

Birnbaum-Saunders 分布的寿命分散系数

马小兵, 陈钦锋, 张苑馨

(北京航空航天大学 可靠性与系统工程学院, 北京 100191)

摘 要: 研究了基于 Birnbaum-Saunders(B-S)分布的可靠疲劳寿命分析及评估方法,建立了基于中位值和平均值的 B-S 分布寿命分散系数确定方法.并针对特殊试验数据情形,建立了基于最大和最小顺序统计量的 B-S 分布寿命分散系数确定方法.公式表明:随着 B-S 分布尺度参数的增大,其中位寿命分散系数与平均寿命分散系数递减,而最大与最小寿命分散系数不变.案例计算结果表明,B-S 分布的寿命分散系数通常小于对数正态分布的寿命分散系数.

关 键 词: B-S 分布; 疲劳寿命分散性; 顺序统计量; 寿命分散系数; 小子样

中图分类号: V215.7; TB114.3

文献标志码: A

Life scatter factor of Birnbaum-Saunders distribution

MA Xiao-bing, CHEN Qin-feng, ZHANG Yuan-xin

(School of Reliability and Systems Engineering,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: A method for reliable fatigue life analysis and assessment based on Birnbaum-Saunders (B-S) distribution was studied, and life scatter factor formulas of B-S distribution based on median value and mean value was derived respectively. Then, for some special cases of test data, life scatter factor formulas of B-S distribution based on the maximum and minimum order statistics was established. Formulas show that, the median and mean life scatter factors are decreased with the increasing of the scale parameter of B-S distribution, and the maximum and the minimum life scatter factors are constant. Case calculation results show that life scatter factors of B-S distribution are usually less than that of the lognormal distribution's.

Key words: B-S distribution; fatigue life scatter; order statistic; life scatter factor; small sample

目前,国内外普遍采用寿命分散系数来评估结构的安全寿命.文献[1-2]指出双参数威布尔分布对疲劳寿命具有较好的拟合精度,并根据现有基于对数正态分布的寿命分散系数计算公式以及顺序统计量理论,给出了基于双参数威布尔分布的寿命分散系数计算公式.文献[3]采用试验数据验证了复合材料结构的疲劳寿命服从双参数威布尔分布,并提出利用威布尔分布形状参数的众值

数代表复合材料寿命分散参数,推导了基于该参数的寿命分散系数计算公式.大量的理论推导与统计数据验证研究工作表明航空结构的疲劳寿命一般服从对数正态分布,许多零部件,如轴承、起落架等的疲劳寿命都可用对数正态分布来表征^[4-7].关于对数正态分布的寿命分散系数则可通过与正态分布间的对数变换直接建立.除了上述两种用于描述疲劳寿命的分布外,近年来关于B-S

分布的理论研究日益兴起. 而由于 B-S 分布参数估计的复杂性, 其参数估计量的显式表达式难以获得, 致使该分布的工程应用受到了限制. 本文旨在研究 B-S 分布的寿命分散系数及其统计特性.

B-S 分布是 Birnbaum 和 Saunders 在 1969 年研究因裂纹扩展导致材料失效的过程推导出来的, B-S 分布是目前被普遍采用的疲劳寿命分布, 它对材料和结构的疲劳寿命拟合精度较高. 近年来关于 B-S 分布的研究主要是围绕其参数估计方法以及验证这些参数估计结果的准确性^[8-11]. 本文进一步给出基于 B-S 分布的结构疲劳寿命分散系数计算公式. 并基于顺序统计量理论, 推导出表征最大和最小试验数据条件下的寿命分散系数计算公式, 通过试验数据分析了 B-S 分布的寿命分散系数工程适用性, 研究了该分布寿命分散系数与分布参数间的关系.

1 B-S 分布模型

若疲劳寿命 T 服从 B-S(α, β) 分布, 则其分布函数为

$$F(T) = \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \left[\sqrt{\frac{T}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{T}} \right] \right] \quad (1)$$

式中 $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数; α 为形状参数; β 为尺度参数, 且 $\alpha > 0, \beta > 0, T > 0$.

其概率密度函数为

$$f(T) = \frac{1}{\alpha} \cdot \left[\frac{1}{2\sqrt{\beta T}} + \frac{\sqrt{\beta}}{2T\sqrt{T}} \right] \varphi \left[\frac{1}{\alpha} \left[\sqrt{\frac{T}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{T}} \right] \right] \quad (2)$$

式中 $\varphi(\cdot)$ 为标准正态密度函数, 式(2)又可表示为

$$f(T) = \frac{1}{2\alpha\beta\sqrt{2\pi}} \left[\left(\frac{T}{\beta} \right)^{-1/2} + \left(\frac{T}{\beta} \right)^{-3/2} \right] \cdot \exp \left[-\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{T}{\beta} - 2 + \frac{\beta}{T} \right) \right] \quad (3)$$

疲劳寿命 T 的期望与方差分别为

$$E(T) = \beta \left[1 + \frac{\alpha^2}{2} \right] \quad (4)$$

$$\text{var}(T) = (\alpha\beta)^2 \left[1 + \frac{5}{4} \alpha^2 \right] \quad (5)$$

2 疲劳寿命分散性

2.1 寿命分散系数的定义

工程上, 一般寿命分散系数可表示为试验寿

命与安全寿命的比值, 这里的试验寿命可以为中位寿命、平均寿命以及极值条件下的最大寿命或最小寿命, 具体需要根据实际的寿命分布类型进行选择. 而安全寿命是一定可靠度、置信度下的寿命估计值.

实际中, 一般以中位寿命作为试验寿命, 它在保证评估结果准确性的基础上, 还能在一定程度上节约成本. 然而, 在一些特殊情形下, 如: 材料或结构的疲劳寿命试验结果出现异常波动, 为降低评估结果的风险, 也常用最大寿命或最小寿命来计算寿命分散系数.

2.2 寿命分散系数

疲劳寿命的评估精度除了受评估方法、评估模型以及载荷谱的分散性等外因的影响外, 还受到引起疲劳寿命分散性的内在因素的影响, 疲劳寿命分散性的内因一般包括材料与结构的疲劳寿命分散性. 在给定载荷谱条件下, 疲劳寿命的评估精度则主要受结构分散性的影响. 结构的疲劳寿命分散性主要考虑结构材料、制造质量以及制造工艺所引起的结构疲劳寿命波动, 结构的疲劳寿命分散性最直接地反映在给定载荷谱下的疲劳寿命分散性上. 本文基于疲劳寿命的分布来分析材料或结构的疲劳寿命分散性.

寿命分散系数的确定标准并不是唯一的, 大致可总结为以下几类: 中位寿命分散系数、平均寿命分散系数、最小顺序统计量寿命分散系数(下文简称最小寿命分散系数)及最大顺序统计量寿命分散系数(下文简称最大寿命分散系数). 实际应用过程中, 应根据疲劳寿命分布情况合理选择寿命分散系数计算方法, 通常情况都以中位寿命与安全寿命的比值来表示寿命分散系数.

B-S 分布的中位寿命为尺度参数 β , 因此可得到中位值寿命分散系数 $L_{f, \text{median}}$ 为

$$L_{f, \text{median}} = \frac{\beta}{T_R} \quad (6)$$

式中 T_R 为安全寿命.

由文献[12]可以得到 B-S 分布在给定可靠度 R 下的安全寿命为

$$T_R = \beta \left[1 + (\alpha Z_R)^2 / 2 + \alpha Z_R (\alpha^2 Z_R^2 / 4 + 1)^{1/2} \right] \quad (7)$$

式中 $Z_R = \Phi^{-1}(1 - R)$, R 为可靠度指标.

利用区间估计, 可以得到给定置信度 γ 下的尺度参数 β 的置信下限 $\hat{\beta}_{\text{low}}$ ^[13]

$$\begin{cases} \delta_1 = \frac{h^2 AB - nt_{1-\gamma}^2(1-AB) - \sqrt{[h^2 AB - nt_{1-\gamma}^2(1-AB)]^2 - (h^2 B^2 - t_{1-\gamma}^2 D)(h^2 A^2 - t_{1-\gamma}^2 C)}}{h^2 B^2 - t_{1-\gamma}^2 D} \\ \delta_2 = \frac{h^2 AB - nt_{1-\gamma}^2(1-AB) + \sqrt{[h^2 AB - nt_{1-\gamma}^2(1-AB)]^2 - (h^2 B^2 - t_{1-\gamma}^2 D)(h^2 A^2 - t_{1-\gamma}^2 C)}}{h^2 B^2 - t_{1-\gamma}^2 D} \\ \hat{\beta}_{\text{low}, \gamma} = \min[\delta_1, \delta_2] \end{cases} \quad (8)$$

式中 $t_{1-\gamma}(n-1)$ 是自由度为 $n-1$ 的 t 分布的上分位点, $A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{T_i}$, $B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{T_i}}$, $C = \sum_{i=1}^n (\sqrt{T_i} - A)^2$, $D = \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{\frac{1}{T_i}} - B \right)^2$, $h = \sqrt{n(n-1)}$.

利用回归分析及最大似然估计,可推导出尺度

参数 β 的估计值 $\hat{\beta} = \sqrt{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i \right) / \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i} \right)}$.

此时置信因子 u_γ 可表示如下:

$$u_\gamma = \frac{\hat{\beta}}{\hat{\beta}_{\text{low}, \gamma}} \quad (9)$$

将式(8)代入式(9)可得置信因子 u_γ 的具体值.

2.3 常用寿命分散系数

1) 基于中位值的中位寿命分散系数

将式(7)~式(9)代入式(6),可得到基于中位值的中位寿命分散系数公式为

$$L_{t, \text{median}} = \frac{u_\gamma}{1 + (\alpha Z_R)^2 / 2 + \alpha Z_R (\alpha^2 Z_R^2 / 4 + 1)^{1/2}} \quad (10)$$

2) 基于平均值的平均寿命分散系数

用平均值来计算寿命分散系数一般情况下都可以得到很好的效果,令 B-S 分布的疲劳寿命均值为 μ_T , 此时平均寿命分散系数可表示为

$$L_{t, \text{mean}} = \frac{\mu_T}{T_R} \quad (11)$$

将式(8)、式(9)代入式(11),可得到平均寿命分散系数公式为

$$L_{t, \text{mean}} = \frac{u_\gamma (1 + \alpha^2 / 2)}{1 + (\alpha Z_R)^2 / 2 + \alpha Z_R (\alpha^2 Z_R^2 / 4 + 1)^{1/2}} \quad (12)$$

2.4 极值寿命分散系数

极值寿命分散系数一般指基于最小和最大顺序统计量的最小和最大寿命分散系数. 这里的最小和最大指的是顺序统计量里的最小顺序统计量和最大顺序统计量.

顺序统计量是将取自母体中的随机子样按从

小到大排序^[14]. 最小寿命即表示产品寿命的最小顺序统计量,可用 $T_{(1)}$ 表示,它的分布函数为

$$F_{T_{(1)}}(T) = 1 - \left\{ 1 - \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \left[\sqrt{\frac{T}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{T}} \right] \right] \right\}^n \quad (13)$$

在给定置信度 γ 时, $T_{(1)}$ 满足

$$P\{T_{(1)} \leq T\} = \gamma \quad (14)$$

则给定置信度 γ 下的最小寿命为

$$T_{(1)} = \beta [1 + (\alpha Z_1)^2 / 2 + \alpha Z_1 (\alpha^2 Z_1^2 / 4 + 1)^{1/2}] \quad (15)$$

式中 $Z_1 = \Phi^{-1}[1 - (1-\gamma)^{1/n}]$.

同理,可得最大寿命为

$$T_{(n)} = \beta [1 + (\alpha Z_n)^2 / 2 + \alpha Z_n (\alpha^2 Z_n^2 / 4 + 1)^{1/2}] \quad (16)$$

式中 $Z_n = \Phi^{-1}(\gamma^{1/n})$.

基于最小和最大寿命表达式,可推导出基于最小与最大寿命分散系数分别为

$$L_{t, \text{min}} = \frac{1 + (\alpha Z_1)^2 / 2 + \alpha Z_1 (\alpha^2 Z_1^2 / 4 + 1)^{1/2}}{1 + (\alpha Z_R)^2 / 2 + \alpha Z_R (\alpha^2 Z_R^2 / 4 + 1)^{1/2}} \quad (17)$$

$$L_{t, \text{max}} = \frac{1 + (\alpha Z_n)^2 / 2 + \alpha Z_n (\alpha^2 Z_n^2 / 4 + 1)^{1/2}}{1 + (\alpha Z_R)^2 / 2 + \alpha Z_R (\alpha^2 Z_R^2 / 4 + 1)^{1/2}} \quad (18)$$

上述给出的4种寿命分散系数计算公式中,前两种都是把置信度考虑到安全寿命的评估中,而后两种则是把置信度考虑进最大、最小寿命的确定中,虽然计算方法上存在差异,但它们的本质是相同的,不管采用哪种计算方法,都会存在一定的误差,而把置信度考虑到寿命分散系数的评估中则可以使评估的结果更加可信. 需要指出的是在选择寿命分散系数的具体计算方法时,应该结合疲劳寿命的分布类型来进行选择,这样所获得的寿命分散系数更加符合工程实际.

3 案例分析

采用文献[15]提供的轮盘伴随试件疲劳寿命试验数据: 7 219, 8 933, 9 775, 11 065, 11 471, 13 170, 14 298, 14 608(单位:周). 文献[15]中利用对数正态分布来拟合该组数据,对数似然值为

-74.02. 本文采用 B-S 分布来拟合这组数据, 对数似然值为 -10.82, 对数正态分布与 B-S 分布的对数似然比为 $\lambda=6.84$, 在给定制信度 $\gamma=0.95$ 时, 拒绝域大于 3.84, 也就是说利用 B-S 分布拟合该组数据比用对数正态分布拟合精度显著提高。

利用点估计和区间估计可获得 B-S 分布中的形状参数 α 的点估计值为 $\hat{\alpha}=0.246$, 尺度参数 β

的点估计值为 $\hat{\beta}=11026.6$, 给定制信度 $\gamma=0.95$ 条件下的尺度参数 β 的置信下限的点估计值为 $\hat{\beta}_{low,\gamma}=9370.2$ 。

依据文献[15]所给定的可靠度 $R=0.99865$ 的情形, 利用式(10)、式(12)、式(17)、式(18)可计算得到各类寿命分散系数, 具体计算结果如表 1 所示。

表 1 各类寿命分散系数
Table 1 Various life scatter factors

分布类型	寿命分散系数			
	中位寿命分散系数 $L_{f,median}$	平均寿命分散系数 $L_{f,mean}$	最大寿命分散系数 $L_{f,max}$	最小寿命分散系数 $L_{f,min}$
B-S	2.42	2.49	3.75	1.82
对数正态 ^[15]	2.91		5.15	2.11

由表 1 中数据分析可知, 采用不同寿命分散系数法计算得的寿命分散系数是不同的. 本文给出的几类寿命分散系数相对于文献[15]给出的寿命分散系数均要小, 也就是说采用 B-S 分布的寿命分散系数进行疲劳寿命验证与评估能缩短试验时间, 降低试验成本。

此外, 通过分析 B-S 分布的寿命分散系数公式可发现随着尺度参数 β 的增大, 中位寿命分散系数与平均寿命分散系数是递减的, 而最大寿命与最小寿命分散系数则不受尺度参数的影响。

4 结 论

研究给出了 B-S 分布情形下的寿命分散系数计算公式, 包括常见的几类寿命分散系数以及极值寿命分散系数, 为极端试验数据情况下的材料或结构疲劳寿命评估提供了依据。

案例给出了 B-S 分布和对数正态分布在相同可靠度以及置信度下的几类寿命分散系数对比结果, 验证了 B-S 分布在进行疲劳寿命数据分析及寿命分散系数确定方面的合理性。

论文仅针对结构疲劳寿命分散性的内因进行了研究, 寿命分散系数公式中不包含疲劳寿命分散性的外因, 即载荷谱的分散性. 实际应用中可综合考虑结构分散性和载荷谱的分散性进行结构安全寿命的评定。

参考文献:

[1] 王卫国, 卿华, 温卫东. 服从威布尔分布的小子样疲劳寿命

分散系数及其应用[J]. 燃气涡轮试验与研究, 2006, 19(1):39-41.
WANG Weiguo, QING Hua, WEN Weidong. Scatter factor analysis based on the small sample fatigue life of Weibull distribution and its application[J]. Gas Turbine Experiment and Research, 2006, 19(1):39-41. (in Chinese)

[2] 王大伟, 王伟, 冯振宇. 基于模糊积分的航空发动机 MTBF 动态评估方法[J]. 航空动力学报, 2013, 28(5):984-987.
WANG Dawei, WANG Wei, FENG Zhenyu. Dynamic assessment model for MTBF of aero-engine based on fuzzy integral[J]. Journal of Aerospace Power, 2013, 28(5):984-987. (in Chinese)

[3] 全永喆. 复合材料结构验证疲劳分散性及载荷谱简化[D]. 西安: 西北工业大学, 2009.
TONG Yongzhe. Fatigue scatter verification of composite structure and load spectrum simplify [D]. Xi'an: North-western Polytechnical University, 2009. (in Chinese)

[4] 周蓓, 朱如鹏. 国内外飞机疲劳寿命分散系数计算[J]. 机械工程师, 2005(2):50-51.
ZHOU Bei, ZHU Rupeng. Fatigue life scatter factor's computing formulas of airplane structures in countries[J]. Mechanical Engineer, 2005(2):50-51. (in Chinese)

[5] 贺小帆, 刘文珽. 服从不同分布的疲劳寿命分散系数分析[J]. 北京航空航天大学学报, 2002, 28(1):47-49.
HE Xiaofan, LIU Wenting. On scatter factors of fatigue life obeying different distribution[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2002, 28(1):47-49. (in Chinese)

[6] 崔卫民, 诸强, 诸德培. 飞行器结构疲劳寿命分散系数理论值确定的一种方法[J]. 西北工业大学学报, 2001, 19(2):233-236.
CUI Weimin, ZHU Qiang, ZHU Depei. A better method for determining fatigue scatter factor of aircraft structures

- [J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2001, 19(2): 233-236. (in Chinese)
- [7] Rinaldi A, Peralta P. Prediction of scatter in fatigue properties using discrete damage mechanics [J]. International Journal of Fatigue, 2006, 28(9): 1069-1080.
- [8] WU Jianrong, Wong A C M. Improved interval estimation for the two-parameter Birnbaum-Saunders distribution [J]. Computational Statistics and Data Analysis, 2004, 47(1): 809-821.
- [9] Cysneiros A H M A, Cribari-Neto F, Araujo C A G, Jr. On Birnbaum-Saunders inference [J]. Computational Statistics and Data Analysis, 2008, 52(11): 4939-4950.
- [10] Steven G, LI Linxiong. Estimation of the parameters of the Birnbaum-Saunders distribution [J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2006, 35(12): 2157-2169.
- [11] Lemonte A J, Ferrari S L P, Cribari-Neto F. Improved likelihood inference in Birnbaum-Saunders regressions [J]. Computational Statistics and Data Analysis, 2010, 54(5): 1307-1316.
- [12] Rieck J R. A comparison of two random number generators for the Birnbaum-Saunders distribution [J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2003, 32(5): 929-934.
- [13] 孙祝岭. Birnbaum-Saunders 疲劳寿命分布尺度参数的区间估计 [J]. 兵工学报, 2009, 30(11): 1558-1561.
- SUN Zhuling. The confidence intervals for the scale parameter of the Birnbaum-Saunders fatigue life distribution [J]. Acta Armamentarii, 2009, 30(11): 1558-1561. (in Chinese)
- [14] 卢小艳, 陆山. 基于对数正态分布第 k 试验寿命的分散系数法 [J]. 航空动力学报, 2006, 21(4): 738-740.
- LU Xiaoyan, LU Shan. Life scatter factor method based on the k th order experimental life with logarithm normal distribution [J]. Journal of Aerospace Power, 2006, 21(4): 738-740. (in Chinese)
- [15] 陆山, 杨剑秋. 基于小子样最差和最好试验结果的寿命分散系数法 [J]. 机械科学与技术, 2006, 25(1): 99-101.
- LU Shan, YANG Jianqiu. Life scatter factor method based on the worst and the best experiment results of small samples [J]. Mechanical Science and Technology, 2006, 25(1): 99-101. (in Chinese)