中国计量学院
2013 年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目名称: 高等代数

考试科目代码: 804

考 生 姓 名: ____________

考 生 编 号: ____________

考生须知:

1、所有答案必须写在**报考点提供的**答题纸上，做在试卷或草稿纸上无效。

2、答案必须写清题号，字迹要清楚，保持卷面清洁。

3、试卷、草稿纸必须随答题纸一起交回。

本试卷共 十一 大题，共 二 页。

一、(10 分)设 $f(x)$ 是复数域上次数大于零的多项式,且 $f(x) \mid f(x^n)$,

n 是大于 1 的整数. 证明: $f(x)$ 的根只能是零或单位根.

二、(15 分)计算行列式

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ -a & -a & x & \ldots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}.$$

三、(10 分)(1) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,证明向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 也是线性无关.

(2) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s>3)$ 是一组线性无关的向量,那么 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{s-1}+\alpha_s,\alpha_s+\alpha_1$ 是否线性无关?证明之.

四、(10 分) 求 λ,μ 为何值时,下述方程组有唯一解?无解?有无穷多解?在有无穷多解时,求其通解.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ \quad x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(\lambda-3)x_3-2x_4=\mu \\ 3x_1+2x_2+x_3+\lambda x_4=-1 \end{cases}$$

五、(10 分)设 A 为 n 阶方阵,证明存在一个可逆矩阵 B 及一个幂等矩阵 C 使 $A=BC$

六、(20 分)设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$ 和 $g(y_1,y_2,\cdots,y_n)=Y'BY$ 均为实数域上 n 元二次型,且存在实数域上 n 阶方阵 C 和 D 使得 $A=D'BD$,$B=C'AC$. 证明 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $g(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 具有相同的规范形.

七、（20 分）设 A 为 n 阶实对称幂等矩阵，秩 $(A)=r$，$X'=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 n 元实向量.

（1） 求证 $V=\{X\in R^n \mid X'AX=0\}$ 为线性空间；

（2） 求 V 的维数.

八、（20 分）设 σ 为 n 维线性空间 V 的一个线性变换，且 $\sigma^2=\sigma$. 证明：

(1) σ 的特征值只能为 0 或 1；

(2) 若用 V_0,V_1 分别表示对应于特征值 0 和 1 的特征子空间，则

$V_0=\sigma^{-1}(0)$，$V_1=\sigma(V)$；

(3) $V=V_0\oplus V_1=\sigma^{-1}(0)\oplus\sigma(V)$.

九、(15 分) 对数域 P 上的 n 维线性空间 V，假设存在 V 上的线性变换 σ,μ,τ，满足条件：（1）$\tau\mu=0$；（2）σ 的秩小于 μ 的秩. 证明 τ 与 σ 至少有一个公共的特征向量.

十、（10 分）V_1,V_2 是 n 维欧氏空间 V 的子空间，且 $\dim V_1<\dim V_2$，证明：V_2 中必有一个非零向量正交于 V_1 中的一切向量.

十一、（10 分） 已知 $f(x)=x^{n+1}+x^n-2$，求 $f(x)$ 在有理数域上的不可约多项式并说明理由.

【完】