文章编号：1003－207(2015)11－0105－07
DOI：10.16381/j.cnki.issn1003－207x.2015.11.013

灰模糊积分关联度决策模型

常志朋[1]，程龙生[2]

（1. 安徽工业大学商学院，安徽 马鞍山 243002；2. 南京理工大学经济管理学院，江苏 南京 210094）

摘 要：灰关联度决策模型是在假设属性之间彼此相互独立的基础上构建的，但是在很多实际问题中属性之间往往存在一定的交互作用，从而导致灰关联度决策模型失效。针对这一问题，引入模糊积分理论，构建了灰模糊积分关联度决策模型。为求解该模型，定义了基于属性权重和属性间交互度的默比乌斯变换系数，来计算 2 可加模糊测度，其中属性权重通过序关系分析法和施密特正交马田系统共同确定，属性间的交互关系和交互度由专家确定。以廉租房保障家庭经济状况评估为例，对灰模糊积分关联度决策模型和灰关联度决策模型进行比较验证，验证结果表明灰模糊积分关联度决策模型的决策结果更加科学合理，有较好的应用价值。

关键词：灰关联度；模糊积分；施密特正交马田系统；默比乌斯变换；序关系分析法

中图分类号：C931 **文献标识码**：A

1 引言

灰关联度[1]是灰关联分析的基础，其基本思想是根据序列曲线几何形状的相似程度来判断序列是否联系紧密，曲线越接近，相应序列之间关联度就越大，反之就越小[2]。由于灰关联度对样本的数量和分布规律不做要求，并且计算简便，故广泛应用于多属性决策[3]、因素分析[4]等领域。自从国内学者邓聚龙教授首次提出邓氏关联度以来，大量文献从不同角度提出了很多灰关联度模型，如周期关联度[5]、相似关联度[6]、振幅关联度[7]和凸关联度[8]等。但是这些关联度模型的研究重点主要集中在灰关联系数的构建上，而如何将这些灰关联系数进行有效集成，相关研究则较少。目前主要采用加权平均的方式对灰关联系数进行集成，这种集成方式本质上是以各个属性具有线性独立关系为假设前提的，但是在实际应用中这样的假设条件很难成立。例如，对一个保障家庭的经济状况进行评估，评估属性分别为“家庭消费水平 x_1”、“家庭年均收入 x_2”、“家庭成员工作状况 x_3”、“家庭总资产 x_4”，属性的权重暂设定为 0.10、0.30、0.25 和 0.35。通过分析可知，属性 x_2 和 x_4 具有一定的重复性，如果能合并成一个属性，那么合并后的属性在评估过程中会更加凸显自己的作用；属性 x_1 和 x_4 具有明显的互补性，这两个属性结合在一起能充分说明保障家庭的经济状况，即 $w_1 \cup w_4 > 0.45$。因此在确定属性重要程度时，如果不考虑属性之间客观存在的交互性，而是简单的假设认为属性之间是相互独立，互不影响的，那么将导致评估结果失真。模糊积分[9]是定义在模糊测度基础上的非线性集成算子[10]，它能够考虑属性间存在的交互性，从而为解决上述问题提供了有效工具。为此，本文结合模糊积分理论构建了灰模糊积分关联度决策模型。

收稿日期：2013－05－14；**修订日期**：2014－08－31

基金项目：国家自然科学基金资助项目（71271114，71303004）；教育部人文社会科学青年基金资助项目（12YJK630005）

作者简介：常志朋（1978－），男（汉族），吉林榆树人，安徽工业大学商学院副教授，博士，研究方向：多属性决策、管理综合评价等.

2 模型构建

设 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 为 m 个候选方案，$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 为方案的属性集，候选方案 A_k 关于属性 x_i 的评价值为 $a_k(x_i)$，由此可以得到 m 个候选方案关于 n 个属性的评价矩阵为 $A = [a_k(x_i)]_{m \times n}$，考虑到属性不同量纲对评价结果的影响，需要对效益型和成本型属性数据进行规范化处理，具体公式如下：

$$y_k(x_i) = \frac{a_k(x_i) - \min_k a_k(x_i)}{\max_k a_k(x_i) - \min_k a_k(x_i)} \tag{1}$$

$$y_k(x_i) = \frac{\max_k a_k(x_i) - a_k(x_i)}{\max_k a_k(x_i) - \min_k a_k(x_i)} \tag{2}$$

规范化后的评价矩阵为 $Y = [y_k(x_i)]_{m \times n}$，现在

要选出最优方案。

定义 1[11] 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为属性集，$P(X)$ 是 X 的幂集，集函数 $g:P(X)\to[0,1]$ 满足下面两个条件：

1) $g(\varphi)=0$，$g(X)=1$；

2) $K\in P(X)$，$T\in P(X)$，$K\subseteq T$ 则 $g(K)\leqslant g(T)$；

称 g 是 $P(X)$ 上的一个模糊测度。

1996 年 Grabisch[12] 从伪布尔函数[13] 和默比乌斯变换[14] 出发提出了 k 可加模糊测度，并在此基础之上定义了 2 可加模糊测度。2 可加模糊测度具有较强的表示能力，其计算公式如下[12]：

$$g(K)=\sum_{i\in K}m_i+\sum_{\{i,j\}\subset K}m_{ij}\ ,\ \forall K\subseteq X \tag{3}$$

式(3)中 m_i 是单个属性 x_i 的默比乌斯变换系数，它是一种全局重要程度，m_{ij} 是两两属性 $\{x_i,x_j\}$ 的默比乌斯变换系数，它表示属性 x_i 和 x_j 之间的交互程度。

Choquet 模糊积分[9] 是定义在模糊测度基础上的一种非线性函数，Grabisch[10] 提出将其作为一种集成算子来处理属性间具有交互作用的决策问题。为使灰关联度能够处理属性间的交互作用，本文利用 Choquet 模糊积分定义了灰模糊积分关联度。

定义 2 设 $Y_k=\{y_k(x_i)\mid i=1,2,\cdots,n\}$ 为评价矩阵 Y 的行向量，表示候选方案 A_k 关于属性集 X 的评价向量，称之为系统的行为序列，$Y_0=\{Y_0(x_i)\mid i=1,2,\cdots,n\}$ 为 n 个属性最大值组成的序列，称之为参考序列，令：

$$\gamma_{0k}(x_i)=\frac{\Delta_{\min}+\rho\Delta_{\max}}{\Delta_k(x_i)+\rho\Delta_{\max}} \tag{4}$$

为参考序列 Y_0 与行为序列 Y_k 关于属性 x_i 的灰关联系数，其中：

$\Delta_{\min}=\min\limits_k\min\limits_i|y_0(x_i)-y_k(x_i)|$，$\Delta_{\max}=\max\limits_k\max\limits_i|y_0(x_i)-y_k(x_i)|$，$\Delta_k(x_i)=|y_0(x_i)-y_k(x_i)|$

称：

$$\int\gamma(Y_0,Y_k)dg=\sum_{i=1}^{n}[\gamma_{0k}(x_{(i)})-\gamma_{0k}(x_{(i-1)})]g(X_{(i)}) \tag{5}$$

为序列 Y_0 与 Y_k 的灰模糊积分关联度，其中 (i) 为按照 $\gamma_{0k}(x_{(1)})\leqslant\gamma_{0k}(x_{(2)})\leqslant\cdots\leqslant\gamma_{0k}(x_{(n)})$ 排序后的下标，$X_{(i)}=\{x_{(i)},x_{(i+1)},\cdots,x_{(n)}\}$，$\gamma_{0k}(x_{(0)})=0$，$\rho\in(0,1)$ 为分辨系数，一般取 0.5。

定理 1 灰模糊积分关联度满足灰色关联四公理：

1)规范性：$0<\int\gamma(Y_0,Y_k)dg\leqslant1$，$\int\gamma(Y_0,Y_k)dg=1\Leftarrow Y_0=Y_k$；

2)整体性：$\int\gamma(Y_k,Y_s)dg\neq\int\gamma(Y_s,Y_k)dg$，$k\neq s$；

3)偶对称性：$\int\gamma(Y_k,Y_s)dg=\int\gamma(Y_s,Y_k)dg\Leftrightarrow Y=\{Y_k,Y_s\}$；

4)接近性：$|y_0(x_i)-y_k(x_i)|$ 越小，$\gamma_{0k}(x_i)$ 越大。

证明：

1)规范性。根据式(4)知，若 $\Delta_k(x_i)=\Delta_{\min}$ 可知 $\gamma_{0k}(x_i)=1$；若 $\Delta_k(x_i)\neq\Delta_{\min}$ 可知 $\Delta_k(x_i)>\Delta_{\min}$，从而 $(\Delta_{\min}+\rho\Delta_{\max})<(\Delta_k(i)+\rho\Delta_{\max})$，故 $0<\gamma_{0k}(x_i)\leqslant1$。再由定义 2 可知：

$0=\gamma_{0k}(x_{(0)})<\gamma_{0k}(x_{(1)})\leqslant\gamma_{0k}(x_{(2)})\leqslant\cdots\leqslant\gamma_{0k}(x_{(n)})\leqslant1$，$\varnothing\subset X_{(n)}\subset X_{(n-1)}\subset\cdots\subset X_{(2)}\subset X_{(1)}$

进而，根据模糊测度的有界性和单调性可以得到：

$$0=g(\varphi)<g(X_{(n)})<g(X_{(n-1)})<\cdots<g(X_{(2)})<g(X_{(1)})=1 \tag{6}$$

故，$0<\int\gamma(Y_0,Y_k)dg=\sum\limits_{i=1}^{n}[\gamma_{0k}(x_{(i)})-\gamma_{0k}(x_{(i-1)})]g(X_{(i)})<1$。

进一步根据式(4)知，若 $Y_0=Y_k$ 则 $\gamma_{0k}(x_1)=\gamma_{0k}(x_2)=\cdots=\gamma_{0k}(x_n)$，即：

$\gamma_{0k}(x_{(0)})=\gamma_{0k}(x_{(1)})=\gamma_{0k}(x_{(2)})=\cdots=\gamma_{0k}(x_{(n)})$

当 $\gamma_{0k}(x_{(0)})=\gamma_{0k}(x_{(1)})=\gamma_{0k}(x_{(2)})=\cdots=\gamma_{0k}(x_{(n)})=1$ 时，

$$\int\gamma(Y_0,Y_k)dg=[1-0]g(X_{(1)})+[1-1]g(X_{(2)})+\cdots+[1-1]g(X_{(n)})=g(X_{(1)})$$

又 $g(X_{(1)})=g(X)=1$，故 $\int\gamma(Y_0,Y_k)dg=1$。综上，规范性成立。

2)整体性。一般地 $\max\limits_k\max\limits_i|y_k(x_i)-y_s(x_i)|\neq\max\limits_s\max\limits_i|y_s(x_i)-y_k(x_i)|$，同时

$\min\limits_k\min\limits_i|y_k(x_i)-y_s(x_i)|=\min\limits_s\min\limits_i|y_s(x_i)-y_k(x_i)|=0$

又 $|y_k(x_i)-y_s(x_i)|=|y_s(x_i)-y_k(x_i)|$，故，$\{\gamma_{ks}(x_1),\gamma_{ks}(x_2),\cdots,\gamma_{ks}(x_n)\}$ 和 $\{\gamma_{sk}(x_1),\gamma_{sk}(x_2),\cdots,\gamma_{sk}(x_n)\}$ 有相同的排序，即 $\gamma_{ks}(x_{(1)})\leqslant$

$\gamma_{ks}(x_{(2)}) \leqslant \cdots \leqslant \gamma_{ks}(x_{(n)})$，$\gamma_{sk}(x_{(1)}) \leqslant \gamma_{sk}(x_{(2)}) \leqslant \cdots \leqslant \gamma_{sk}(x_{(n)})$，但是 $\gamma_{sk}(x_{(i)}) \neq \gamma_{ks}(x_{(i)})$，进而相对应的模糊测度相等，即 $g_{ks}(X_{(i)}) = g_{sk}(X_{(i)})$，$i = 1,2,\cdots,n$，由于 $\gamma_{ks}(x_{(0)}) = \gamma_{sk}(x_{(0)}) = 0$ 且 $\gamma_{ks}(x_{(1)}) \neq \gamma_{sk}(x_{(1)})$，故，

$$\sum_{i=1}^{n}[\gamma_{ks}(x_{(i)}) - \gamma_{ks}(x_{(i-1)})]g(X_{(i)}) \neq \sum_{i=1}^{n}[\gamma_{sk}(x_{(i)}) - \gamma_{sk}(x_{(i-1)})]g(X_{(i)})$$

因此，$\int\gamma(Y_k,Y_s)dg \neq \int\gamma(Y_s,Y_k)dg$，$k \neq s$。

3）偶对称性。若 $Y = \{Y_k,Y_s\}$ 可知 $|y_k(x_i) - y_s(x_i)| = |y_s(x_i) - y_k(x_i)|$，进而有

$\gamma_{ks}(x_1) = \gamma_{ks}(x_2) = \cdots = \gamma_{ks}(x_n) = \gamma_{sk}(x_1) = \gamma_{sk}(x_2) = \cdots = \gamma_{sk}(x_n)$

且 $\{\gamma_{sk}(x_k)\}_{i=1}^{n}$ 和 $\{\gamma_{ks}(x_i)\}_{i=1}^{n}$ 有相同的排序，故相对应的模糊测度相等，因此，

$$\int\gamma(Y_k,Y_s)dg = \int\gamma(Y_s,Y_k)dg$$

若 $\int\gamma(Y_k,Y_s)dg = \int\gamma(Y_s,Y_k)dg$，显然 $Y = \{Y_k,Y_s\}$。

4)接近性。显然成立。证毕。

3　模型求解

3.1　定义默比乌斯变换系数

求解灰模糊积分关联度的关键是确定模糊测度，根据公式(3)可知，通过定义默比乌斯变换系数 m_i 和 m_{ij} 可以计算 2 可加模糊测度。由于 m_i 是一种全局重要程度，因此在定义 m_i 时不仅要考虑属性 x_i 的相对重要程度，还要考虑属性 x_i 在所有属性中的重要程度；在定义 m_{ij} 时既要考虑属性 x_i 和 x_j 的相对重要程度和在所有属性中的重要程度，还要考虑属性 x_i 和 x_j 之间的交互度。为此，本文对默比乌斯变换系数 m_i 和 m_{ij} 进行了如下定义：

定义 3 设 $X = \{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为属性集，$W = \{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$ 为属性集 X 的权重集，单个属性 x_i 和两两属性 $\{x_i,x_j\}$ 的默比乌斯变换系数分别为

$$\begin{cases} m_i = \dfrac{w_i}{P} \\ m_{ij} = \dfrac{\xi_{ij}w_iw_j}{P} \end{cases},\ i,j = 1,2,\cdots,n \tag{7}$$

式(7)中 $P = \sum_{i\in X}w_i + \sum_{\{i,j\}\subset X}\xi_{ij}w_iw_j$ 为所有单个属性 x_i 和两两属性 $\{x_i,x_j\}$ 的重要程度之和；ξ_{ij} 为属性 x_i 和 x_j 之间的交互度，$\xi_{ij} \in [-1,1]$。

定理 2　由式(7)计算的模糊测度为 2 可加模糊测度，要满足如下约束条件[12]：

1) $m(\varphi) = 0$；

2) $m_i \geqslant 0$，$\forall i \in X$；

3) $\sum_{i\in X}m_i + \sum_{\{i,j\}\subset X}m_{ij} = 1$；

4) $m_i + \sum_{j\in K\backslash i}m_{ij} \geqslant 0$，$\forall K \subset X$。

证明

1) $m(\varphi) = 0$ 显然成立；

2)由于 $\xi_{ij} = \xi_{ji}$，$\sum_{i=1}^{n}w_i = 1$，故 P 可以进一步写成：

$$P = 1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,i\neq j}^{n}\xi_{ij}w_iw_j = 1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[w_i\sum_{j=1,i\neq j}^{n}\xi_{ij}w_j]$$

又因为 $-1 \leqslant \xi_{ij} \leqslant 1$ 且 $0 \leqslant w_j \leqslant 1$，故

$$-w_j \leqslant \xi_{ij}w_j \leqslant w_j,\ i \neq j \tag{8}$$

再将式(8)两边对 j 求和得：

$$-(1-w_i) \leqslant \sum_{j=1,i\neq j}^{n}\xi_{ij}w_j \leqslant 1-w_i \tag{9}$$

对式(9)两边同乘 w_i 得：

$$-w_i + w_i^2 \leqslant w_i\sum_{j=1,i\neq j}^{n}\xi_{ij}w_j \leqslant w_i - w_i^2 \tag{10}$$

再将式(10)两边对 i 求和得：

$$-1+\sum_{i=1}^{n}w_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}[w_i\sum_{j=1,i\neq j}^{n}\xi_{ij}w_j] \leqslant 1-\sum_{i=1}^{n}w_i^2 \tag{11}$$

故，$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}w_i^2 \leqslant 1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[w_i\sum_{j=1,i\neq j}^{n}\xi_{ij}w_j] \leqslant \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}w_i^2$，即 $P \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}w_i^2 > 0$。

综上，由于 $P > 0$ 且 $w_i \geqslant 0$ 可知，$m_i = w_i/P \geqslant 0$。

3) $\sum_{i\in X}m_i + \sum_{\{i,j\}\subset X}m_{ij} = \sum_{i\in X}\frac{w_i}{P} + \sum_{\{i,j\}\subset X}\frac{\xi_{ij}w_iw_j}{P} = \frac{1}{P}[\sum_{i\in X}w_i + \sum_{\{i,j\}\subset X}\xi_{ij}w_iw_j] = 1$，显然成立；

4) $m_i + \sum_{j\in K\backslash\{i\}}m_{ij} = \frac{w_i}{P} + \sum_{j\in K\backslash\{i\}}\frac{\xi_{ij}w_iw_j}{P} = \frac{1}{P}[w_i + w_i\sum_{j\in K\backslash\{i\}}\xi_{ij}w_j] = \frac{w_i}{P}[1 + \sum_{j\in K\backslash\{i\}}\xi_{ij}w_j]$

由于 $-1 \leqslant \xi_{ij} \leqslant 1$，故 $-(1-w_i) \leqslant \sum_{j\in K\backslash\{i\}}\xi_{ij}w_j \leqslant 1-w_i$，从而有

$$\frac{w_i}{P}[1 + \sum_{j\in K\backslash\{i\}}\xi_{ij}w_j] \geqslant \frac{w_i}{P}[1-(1-w_i)] \geqslant \frac{w_i^2}{P}$$

$\geqslant 0$

故

$$m_i + \sum_{j \in K \setminus i} m_{ij} \geqslant 0 \text{，} \forall K \subset X\text{。证毕。}$$

3.2 计算 2 可加模糊测度

计算属性权重既要考虑决策者的主观偏好信息又要考虑决策数据的客观信息，为此我们将分别计算属性的主观权重和客观权重，然后融合为属性的综合权重。关于属性的主观权重 $\upsilon_i(i=1,2,\cdots,n)$，本文采用序关系分析法[15]计算，该方法不需要进行一致性检验计算较为简便。另外，由于属性权重是一种可加测度，是在属性之间彼此独立的基础上确定的，因此在确定客观权重 $\vartheta_i(i=1,2,\cdots,n)$ 时，要先消除属性间存在的相关性。然而，目前常用的一些客观赋权法，如熵权法[16]、离差最大化法[17]等在确定属性权重时都不能消除属性间客观存在的相关性。针对这一问题，本文利用施密特正交马田系统（Mahalanobis － Taguchi Gram Schmidt ，MTGS）[18]的降维原理提出了一种能够消除属性间相关性的客观权重计算方法，具体方法如下：

首先按照序关系分析法中的重要性排序 $x_1' \succ x_2' \succ \cdots \succ x_n'$，对评价矩阵 A 中的列向量进行重新排序，得评价矩阵 $A' = [a_k(x_i')]_{m\times n}$。为不失一般性和叙述方面，属性顺序仍记为 $x_1 \succ x_2 \succ \cdots \succ x_n$，因此评价矩阵仍记为 $A = [a_k(x_i)]_{m\times n}$。在 MTGS 中，需要收集两类区别明显的样本，一类作为基准样本，另一类作为待测样本。在这里将评价矩阵 A 中的 m 个行向量作为待测样本，将每个属性的最大值和最小值构成的两个评价向量作为基准样本，即：

$$B = \begin{bmatrix} b_1(x_1) & b_1(x_2) & \cdots & b_1(x_n) \\ b_2(x_1) & b_2(x_2) & \cdots & b_2(x_n) \end{bmatrix}$$

其中，$b_1(x_i) = \max\limits_k a_k(x_i)$，$b_2(x_i) = \min\limits_k a_k(x_i)$。

为了测度属性在 MTGS 分类过程中的重要程度，需要用基准样本的均值和标准差去标准化待测样本，即

$$z_k(x_i) = \frac{a_k(x_i) - \hat{\mu}(x_i)}{\hat{s}(x_i)}, k = 1,2,\cdots,m \quad (12)$$

式中 $\hat{\mu}(x_i) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} b_k(x_i)$，$\hat{s}(x_k) = \sqrt{\sum_{k=1}^{2}[b_k(x_i) - \hat{\mu}(x_i)]^2}$，从而得到标准化的矩阵 $Z = [z_k(x_i)]_{m\times n}$。

马氏距离是 MTGS 的类别判断尺度，根据矩阵 Z 可以计算第 k 个待测样品的马氏距离：

$$MD_k^2 = \frac{1}{n} Z_k S^{-1} Z_k^T , k = 1,2,\cdots,m \quad (13)$$

式中 $Z_k = [z_{k1}, z_{k2}, \cdots, z_{kn}]$，$S = \frac{1}{m-1}\sum_{k=1}^{m} Z_k Z_k^T$ 为相关系数矩阵，n 为总体的维数。

由于属性之间可能存在较强的相关性，导致相关系数矩阵 S 不可逆，无法计算马氏距离。为解决这一问题，MTGS 通过对 Z 中的列向量进行施密特正交来消除属性之间的相关性。

记 $Z_i = [z_1(x_i), z_2(x_i), \cdots, z_m(x_i)]^T$，$V_i = [v_1(x_i), v_2(x_i), \cdots, v_m(x_i)]^T$，施密特正交化的过程如下[19]：

$$\begin{cases} V_1 = Z_1 \\ V_2 = Z_2 - \dfrac{Z_2^T V_1}{V_1^T V_1} V_1 \\ \vdots \\ V_n = Z_n - \dfrac{Z_n^T V_1}{V_1^T V_1} V_1 - \cdots - \dfrac{Z_n^T V_{n-1}}{V_{n-1}^T V_{n-1}} V_{n-1} \end{cases} \quad (14)$$

得施密特正交化矩阵 $V = [v_k(x_i)]_{m\times n}$。经过施密特正交后，属性间的相关性被消除，因此矩阵 V 的相关系数矩阵变为

$$S = \begin{bmatrix} s^2(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s^2(x_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s^2(x_n) \end{bmatrix}$$

其中 $s^2(x_i) = \frac{1}{m-1}\sum_{k=1}^{m}[v_k(x_i) - \mu(x_i)]^2$，$\mu(x_i) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} v_k(x_i)$。

马氏距离进而变为：

$$MD_k^2(X) = \frac{1}{n}\left[\frac{v_k^2(x_1)}{s^2(x_1)} + \frac{v_k^2(x_2)}{s^2(x_2)} + \cdots + \frac{v_k^2(x_n)}{s^2(x_n)}\right], k = 1,2,\cdots,m \quad (15)$$

在 MTGS 中，一般用望大型或望小型信噪比来测度任意子属性集 K 的重要程度，这里主要讨论望小型信噪比形式：

$$\eta(K) = -10\lg\left[\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} MD_i^2(K)\right], \forall K \subseteq X \quad (16)$$

上式中 $MD_i^2(K)$ 为利用子属性集 K 计算的第 k 个样品的马氏距离，若 $K = \{x_2, x_3, x_5\}$，则马氏距离为：

$$MD_k^2(x_2, x_3, x_5) = \frac{1}{3}\left[\frac{v_k^2(x_2)}{s^2(x_2)} + \frac{v_k^2(x_3)}{s^2(x_3)} + \frac{v_k^2(x_5)}{s^2(x_5)}\right]$$

表 1　属性 x_i 和 x_j 的交互度打分尺度

交互关系	重复性	重复性	重复性	重复性	相互	互补性	互补性	互补性	互补性
模糊等级	极强	非常强	很强	强	独立	强	很强	非常强	极强
打分标准	−0.90	−0.70	−0.50	−0.30	0	0.30	0.50	0.70	0.90

当用式(16)测度单个属性 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的重要程度时，MTGS 便可以达到降维的目的，这时第 k 个样品的马氏距离为：

$$MD_k^2(x_i)=\frac{v_k^2(x_i)}{s^2(x_i)} \tag{17}$$

为确保单个属性的信噪比非负，需要对式(17)进行规范化：

$$\widehat{MD}_k^2(x_i)=\frac{MD_k^2(x_i)}{\max\limits_k \max\limits_i MD_k^2(x_i)} \tag{18}$$

因此，单个属性 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的重要程度为：

$$\eta(x_i)=-10\lg\left[\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\widehat{MD}_k^2(x_i)\right],\ i=1,2,\cdots,n \tag{19}$$

将式(19)进行归一化得到属性的客观权重：

$$\vartheta_i=\eta(x_i)/\sum_{i=1}^{n}\eta(x_i),\ i=1,2,\cdots,n \tag{20}$$

最后，将属性 x_i 的主观权重 υ_i 和客观权重 ϑ_i 融合为属性的权重：

$$w_i=\upsilon_i\vartheta_i/\sum\nolimits_{i=1}^{n}\upsilon_i\vartheta_i,\ i=1,2,\cdots,n \tag{21}$$

属性 x_i 和 x_j 之间的交互关系和交互度，可以根据专家经验和偏好对 n 个属性进行成对分析，若属性 x_i 和 x_j 之间具有互补性，交互度 $\xi_{ij}>0$ 且 ξ_{ij} 越大互补性越强；若属性 x_i 和 x_j 之间具有重复性，交互度 $\xi_{ij}<0$ 且 ξ_{ij} 越小重复性越强；若属性 x_i 和 x_j 之间彼此独立，交互度 $\xi_{ij}=0$ 。交互度 ξ_{ij} 的打分标准可以参考表 1。

4　案例应用与分析

以廉租房保障家庭退出评估为例来说明本决策模型的使用方法。我国实施廉租房制度以来，越来越多的低收入人群解决了住房问题，但是随之而来的“拒退”和“骗租”现象导致廉租房退出机制失灵，大量公共资源被占用。为全面评估保障家庭的经济状况，做到应退尽退，某市从“消费水平 x_1 ”、“家庭年均收入 x_2 ”、“家庭成员工作状况 x_3 ”、“家庭总资产 x_4 ”4 个维度对 5 个保障家庭的经济状况进行全面评估，其中 x_1 的数据通过社区评估获得，x_2 ，x_3 和 x_4 的数据通过保障家庭申报获得。具体评估数据如下：

$$A=\begin{bmatrix}14000 & 350000 & 0.60 & 0.84\\ 32000 & 110000 & 0.72 & 0.70\\ 25000 & 270000 & 0.45 & 0.85\\ 9000 & 180000 & 0.80 & 0.52\\ 18500 & 160000 & 0.91 & 0.48\end{bmatrix}$$

步骤 1 计算属性的综合权重

1)计算属性的主观权重。首先按照重要性对属性进行排序 $x_2>x_4>x_1>x_3\Rightarrow x_1'>x_2'>x_3'>x_4'$，然后确定属性 x_{i-1}' 与 x_i' 之间的重要程度比分别为 $\upsilon_1'/\upsilon_2'=1.2$ ，$\upsilon_2'/\upsilon_3'=1.6$ ，$\upsilon_3'/\upsilon_4'=1.4$ ，最后计算属性的主观权重分别为：

$$\upsilon_1=0.1910,\upsilon_2=0.3668,\upsilon_3=0.1365,\upsilon_4=0.3057$$

2)计算属性的客观权重

首选，按照属性的重要性对评价矩阵 A 中的列向量进行重新排序，进而构建基准样本矩阵，然后利用式(14)得施密特正交矩阵：

$$V=\begin{bmatrix}0.7071 & 0.1302 & -0.2262 & 0.2786\\ -0.7071 & 0.6727 & -0.0885 & 0.1516\\ 0.2357 & 0.5276 & -0.0969 & -0.1878\\ -0.2946 & -0.3298 & -0.5202 & -0.0856\\ -0.4125 & -0.3929 & 0.0801 & 0.1714\end{bmatrix}$$

再利用式(18)得规范化马氏距离矩阵：

$$\widehat{MD}=\begin{bmatrix}0.2920 & 0.0134 & 0.1892 & 0.3801\\ 0.2920 & 0.3576 & 0.0288 & 0.1127\\ 0.0325 & 0.2200 & 0.0347 & 0.1729\\ 0.0507 & 0.0860 & 1 & 0.0358\\ 0.0994 & 0.1220 & 0.0236 & 0.1440\end{bmatrix}$$

最后，利用式(20)计算单个属性的客观权重为：

$\vartheta_1=0.1993$ ，$\vartheta_2=0.2737$ ，$\vartheta_3=0.2594$ ，$\vartheta_4=0.2676$

3)利用式(21)计算属性的综合权重

$w_1=0.1489$ ，$w_2=0.3927$ ，$w_3=0.1385$ ，$w_4=0.3200$

步骤 2 确定两两属性间的交互度

对属性 x_1 ，x_2 ，x_3 和 x_4 之间存在交互关系进行分析，经过专家反复讨论，参考表 1 的交互度打分尺度，得到两两属性 $\{x_i,x_j\}$ 之间的交互度，具体见表 2。

表 2　两两属性间的交互度

$\{x_1,x_2\}$	$\{x_1,x_3\}$	$\{x_1,x_4\}$	$\{x_2,x_3\}$	$\{x_2,x_4\}$	$\{x_3,x_4\}$
0.25	0.40	0.45	−0.65	−0.85	−0.70

表 3 默比乌斯变换系数

m_1	m_2	m_3	m_4	m_{12}	m_{13}	m_{14}	m_{23}	m_{24}	m_{34}
0.1709	0.4508	0.1590	0.3673	0.0168	0.0095	0.0246	−0.0406	−0.1226	−0.0356

表 4 2 可加模糊测度

K	g_K	K	g_K	K	g_K	K	g_K
{φ}	0	{4}	0.3673	{2,3}	0.5692	{1,2,4}	0.9079
{1}	0.1709	{1,2}	0.6385	{2,4}	0.6955	{1,3,4}	0.6957
{2}	0.4508	{1,3}	0.3394	{3,4}	0.4907	{2,3,4}	0.7783
{3}	0.1590	{1,4}	0.5629	{1,2,3}	0.7664	{1,2,3,4}	1.0000

步骤 3 利用式(7)计算属性的默比乌斯变换系数，见表 3。

步骤 4 利用式(3)计算 2 可加模糊测度，见表 4。

步骤 5 计算灰关联系数矩阵：

首先利用式(1)对评价矩阵 A 进行规范化，然后利用式(4)计算灰关联系数矩阵为

$$\gamma=\begin{bmatrix}0.3898 & 1.0000 & 0.4259 & 0.9488\\ 1.0000 & 0.3333 & 0.5476 & 0.5522\\ 0.6217 & 0.6000 & 0.3333 & 1.0000\\ 0.3333 & 0.4138 & 0.6765 & 0.3592\\ 0.4600 & 0.3871 & 1.0000 & 0.3333\end{bmatrix}$$

步骤 6 利用式(5)计算各决策方案的灰模糊积分关联度分别为：

$\int\gamma(Y_0,Y_1)dg=0.6088$，$\int\gamma(Y_0,Y_2)dg=0.6436$，$\int\gamma(Y_0,Y_3)dg=0.7266$

$\int\gamma(Y_0,Y_4)dg=0.4263$，$\int\gamma(Y_0,Y_5)dg=0.4807$

故 $A_3\succ A_2\succ A_1\succ A_5\succ A_4$，保障家庭 A_3 经济状况最好，需要退出廉租房。

为同灰关联度进行比较，本文基于评价矩阵 A 采用熵权法[16]计算属性的客观权重，属性的主观权重仍然采用 MTGS 计算的结果，然后利用式(21)计算综合权重为：

$w_1'=0.1802$，$w_2'=0.3826$，$w_3'=0.1062$，$w_4'=0.3310$

下面计算灰关联度，即按照公式 $\sum_{i=1}^{n}w_i'\gamma_{0k}(x_i)$ 进行计算得：

$\gamma(Y_0,Y_1)=0.8121$，$\gamma(Y_0,Y_2)=0.5487$，$\gamma(Y_0,Y_3)=0.7080$

$\gamma(Y_0,Y_4)=0.4091$，$\gamma(Y_0,Y_5)=0.4475$

故用灰关联度计算的排序为 $A_1\succ A_3\succ A_2\succ A_5\succ A_4$，保障家庭 A_1 经济状况最好，需要退出廉租房。

从排序结果看，两种模型计算得到的最好经济状况保障家庭并不一致，导致这种结果出现的主要原因是灰关联度并没有考虑属性间存在的交互作用，而是简单假设属性之间是独立的，这样一方面夸大了具有重复性属性集的作用，另一方面又弱化了具有互补性属性集的作用，从而导致同本文方法的排序结果不一致。本文方法逐对分析了两两属性之间的交互关系，使各属性集的重要程度得到充分体现，从而使决策结果更加科学、合理。

5 结语

灰关联度决策模型一般采用线性加权平均算子对灰关联数进行集成，因此属性之间要满足线性独立关系约束。但是在很多实际问题中，线性独立约束条件很难满足，属性之间往往具有一定的重复性或互补性，从而大大降低了灰关联度的决策效果。为破解灰关联度的线性独立约束，本文引入非线性集成算子 Choquet 模糊积分构建了灰模糊积分关联度决策模型，并证明了该决策模型满足灰关联四公理。关于该模型的求解，本文定义了一种基于属性权重和属性间交互度的默比乌斯变换系数，证明结果表明利用该系数计算的模糊测度是 2 可加模糊测度。为兼顾决策者的主观偏好信息和决策数据的客观信息，属性的权重采用主客观权重融合的方式确定。主观权重采用不需要进行一致性检验的序关系分析法计算；关于客观权重的计算，为避免属性相关性对权重的影响，本文根据施密特正交马田系统的降维原理，提出了一种能够消除属性相关性的客观权重计算方法。案例应用验证表明：灰模糊积分关联度相对于灰关联度可以更好地反映属性集在决策过程中的作用，决策结果更加科学合理。

参考文献:

[1] 邓聚龙. 灰色系统的基本方法[M]. 武汉:华中理工大学出版社，1987.

[2] 刘思峰,党耀国,方志耕,等. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京：科学出版社，2010.

[3] 金佳佳,米传民,徐伟宣,等. 考虑专家判断信息的灰色关联极大熵权重模型[J]. 中国管理科学. 2012，20(2)：135－143.

[4] 卫海英,张蕾,梁彦明,等. 多维互动对服务品牌资产的影响——基于灰关联分析的研究[J]. 管理科学学报. 2011，14(10)：43－53.

[5] 施红星,刘思峰,方志耕,等. 灰色周期关联度模型及其应用研究[J]. 中国管理科学. 2008，16(3)：131－136.

[6] 马保国,成国庆. 一种相似性关联度公式[J]. 系统工程理论与实践. 2000，(7)：69－71.

[7] 施红星,刘思峰,方志耕,等. 灰色振幅关联度模型[J]. 系统工程理论与实践. 2010，30(10)：1828－1833.

[8] 吴利丰,王义闹,刘思峰. 灰色凸关联及其性质[J]. 系统工程理论与实践. 2012，32(7)：1501－1505.

[9] Ishii K, Sugeno M. A model of human evaluation process using fuzzy measure[J]. International Journal of Man-Machine Studies. 1985，(22)：19－38.

[10] Grabisch M. Fuzzy integral in multicriteria decision making[J]. Fuzzy Sets and Systems. 1995，69(3)：279－298.

[11] Sugeno M. Theory of fuzzy integral and its applications [D]. Tokyo：Tokyo Institute of Technology，1974.

[12] Grabisch M. K-order additive discrete fuzzy measures and their representation[J]. Fuzzy Sets and Systems. 1997，92(2)：167－189.

[13] Grabisch M，Labreuche C，Vansnick J C. On the extension of Pseudo-Boolean functions for the aggregation of interacting criteria[J]. European Journal of operational Research. 2003，148(1)：28－47.

[14] Chateauneuf A，Jaffray J Y. Some characterizations of lower probabilities and other monotone capacities through the use of mobius inversion[J]. Mathematical Social Sciences. 1989，17(3)：263－283.

[15] 郭亚军. 综合评价理论、方法及应用[M]. 北京：科学出版社，2006.

[16] 邱菀华. 管理决策熵学及其应用[M]. 北京：中国电力出版社，2011.

[17] 徐泽水,孙在东. 一类不确定型多属性决策问题的排序方法[J]. 管理科学学报. 2002，5(3)：35－39.

[18] Taguchi G，Chowdhury S，Wu Y. The Mahalanobis-Taguchi system [M]. New York：McGraw-Hill，2001.

[19] Taguchi G，Jugulum R. The Mahalanobis-Taguchi strategy：A pattern technology system[M]. Hoboken，New Jersge:John Wiley & Sons，2002.

Grey Fuzzy Integral Correlation Degree Decision Model

CHANG Zhi-peng[1] ,CHENG Long-sheng [2]

(1. School of Business，Anhui University of Technology，Maanshan 243002,China;

2. School of Economics & Management，Nanjing University of Science & Technology，Nanjing 219004,China)

Abstract: In grey correlation degree decision model (GRCM)，it is assumed that all the attributes are mutually independent. However，in real decision making problems，the interaction often exists between attributes which leads GRCM to lose effectiveness. For this problem，the fuzzy integral theory is introduced and grey fuzzy integral correlation degree decision model (GRFICM) is established. To solve the model，the Mobius transformation coefficients based on weights and interaction degrees are defined to calculate 2-order additive fuzzy measures. In Mobius transformation coefficients，the weights are determined by the rank correlation analysis method and Mahalanobis-Taguchi Gram-Schmidt jointly，and the interaction relations and interaction degrees are judged by experts. An evaluation of the financial situation of low-rent housing safeguard family is provided as a practical case in order to validate GRCM and GRFICM by comparing. The validation results show that GRFICM makes the decision results more scientific and reasonable，and is more worth of spreading.

Key words: grey correlation degree; fuzzy integral; Mahalanobis-Taguchi Gram-Schmidt; Mobius transformation; rank correlation analysis method