一、论述简答题（每小题 6 分，共 24 分）

1、论述函数 $y=f(x)$ 在点 a 连续的定义。

2、论述函数 $y=f(x)$ 的连续、可导、可微之间的关系。

3、论述函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的积分第一中值定理。

4、论述函数 $y=f(x)$ 在点 a 的可微定义。

二、填空题（每小题 6 分，共 48 分）

1、设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ ax+b, & x>1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导，则常数 $a=$______，$b=$______。

2、极限 $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1})=$__________。

3、若 $\frac{\cos x}{x}$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf'(x)dx=$__________。

4、极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}(1+x^2y)^{\frac{1}{x}}=$______________。

5、幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{5^n}$ 的收敛域为____________。

6、不定积分 $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}=$ ______________。

7、设 $f_y'(a,b)$ 存在，则 $\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(a,b+y)-f(a,b-y)}{y}=$_____________。

8、已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=a$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})=$______________。

三、计算题（每小题 8 分，共 64 分）

1、计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{\ln(1+x^2)}$。

2、计算极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}dt}{x^3}$。

3、计算 $\iint\limits_D \sin y^2 dxdy$，其中 D 是由直线 $x=0, y=1$ 及 $y=x$ 所围成的闭区域。

4、设有参数函数 $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

5、计算定积分 $\int_1^e x^2\ln x dx$。

6、将给定的正数 a 分为三个正数之和，问这三个数各为多少时，它们的乘积最大？

7、计算曲线积分 $\oint_L \dfrac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$，其中 $L: x^2+y^2=1$（逆时针方向）。

8、求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n}$ 的和函数。

四、证明题（每小题 7 分，共 14 分）

1、设 $f(x)=a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots+a_n\cos nx$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为任意常数，证明：在区间 $(0,\pi)$ 内存在 ξ，使 $f(\xi)=0$。

2、设函数 $y=f(x)$ 为连续，证明：$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$。

【完】