中，若厚度 $h$ 对惯性积的影响小于 5% 时，可忽略不计. 此概念应该引起足够重视，以消除中心惯性主轴与转轴出现夹角必有动约束力的印象. 此结论在工程中有重要作用.

### 参 考 文 献


1 郝桐生. 理论力学 (第 3 版). 北京：高等教育出版社，2003

2 贾启芬，刘习军，王春敏. 理论力学. 天津：天津大学出版社，2003

3 哈尔滨工业大学编. 理论力学 (第 6 版). 北京：高等教育出版社，2002

4 张居敏，杨侠，许福东主编. 理论力学. 北京：机械工业出版社，2009

5 张劲夫，秦卫阳. 高等动力学. 北京：科学出版社，2004

6 谢传锋. 动力学. 北京：高等教育出版社，2004

7 刘习军，张素侠，贾启芬. 在动力学教学中应注意的一种特殊情况. 见：孙利民. 力学与工程应用 (第 13 卷). 郑州：郑州大学出版社，2010. 340-343


(责任编辑：胡　漫)

# 变质量系统哈密顿正则方程和哈密顿原理


张九铸 1)

(金川集团公司龙门学校，甘肃金昌 737100)



**摘要**　从理想完整约束变质量系统的拉格朗日方程出发，导出了这种系统的哈密顿正则方程. 从理想约束系统动力学普遍方程出发，导出了理想约束变质量系统哈密顿原理.



**关键词**　理想约束, 变质量系统, 拉格朗日方程, 哈密顿正则方程, 哈密顿原理

**中图分类号**：O313.3　**文献标识码**：A

doi：10.6052/1000-0879-13-542

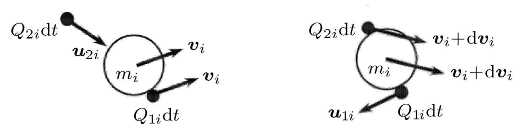

## 1　理想、完整约束变质量系统拉格朗日方程

如图 1 所示，设 $t$ 时刻某区域内有包含 $N$ 个质点的变质量主体，质量微元 $Q_2\mathrm{d}t$ 即将并入其中. $t$ 时刻：变质量主体中第 $i$ $(i=1,2,\cdots,N)$ 个质量瞬间不变的主体质点质量为 $m_i$，速度为 $\boldsymbol{v}_i$；附着于主体质点且即将离开主体质点 (离开或不离开变质量主体) 的质量微元为 $Q_{1i}\mathrm{d}t$，速度为 $\boldsymbol{v}_i$；主体质点之外 (变质量主体之内或之外) 的即将与主体质点结合的质量微元 $Q_{2i}\mathrm{d}t$ 的速度为 $\boldsymbol{u}_{2i}$. $Q_{1i}, Q_{2i}$ 恒正. $t+\mathrm{d}t$ 时刻：主体质点质量仍为 $m_i$, 速度变为 $\boldsymbol{v}_i+\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$；$Q_{1i}\mathrm{d}t$ 刚刚离开主体质点，速度变为 $\boldsymbol{u}_{1i}$；$Q_{2i}\mathrm{d}t$ 刚刚与主体质点结合，速度亦为 $\boldsymbol{v}_i+\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$. 于是第 $i$ $(i=1,2,\cdots,N)$ 个主体质点的动力学方程为

$$m_i\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{F}_i^{(e)}+(\boldsymbol{F}_{1i}-\boldsymbol{v}_{r1i}Q_{1i})+(\boldsymbol{F}_{2i}+\boldsymbol{v}_{r2i}Q_{2i}) \quad (1)$$

式中，$\boldsymbol{F}_i^{(e)}$, $\boldsymbol{F}_{1i}$ 和 $\boldsymbol{F}_{2i}$ 分别是主体质点、$Q_{1i}\mathrm{d}t$ 和 $Q_{2i}\mathrm{d}t$ 受到的三者组成的系统的外力，既包含变质量主体的内力，也包含变质量主体的外力 (比如质量微元 $Q_2\mathrm{d}t$ 的作用力). 现将上述三力的矢量和写成主动力 $\boldsymbol{F}_i$ 与约束力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}$ 两部分，且记

$$\boldsymbol{R}_{1i}=\boldsymbol{v}_{r1i}Q_{1i}\,,\quad \boldsymbol{R}_{2i}=\boldsymbol{v}_{r2i}Q_{2i} \quad (2)$$




$t$ 时刻　　$t+\mathrm{d}t$ 时刻

图 1

然后将式 (1) 变形为达朗伯原理的形式，有

$$\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{Ni}-\boldsymbol{R}_{1i}+\boldsymbol{R}_{2i}+(-m_i\boldsymbol{a}_i)=\boldsymbol{0} \quad (3)$$

再将第 $i$ 个质点的实际加速度 $\boldsymbol{a}_i$ 用可能加速度 $\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 代替，然后用虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_i$ 标乘上式两边，并且就 $N$


本文于 2014–02–14 收到.



1) 张九铸，中学高级教师. E-mail: jcgszhjzh@sohu.com



**引用格式**：张九铸. 变质量系统哈密顿正则方程和哈密顿原理. 力学与实践, 2015, 37(1): 125-128

Zhang Jiuzhu. Hamilton's canonical equation and hamilton's principle for variable mass system. *Mechanics in Engineering*, 2015, 37(1): 125-128

个质点的相似方程求和，假设变质量主体与质量微元 $Q_2\mathrm{d}t$ 组成的系统满足 $\sum\limits_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$，称为理想约束变质量系统，则得到

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i-\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_{1i}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_{2i}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i+\sum_{i=1}^{N}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{4}$$

由式 (4) 可以导出用广义坐标表示的理想约束变质量系统的动力学普遍方程 [1]

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left(Q_\alpha-R_{1\alpha}+R_{2\alpha}-\frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}\frac{\partial^*T}{\partial\dot{q}_\alpha}+\frac{\partial^*T}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha=0 \tag{5}$$

其中, $T$ 是变质量主体的动能; $\dfrac{\partial^*T}{\partial q_\alpha}$, $\dfrac{\partial^*T}{\partial\dot{q}_\alpha}$ 是视 $m_i$ 为常数时对 $q_\alpha$, $\dot{q}_\alpha$ 的偏导数; $\dfrac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}$ 是视 $m_i$ 为常数时对 $t$ 的导数; 而

$$Q_\alpha=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}$$

$$R_{1\alpha}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_{1i}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}$$

$$R_{2\alpha}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_{2i}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}$$

分别是理想约束变质量系统对应于广义坐标 $q_\alpha$ 的广义主动力、广义反推力、广义撞击力.

特别地，如果上述理想约束变质量系统为理想、完整约束系统，则由式 (5) 得到

$$\frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}\frac{\partial^*T}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial^*T}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha-R_{1\alpha}+R_{2\alpha}\quad(\alpha=1,2,\cdots,n)$$

设前述 $\boldsymbol{F}_i$ 中既有具势力又有非具势力, 即

$$Q_\alpha=-\frac{\partial^*V}{\partial q_\alpha}+Q_\alpha^*\quad(\alpha=1,2,\cdots,n)$$

则变为

$$\frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}\frac{\partial^*L}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial^*L}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha^*-R_{1\alpha}+R_{2\alpha}\quad(\alpha=1,2,\cdots,n) \tag{6}$$

## 2 理想、完整约束变质量系统哈密顿正则方程

设 $N$ 个质点组成变质量主体，对应于拉氏变量 $(q_1,q_2,\cdots,q_n,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_n,t)$，拉氏函数为

$$L=L(q_1,q_2,\cdots,q_n;\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_n;t) \tag{7}$$

定义 $n$ 个广义动量

$$p_\alpha=\frac{\partial^*L}{\partial\dot{q}_\alpha}\quad(\alpha=1,2,\cdots,n) \tag{8}$$

构造一个广义能量函数

$$H=\sum_{\alpha=1}^{n}p_\alpha\dot{q}_\alpha-L(q_1,q_2,\cdots,q_n;\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_n;t) \tag{9}$$

再联立式 (8) 中的 $n$ 个方程，解出所有的 $\dot{q}_\alpha$ $(\alpha=1,2,\cdots,n)$, 即求得

$$\dot{q}_\alpha=\dot{q}_\alpha(q_1,q_2,\cdots,q_n;p_1,p_2,\cdots,p_n;t)$$

将其代入式 (9)，使得 $H$ 彻底变成一组新变量 $(q_1,q_2,\cdots,q_n,p_1,p_2,\cdots,p_n,t)$ 即哈密顿变量的函数

$$H=H(q_1,q_2,\cdots,q_n;p_1,p_2,\cdots,p_n;t) \tag{10}$$

求式 (9) 的全微分，并考虑式 (8)，有

$$\mathrm{d}^*H=\sum_{\alpha=1}^{n}\dot{q}_\alpha\mathrm{d}^*p_\alpha-\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^*L}{\partial q_\alpha}\mathrm{d}q_\alpha-\frac{\partial^*L}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{11}$$

求式 (10) 的全微分，又有

$$\mathrm{d}^*H=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^*H}{\partial q_\alpha}\mathrm{d}q_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^*H}{\partial p_\alpha}\mathrm{d}^*p_\alpha+\frac{\partial^*H}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{12}$$

因为新、旧变量下 $H$ 的全微分不变，所以，比较以上 2 式且注意诸 $\mathrm{d}q_\alpha$, $\mathrm{d}^*p_\alpha$, $\mathrm{d}t$ 都相互独立且任意，可以得到

$$\left.\begin{aligned}&\dot{q}_\alpha=\frac{\partial^*H}{\partial p_\alpha}\\&\frac{\partial^*L}{\partial q_\alpha}=-\frac{\partial^*H}{\partial q_\alpha}\\&\frac{\partial^*L}{\partial t}=-\frac{\partial^*H}{\partial t}\\&\qquad(\alpha=1,2,\cdots,n)\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

用式 (6) 消去式 (13) 第 2 式中的 $\dfrac{\partial^*L}{\partial q_\alpha}$，则式 (13) 变为

$$\left.\begin{aligned}&\dot{q}_\alpha=\frac{\partial^*H}{\partial p_\alpha}\\&\frac{\mathrm{d}^*p_\alpha}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial^*H}{\partial q_\alpha}+Q_\alpha^*-R_{1\alpha}+R_{2\alpha}\\&\frac{\partial L}{\partial t}=-\frac{\partial H}{\partial t}\\&\qquad(\alpha=1,2,\cdots,n)\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

式 (14) 前 2 式就是理想、完整约束变质量系统哈密顿正则方程.

## 3 理想约束变质量系统的哈密顿原理

将式 (4) 前 3 项写为

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\delta W\\ \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_{1i}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\delta W_1\\ \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_{2i}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\delta W_2\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

式 (4) 第 4 项

$$\begin{aligned}&-\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\\&\quad-\sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}(m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i)+\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}}_i=\\&\quad-\frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i+\delta^*T\end{aligned}\tag{16}$$

$\delta^*T$ 是视各 $m_i$ 不变时，$T$ 的等时变分. 将式 (15) 和式 (16) 代入式 (4)，得到

$$\delta W-\delta W_1+\delta W_2+\delta^*T=\frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i\tag{17}$$

对式 (17) 从固定时刻 $t_1$、位形 1 到固定时刻 $t_2$、位形 2 进行积分，并考虑

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}\Big[\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i\Big]\mathrm{d}t=\Big[\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i\Big]_{t_1}^{t_2}=0$$

就得到理想约束变质量系统哈密顿原理

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta W-\delta W_1+\delta W_2+\delta^*T)\mathrm{d}t=0\tag{18}$$

再将前述 $\boldsymbol{F}_i$ 分为具势力 $\boldsymbol{F}_{1i}$ $(i=1,2,\cdots,N)$ 和非具势力 $\boldsymbol{F}_{2i}$，且系统势函数负值 (不一定是势能) 为 $V=V(u_1,u_2,\cdots,u_{3N},t)=V(q_1,q_2,\cdots,q_n,t)$，则式 (18) 中的

$$\begin{aligned}\delta W=&\sum_{i=1}^{N}\Big[(\boldsymbol{F}_{1i}+\boldsymbol{F}_{2i})\cdot\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\Big]=\\&\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i=1}^{N}\Big(\boldsymbol{F}_{1i}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}+\boldsymbol{F}_{2i}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\Big)\delta q_\alpha=\\&\sum_{\alpha=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{3N}\boldsymbol{F}_{1j}\frac{\partial u_j}{\partial q_\alpha}+\sum_{j=1}^{3N}F_{2j}\frac{\partial u_j}{\partial q_\alpha}\Big)\delta q_\alpha=\\&\sum_{\alpha=1}^{n}\Big(-\frac{\partial^*V}{\partial q_\alpha}+Q_\alpha^*\Big)\delta q_\alpha\end{aligned}$$

$$\delta W_1=\sum_{i=1}^{N}\Big(\boldsymbol{R}_{1i}\cdot\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\Big)=\sum_{\alpha=1}^{n}R_{1\alpha}\delta q_\alpha$$

$$\delta W_2=\sum_{i=1}^{N}\Big(\boldsymbol{R}_{2i}\cdot\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\Big)=\sum_{\alpha=1}^{n}R_{2\alpha}\delta q_\alpha$$

将以上结果代入式 (18)，得到

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2}\Big[\sum_{\alpha=1}^{n}\Big(-\frac{\partial^*V}{\partial q_\alpha}+Q_\alpha^*\Big)\delta q_\alpha-\\&\quad\sum_{\alpha=1}^{n}R_{1\alpha}\delta q_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{n}R_{2\alpha}\delta q_\alpha+\delta^*T\Big]\mathrm{d}t=0\end{aligned}$$

继而得到用广义坐标表示的理想约束变质量系统哈密顿原理

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2}\Big(\sum_{\alpha=1}^{n}Q_\alpha^*\delta q_\alpha-\sum_{\alpha=1}^{n}R_{1\alpha}\delta q_\alpha+\\&\quad\sum_{\alpha=1}^{n}R_{2\alpha}\delta q_\alpha+\delta^*L\Big)\mathrm{d}t=0\end{aligned}\tag{19}$$

其中，$L$ 是变质量主体的拉氏函数, $\delta^*L$ 是视各 $m_i$ 不变时，$L$ 的等时变分.

## 4 算 例

如图 2 所示，雪橇从静止开始下滑，初始质量为 $m_0$，铲雪速率为 $q=\mathrm{d}m/\mathrm{d}x=c$ (常量). 求雪橇的速度 $v$ 与坐标 $x$ 的关系. 雪橇与雪地之间动摩擦因数为 $f_\mathrm{d}$.

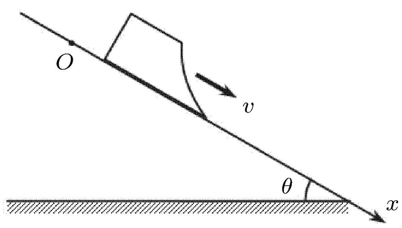



图 2

**解 1** 沿斜面建立如图 2 一维坐标系. 设任一时刻 $t$，雪橇和已经装入的雪组成质量瞬间不变的主体，自由度为 1，以主体坐标 $x$ 为广义坐标. 主体与即将并入其中的质量微元构成理想完整约束系统. 以 $O$ 点为重力势能零点，主体的拉氏函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}(m_0+qx)\dot{x}^2+(m_0+qx)gx\sin\theta \quad (20)$$

注意 $(m_0+qx)$ 不变，广义动量为

$$p_x=\frac{\partial^* L}{\partial\dot{x}}=(m_0+qx)\dot{x}$$

广义能量函数为

$$H=p_x\dot{x}-L=\frac{1}{2}(m_0+qx)\dot{x}^2-(m_0+qx)gx\sin\theta \quad (21)$$

利用上式消去其中 $\dot{x}$，变为

$$H=\frac{p_x^2}{2(m_0+qx)}-(m_0+qx)gx\sin\theta$$

理想完整约束系统的非具势广义主动力

$$Q_x^*=-f_d(m_0+qx)g\cos\theta \quad (22)$$

广义撞击力为

$$R_{2x}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_{r2i}Q_{2i}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}=(0-\dot{x}\boldsymbol{i})\frac{\mathrm{d}(qx)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\partial x\boldsymbol{i}}{\partial x}=-q\dot{x}^2 \quad (23)$$

将以上 3 式代入式 (14) 的第 2 式，注意 $(m_0+qx)$ 不变，有

$$(m_0+qx)\ddot{x}=(m_0+qx)g\sin\theta-f_d(m_0+qx)g\cos\theta-q\dot{x}^2$$

再变为

$$\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}x}+\frac{2q}{m_0+qx}v^2=2g(\sin\theta-f_d\cos\theta) \quad (24)$$

式 (24) 是一个一阶非齐次线性常微分方程，解为 [2]

$$v^2=\frac{2g(\sin\theta-f_\mathrm{d}\cos\theta)}{3q}\left[m_0+qx-\frac{m_0^3}{(m_0+qx)^2}\right]$$

**解 2** 注意主体质量 $(m_0+qx)$ 不变，对拉氏函数式 (20) 求等时变分，有

$$\delta^* L=(m_0+qx)\dot{x}\delta\dot{x}+(m_0+qx)g\sin\theta\cdot\delta x=\frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}[(m_0+qx)\dot{x}\delta x]-(m_0+qx)\ddot{x}\delta x+(m_0+qx)g\sin\theta\cdot\delta x$$

将上式连同式 (22), (23) 代入式 (19)，得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\Big\{-f_d(m_0+qx)g\cos\theta\delta x-q\dot{x}^2\delta x+\frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}[(m_0+qx)\dot{x}\delta x]-(m_0+qx)\ddot{x}\delta x+[(m_0+qx)g\sin\theta]\,\delta x\Big\}\mathrm{d}t=0$$

考虑 $\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}^*(m\dot{x}\delta x)=0$ 及 $\delta x$ 任意，可得式 (24).

## 参 考 文 献

1 梅凤翔. 分析力学：上册. 北京：北京理工大学出版社，2013
2 李复. 力学教程：下册. 北京：清华大学出版社，2011

(责任编辑：胡 漫)