\le 2\}.$$

3．用条件极值的方法证明：点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的距离是

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

4．判断下列级数的敛散性（第一小题 10 分，第二小题 5 分，共 15 分）：

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$；

（2） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n{}^2}$，其中 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是正项发散级数.

【完】