文章编号：1000-4750(2015)01-0010-07

功能梯度 Levinson 圆板弯曲解的均匀化和经典化表示

万泽青，李世荣，李秋全

(扬州大学建筑科学与工程学院，江苏，扬州 225127)

摘　要：基于 Levinson 三阶剪切变形理论，研究了材料性质沿厚度任意连续变化的功能梯度材料圆板的轴对称弯曲问题。首先，建立了功能梯度材料圆板在 Levinson 板理论下轴对称弯曲问题位移形式的控制微分方程，其中考虑了拉-弯耦合和三阶剪切变形效应。然后，利用载荷等效关系以及均匀板的经典理论控制微分方程，导出功能梯度圆板在 Levinson 剪切变形理论下弯曲解与经典理论下均匀圆板的挠度之间的解析转换关系，给出了转换系数的计算公式。由此，可将功能梯度材料圆板在 Levinson 三阶剪切理论下的弯曲问题转化为相应均匀薄圆板在经典理论下的弯曲问题求解，以及转换系数的计算问题。

关键词：功能梯度圆板；Levinson 板理论；轴对称；弯曲解；转换系数

中图分类号：O343.7　　**文献标志码：**A　　doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2013.07.0697

HOMOGENIZED AND CLASSICAL EXPRESSIONS FOR BENDING SOLUTIONS OFFUNCTIONALLY GRADED LEVINSON CIRCULAR PLATES

WAN Ze-qing , LI Shi-rong , LI Qiu-quan

(College of Civil Science and Engineering, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu 225127, China)

Abstract: Based on Levinson’s third-order shear deformation plate theory, axisymmetrical bending of functionally graded material (FGM) circular plates with arbitrary material property variation through the thickness was investigated. First，differential equations were formulated in terms of the displacements governing the axisymmetric bending of the FGM plate under Levinson plate theory. The effects of tension-bending coupling and third-order shear deformation were included in these equations. Then, by using load equivalence relations and the governing differential equation of a homogenous classical plate, the analytical transitional relationship between solutions of FGM circular plates based on the Levinson plate theory and those of the corresponding homogenous ones based on classical plate theory were derived. The analytical formulations of the transition coefficients were given in the expressions. As a result, solutions to static bending of FGM Levinson circular plates can be transformed into those of the corresponding homogenous plates based on classical plate theory and the calculation of the transformation coefficients.

Key words: functionally graded circular plates; Levinson plate theory; axial symmetry; bending solution; transition coefficients

收稿日期：2013-07-30；修改日期：2014-07-12

基金项目：国家自然科学基金项目(11272278)；江苏省研究生科研创新计划项目(CXZZ13_0898)

通讯作者：李世荣(1957－)，男，甘肃人，教授，博士，博导，从事工程力学研究(E-mail: srli@yzu.edu.cn).

作者简介：万泽青(1980－)，男，江苏人，博士生，从事工程力学研究(E-mail: zqwan@yzu.edu.cn)；

李秋全(1987－)，男，广东人，硕士生，从事结构工程研究(E-mail: 369972547@qq.com).

功能梯度材料(Functionally graded materials, FGM)作为一种新型的可设计性非均匀复合材料已被广泛应用于现代科技和工业领域。功能梯度材料梁板壳构件的宏观力学行为研究也已经成为固体力学的一个新的活跃分支[1−2]。材料性质在横向的非均匀性导致了功能梯度结构的应力在横向分布的复杂性,表现出与均匀材料结构不同的特性。例如，在变形过程中会产生拉-弯耦合效应。从而，使得 FGM 结构的弯曲、屈曲和振动等宏观力学行为的分析要比相应的均匀材料结构复杂得多。人们将熟悉的针对均匀材料结构而发展起来的理论分析方法和数值计算手段推广应用于 FGM 结构的宏观力学行为分析，研究 FGM 结构的静动态响应，考察材料非均匀特性对结构力学行为的影响。例如，研究者分别基于经典理论[3−5]、一阶剪切理论[6−9]、高阶剪切理论[10−11]以及三维弹性理论[12−17]，采用多种解析和数值方法研究了功能梯度板结构的静动态响应。

基于经典板理论，文献[3－5]的作者研究了 FGM 板的宏观静动态响应。Zhang 和 Zhou[3]通过引入物理中面消去控制方程中的拉-弯耦合项，得到了与均匀薄板相似的 FGM 板的控制方程，分别求得了均布横向载荷作用下周边夹紧 FGM 圆板的轴对称弯曲挠度以及周边简支 FGM 矩形板的固有频率和屈曲临界载荷的解析解。李世荣等[4−5]通过解析方法推导出了 FGM 板与参考均匀板的挠度、临界载荷和固有频率之间的相似转换关系，给出比例系数的解析式，并且证明了该比例关系与边界条件和载荷工况无关。

文献[6－9]基于一阶剪切理论研究了 FGM 板的宏观力学行为。Reddy 等[6]利用载荷等效条件推导出了 FGM 圆板轴对称静力弯曲解析解。王铁军等[7]研究了横向均布载荷和升温共同作用下 FGM 圆板轴对称弯曲问题，获得了四种边界条件下的解析解。Croce 和 Venini[8]采用有限元法研究了功能梯度 Mindlin 矩形板在热-机载荷作用下的静力弯曲问题。分析文中的挠度-载荷关系可见对给定的梯度变化指数，FGM 板与均匀板的中点挠度近似成比例。与上述研究不同，文献[9]通过分析和建立位移形式的轴对称弯曲控制微分方程之间的关系，导出了 FGM 圆板一阶剪切理论解与相应参考均匀圆板的经典理论解之间线性转换关系，给出了其中的无量纲转换系数的解析计算公式。

为了更加精确地反映面内位移在厚度方向的变化，提高对厚板横向剪切变形的分析精度，不少研究者采用了高阶剪切理论[10−11]研究 FGM 厚板的宏观力学行为。Ma 和 Wang[10]在文献[6－7]的基础上，获得了 Reddy 三阶剪切理论下 FGM 圆板的轴对称弯曲、屈曲解析解与经典理论解的关系。Sahraee 和 Saidi[11]将 FGM 厚圆板径向位移假设为厚度方向坐标的完全四次多项式(可谓四阶剪切理论)，得到了圆板轴对称弯曲解析解。数值结果表明在 h/R=1/5(厚度与半径比)时，三种剪切理论解之间的误差小于 1%。在 h/R=1/3 时，误差也不超过 5%。

为了尝试更加精确的理论分析精度，文献[12－17]基于三维弹性理论研究了 FGM 板的静动态响应。Zhong 和 Shang[12]等分析了压电功能梯度材料矩形板的热电弹性响应。假设物性参数随厚度按指数函数变化，给出了热-机-电复合载荷作用下四边简支 FGM 矩形板的双 Fourier 级数形式的弹性力学解析解。郑磊和仲政[13]通过将位移势函数展成傅里叶-贝塞尔函数的级数形式求解了弹性支承 FGM 圆板轴对称弯曲弹性力学解析解。Wang 等[14−15]通过将横向载荷展为傅里叶-贝塞尔函数级数的方法分别给出了 FGM 圆板和 FGM 磁-电-弹圆板的轴对称弯曲弹性力学精确解。分析上述文献中弹性力学理论意义下 FGM 板弯曲响应的数值结果，同样发现功能梯度材料板与均匀板的宏观力学响应成近似比例关系，近似程度受板的厚度与面内尺寸的比值影响。与上述文献中研究方式不同，Abrate[16−17]采用曲线拟合的办法，分析了部分文献中数值结果，考察了 FGM 板与均匀板的静动态响应之间的关系。他发现 FGM 板的弯曲挠度、固有频率以及临界载荷与相应的均匀板的对应物理量之间存在近似的比例关系。

实际上，板的各种剪切理论反映了对经典理论解答的不同精度的修正，而其中包含的经典理论解答是宏观力学响应的主要部分。在文献[9,18]的基础上，本文进一步研究材料性质沿横向连续变化的功能梯度材料圆板在 Levinson 三阶剪切理论下的静态弯曲解答与经典理论下对应的均匀薄板的挠度之间的关系。首先建立 FGM Levinson 圆板轴对称弯曲位移形式的平衡方程，通过载荷等效关系寻找 FGM 圆板与均匀圆板控制方程之间的关系，并进一步推导弯曲解答之间的解析转换关系，给出转换系数的计算公式。从而将 FGM Levinson 圆板弯曲问题的求解转化为同样几何尺寸、载荷工况和边界条

件下的均匀材料圆板在经典理论下的弯曲问题的求解，实现功能梯度材料板的弯曲解的经典化和均匀化表示，从而大大简化问题的求解难度和复杂程度，为工程应用提供便捷途径。

1 问题的基本方程

考虑一半径为a、厚度为h的功能梯度材料圆板，假设其材料性质沿厚度方向连续变化。在柱坐标系(r,θ,z)中研究圆板的静态弯曲响应，其中r,θ分别为径向和环向坐标，z为横向坐标，坐标原点置于变形前板的几何中面的形心。在作用于圆板的载荷和约束均为轴对称情况下，研究功能梯度材料圆板在 Levinson 三阶剪切理论意义下的轴对称弯曲问题。与 Reddy 三阶剪切板理论一样，Levinson 三阶剪切板理论假设径向位移是厚度方向坐标的三次多项式，故避免了像 Mindlin 一阶剪切板理论那样需要进行剪切修正。

1.1 几何方程

根据三阶剪切理论，圆板内任意点的径向位移$u(r,z)$和横向位移$w(r,z)$可分别表示为[10]：

$$u(r,z)=u_0(r)+z\varphi(r)-\alpha z^3\left(\frac{\mathrm{d}w_0}{\mathrm{d}r}+\varphi\right) \tag{1a}$$

$$w(r,z)=w_0(r) \tag{1b}$$

其中：$\alpha=4/(3h^2)$；$u_0(r)$、$w_0(r)$分别为几何中面内一点的径向位移和横向位移；$\varphi(r)$为横截面法线在θ等于常数的平面内的转角。根据小变形理论的几何方程，可得应变与位移之间的关系：

$$\varepsilon_r=\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}r}+z\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}-\alpha z^3\left(\frac{\mathrm{d}^2w_0}{\mathrm{d}r^2}+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right) \tag{2a}$$

$$\varepsilon_\theta=\frac{u_0}{r}+z\frac{\varphi}{r}-\frac{\alpha z^3}{r}\left(\frac{\mathrm{d}w_0}{\mathrm{d}r}+\varphi\right) \tag{2b}$$

$$\gamma_{rz}=(1-3\alpha z^2)\left(\frac{\mathrm{d}w_0}{\mathrm{d}r}+\varphi\right) \tag{2c}$$

其中：ε_r、ε_θ分别为板内任意一点(r,θ,z)的径向和环向正应变；γ_{rz}为横向剪切应变。

1.2 物理方程

考虑材料为线弹性，与上述应变对应的应力可表示为：

$$\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \tau_{rz}\end{Bmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\\ \gamma_{rz}\end{Bmatrix} \tag{3}$$

其中，弹性模量E和泊松比ν为坐标z的函数。通常功能梯度板的泊松比变化不太大，这里可假设为常数。将式(2)代入式(3)，并沿板厚度作下列积分：

$$(N_r,N_\theta,M_r,M_\theta)=\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_r,\sigma_\theta,z\sigma_r,z\sigma_\theta)\mathrm{d}z \tag{4a}$$

$$Q_r=\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{rz}\mathrm{d}z \tag{4b}$$

可得用位移表示的薄膜力、弯矩以及剪力表达式：

$$N_r=S_0\left(\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}r}+\nu\frac{u_0}{r}\right)+S_1\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}+\nu\frac{\varphi}{r}\right)-\alpha S_3\left[\frac{\mathrm{d}^2w_0}{\mathrm{d}r^2}+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}+\frac{\nu}{r}\left(\frac{\mathrm{d}w_0}{\mathrm{d}r}+\varphi\right)\right] \tag{5a}$$

$$N_\theta=S_0\left(\frac{u_0}{r}+\nu\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}r}\right)+S_1\left(\frac{\varphi}{r}+\nu\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right)-\alpha S_3\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\mathrm{d}w_0}{\mathrm{d}r}+\varphi\right)+\nu\left(\frac{\mathrm{d}^2w_0}{\mathrm{d}r^2}+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right)\right] \tag{5b}$$

$$M_r=S_1\left(\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}r}+\nu\frac{u_0}{r}\right)+S_2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}+\nu\frac{\varphi}{r}\right)-\alpha S_4\left[\frac{\mathrm{d}^2w_0}{\mathrm{d}r^2}+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}+\frac{\nu}{r}\left(\frac{\mathrm{d}w_0}{\mathrm{d}r}+\varphi\right)\right] \tag{6a}$$

$$M_\theta=S_1\left(\frac{u_0}{r}+\nu\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}r}\right)+S_2\left(\frac{\varphi}{r}+\nu\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right)-\alpha S_4\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\mathrm{d}w_0}{\mathrm{d}r}+\varphi\right)+\nu\left(\frac{\mathrm{d}^2w_0}{\mathrm{d}r^2}+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right)\right] \tag{6b}$$

$$Q_r=S_{rz}\left(\frac{\mathrm{d}w_0}{\mathrm{d}r}+\varphi\right) \tag{7}$$

其中刚度系数定义分别为：

$$S_i=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{E}{1-\nu^2}z^i\mathrm{d}z,\quad i=0,1,2,3,4 \tag{8}$$

$$S_{rz}=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{E}{2(1+\nu)}(1-3\alpha z^2)\mathrm{d}z \tag{9}$$

上述刚度系数可分别表示为：

$$S_i=A_{\mathrm{b}}h^i\phi_i,\quad i=0,1,3,4 \tag{10a}$$

$$S_2=D_{\mathrm{b}}\phi_2 \tag{10b}$$

$$S_{rz}=A_{\mathrm{b}}\phi_{rz} \tag{10c}$$

其中：

$$A_{\mathrm{b}}=\frac{E_{\mathrm{b}}h}{1-\nu^2},\ D_{\mathrm{b}}=\frac{E_{\mathrm{b}}h^3}{12(1-\nu^2)} \tag{11}$$

分别为参考均匀板的拉伸刚度和弯曲刚度；ϕ_i、ϕ_{rz}为无量纲系数。

板的弹性模量可表示为：

$$E(z)=E_{\mathrm{b}}\psi_E(\xi) \tag{12}$$

其中：$\xi = z/h$；$E_{\mathrm{b}} = E(-h/2)$为参考均匀板的弹性模量；$\psi_E(\xi)$为坐标ξ(或z)的连续函数。于是可给出无量纲系数ϕ_i、ϕ_{rz}的计算公式：

$$\phi_i = \int_{-1/2}^{1/2} \psi_E(\xi)\xi^i \mathrm{d}\xi \text{，} i = 0,1,3,4 \tag{13a}$$

$$\phi_2 = 12\int_{-1/2}^{1/2} \xi^2 \psi_E(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{13b}$$

$$\phi_{rz} = \frac{1-\nu}{2}\int_{-1/2}^{1/2}(1-4\xi^2)\psi_E(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{13c}$$

对于材料性质在横向按幂函数变化，则函数ψ_E可表示为[6,8−9]：

$$\psi_E(\xi) = 1 + \eta\left(\frac{1}{2} + \xi\right)^p \tag{14}$$

其中：$0 \leqslant p < \infty$；$\eta = r_E - 1$；$r_E = E_{\mathrm{t}}/E_{\mathrm{b}}$；$E_{\mathrm{t}} = E(h/2)$。

如果材料性质按指数函数变化，函数ψ_E可表示为[9,19]：

$$\psi_E(\xi) = \mathrm{e}^{\chi(\xi+1/2)} \tag{15}$$

其中，$\chi = \ln r_E$。分别将式(14)和式(15)代入式(13)，可得无量纲系数ϕ_i、ϕ_{rz}的解析表达式(见附录)。

1.3　平衡方程

Levinson 三阶剪切理论与 Reddy 三阶剪切理论不同之处是前者不考虑高阶弯矩和剪力，等效内力的平衡方程与经典板平衡方程相同。因此，FGM 圆板的轴对称静力学平衡方程为[9,20]：

$$\frac{\mathrm{d}N_r}{\mathrm{d}r} + \frac{N_r - N_\theta}{r} = 0 \tag{16}$$

$$\frac{\mathrm{d}M_r}{\mathrm{d}r} + \frac{M_r - M_\theta}{r} = Q_r \tag{17}$$

$$\frac{\mathrm{d}Q_r}{\mathrm{d}r} + \frac{Q_r}{r} + q = 0 \tag{18}$$

其中，$q = q(r)$为横向分布载荷。

2　位移形式的控制方程

为讨论方便，采用下列无量纲变换：

$$(x,U,W,\delta) = \frac{1}{a}(r,u_0,w_0,h) \tag{19}$$

$$(Q,n_x,n_\theta,m_x,m_\theta,q_x) = \frac{a}{D_{\mathrm{b}}}(qa^2,aN_r,aN_\theta,M_r,M_\theta,aQ_r) \tag{20}$$

将式(5)~式(7)代入式(16)~式(18)整理可得位移形式的平衡微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\left(U + \delta\frac{\phi_1}{\phi_0}\varphi - \frac{4\delta\phi_3}{3\phi_0}\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} + \varphi\right)\right) = 0 \tag{21}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\left(\phi_1 U + \frac{\delta\phi_2}{12}\varphi - \frac{4\delta}{3}\phi_4\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} + \varphi\right)\right) = \frac{\phi_{rz}}{\delta}\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} + \varphi\right) \tag{22}$$

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} + \varphi\right) = -\frac{\delta^2}{12\phi_{rz}}Q \tag{23}$$

由式(21)积分可求得中面位移：

$$U = -\delta\frac{\phi_1}{\phi_0}\varphi + \frac{4\delta\phi_3}{3\phi_0}\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} + \varphi\right) + \beta_5 x + \frac{\beta_6}{x} \tag{24}$$

其中，β_5、β_6为积分常数。将式(24)代入式(22)消去径向位移U可得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\left[\frac{\varphi}{c} + c_\alpha\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} + \varphi\right)\right] = \frac{1}{c_s}\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} + \varphi\right) \tag{25}$$

其中：

$$c = \frac{1}{\phi_2 - 12\phi_1^2/\phi_0} \tag{26a}$$

$$c_\alpha = 16\left(\frac{\phi_1\phi_3}{\phi_0} - \phi_4\right) \tag{26b}$$

$$c_s = \frac{\delta^2}{12\phi_{rz}} \tag{26c}$$

这里引入了三个无量纲参数c、c_α和c_s来反映材料非均匀性和剪切变形对 FGM Levinson 板的弯曲解的影响。其中无量纲参数c、c_α与材料性质梯度变化规律有关；参数c_s不仅与材料性质梯度变化规律有关，还与板的几何特性(厚度与半径比值)有关。

利用式(23)消去式(25)中的无量纲挠度可得只包含转角φ的微分方程：

$$\nabla^2\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\varphi\right) = \lambda_\alpha\nabla^2 Q - cQ \tag{27}$$

其中：$\nabla^2 = \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$为极坐标系下轴对称形式的 Laplace 微分算子；$\lambda_\alpha = cc_\alpha c_s$综合反映了材料非均匀性以及高阶剪切变形的影响。

3　问题的通解

设$W_c^*(x)$为同样载荷工况和约束条件下参考均匀材料圆板在经典理论下的无量纲挠度特解。于是它满足控制方程：

$$\nabla^2\nabla^2 W_c^* = Q \tag{28}$$

同时还满足相同约束下经典理论意义下的边界条件。利用载荷等效关系，将式(28)代入式(27)可得：

$$\nabla^2\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\varphi\right)=\lambda_\alpha\nabla^2\nabla^2\nabla^2W_c^*-c\nabla^2\nabla^2W_c^* \quad (29)$$

通过对式(29)积分，可求得 FGM Levinson 圆板转角的通解：

$$\varphi=c\varphi_c^*-\lambda_\alpha q_{xc}^*+\frac{\beta_1}{4}x(2\ln x-1)+\frac{\beta_2}{2}x+\frac{\beta_3}{x} \quad (30a)$$

其中：β_1、β_2 和 β_3 为积分常数；$\varphi_c^*(x)$ 和 $q_{xc}^*(x)$ 分别为均匀板在经典理论下的转角和无量纲剪力，它们分别被定义为：

$$\varphi_c^*(x)=-\frac{\mathrm{d}W_c^*}{\mathrm{d}x} \quad (30b)$$

$$q_{xc}^*(x)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\nabla^2W_c^*(x) \quad (30c)$$

利用式(23)和式(28)可将式(25)表示为：

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}=-\varphi+\frac{c_s}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\varphi-c_s^2c_\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\nabla^4W_c^* \quad (31)$$

然后将式(30a)代入式(31)积分可得 FGM Levinson 圆板轴对称挠度的通解：

$$W=cW_c^*-(c_s+\lambda_\alpha)\nabla^2W_c^*+W_1 \quad (32a)$$

其中：

$$W_1=-\frac{\beta_1x^2}{4}(\ln x-1)-\frac{\beta_2}{4}x^2-\beta_3\ln x+\beta_4+\frac{c_s}{c}(\beta_1\ln x+\beta_2) \quad (32b)$$

为齐次方程的通解，β_4 为积分常数。

如果令 $\alpha=0$，$c_\alpha=0$，$c_s=\delta^2/[6\kappa\phi_0(1-\nu)]$，$\kappa=5/6$，则式(30)和式(32)退化为一阶剪切理论下 FGM 板解答与均匀板的经典解之间的转换关系[9]。由于挠度 $W_c^*(x)$ 已经满足相同载荷下均匀薄板的边界条件，因此，式(30)和式(32)中的积分常数实际上由剪切变形理论与经典理论在边界条件上的差异来确定。

如果忽略剪切变形，或令 $\delta=0$，则有 $\beta_i\equiv0\,(i=1,2,3,4)$。于是，式(30)、式(32)退化为功能梯度薄板的经典理论解[4]：

$$\varphi=c\varphi_c^*,\quad W=cW_c^* \quad (33)$$

由式(33)可见，在经典理论下功能梯度圆板与均匀圆板的挠度成比例关系，比例系数完全由材料性质变化规律确定，与载荷工况和边界支承条件无关。然而，由式(32)可知在考虑剪切变形后，功能梯度圆板的挠度与均匀板的挠度之间不存在类似于经典理论下的解答的转换关系式(33)，即 $W\neq cW^*$，其中 W^* 是剪切理论下均匀板的挠度。显然，对于考虑了横向剪切变形的功能梯度材料板，上述比例关系只能是近似的。由于积分常数的确定与 cW_c^* 项无关，系数 c_s 中包含 δ^2 因子，因此在式(32)中功能梯度圆板的经典理论解答部分(cW_c^*)始终占有绝对主导部分，其余部分则是剪切变形理论对经典解答的修正，剪切修正部分与 δ^2 成正比。

式(30)和式(32)给出了非均匀 Levinson 圆板的弯曲解答与经典理论下均匀材料圆板的挠度之间的转换关系解析式。利用这一转换关系，可以避免求解由于材料横向非均匀以及剪切变形效应而导致的耦合微分方程组式(21)~式(23)，通过计算出反映材料非均匀性质和剪切变形效应的系数 c、c_α、c_s，就可以直接利用熟知的均匀材料板的经典理论解答来获得非均匀圆板的高阶剪切变形理论解答，从而实现了非均匀圆板剪切理论解的均匀化和经典化表示。

4 无量纲内力解答

利用无量纲变换式(20)，并将解答式(24)、式(30)和式(32)代入式(5)~式(7)，可得等效内力解答：

$$n_x=\frac{12\phi_0}{\delta^2}\left((1+\nu)\beta_5-(1-\nu)\frac{\beta_6}{x^2}\right) \quad (34a)$$

$$n_\theta=\frac{12\phi_0}{\delta^2}\left((1+\nu)\beta_5+(1-\nu)\frac{\beta_6}{x^2}\right) \quad (34b)$$

$$m_x=m_{xc}^*+m_{xs} \quad (35a)$$

$$m_\theta=m_{\theta c}^*+m_{\theta s} \quad (35b)$$

$$q_x=q_{xc}^*+q_{xs} \quad (36)$$

其中：m_{xc}^*、$m_{\theta c}^*$ 和 q_{xc}^* 分别为均匀板在经典理论下的无量纲弯矩和剪力；m_{xs}、$m_{\theta s}$ 和 q_{xs} 分别为弯矩和剪力的剪切修正部分，具体表达式为：

$$m_{xc}^*=-\left(\frac{\mathrm{d}^2W_c^*}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\nu}{x}\frac{\mathrm{d}W_c^*}{\mathrm{d}x}\right) \quad (37a)$$

$$m_{\theta c}^*=-\left(\nu\frac{\mathrm{d}^2W_c^*}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}W_c^*}{\mathrm{d}x}\right) \quad (37b)$$

$$q_{xc}^*=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\nabla^2W_c^* \quad (38a)$$

$$q_{xs}=\frac{\beta_1}{cx} \quad (38b)$$

$$m_{xs}=\frac{1}{c}\left\{\frac{\beta_1}{4}[(2\ln x+1)+\nu(2\ln x-1)]+\right.$$

$$\frac{\beta_2}{2}(1+\nu)-\frac{\beta_3}{x^2}(1-\nu)\bigg\}-\frac{c_s c_\alpha}{c}(1-\nu)\frac{\beta_1}{x^2}+$$
$$\frac{12\phi_1}{\delta}\left[\beta_5-\frac{\beta_6}{x^2}+\nu\left(\beta_5+\frac{\beta_6}{x^2}\right)\right] \quad (39a)$$

$$m_{\theta s}=\frac{1}{c}\bigg\{\frac{\beta_1}{4}[\nu(2\ln x+1)+(2\ln x-1)]+$$
$$\frac{\beta_2}{2}(1+\nu)+\frac{\beta_3}{x^2}(1-\nu)\bigg\}+\frac{c_s c_\alpha}{c}(1-\nu)\frac{\beta_1}{x^2}+$$
$$\frac{12\phi_1}{\delta}\left[\nu\left(\beta_5-\frac{\beta_6}{x^2}\right)+\beta_5+\frac{\beta_6}{x^2}\right] \quad (39b)$$

利用式(34)~式(36)即可表示出与解答式(30)、式(32)相关的自然边界条件，便于具体问题的求解。

5　具体问题的特解

对于横向载荷作用下圆板(环板)的小挠度弯曲问题，可利用薄膜内力为零的条件由式(34)可得 $\beta_5=\beta_6=0$。对于实心圆板，利用 $W(0)$ 有限和 $\varphi(0)=0$ 的条件，由式(30)和式(32)可得 $\beta_1=\beta_3=0$。

5.1　周边可移简支圆板的解答

对于周边可移简支圆板，利用边界条件 $W(1)=0$，$m_x(1)=0$，并考虑到均匀薄板的挠度已经满足边界条件 $W_c^*(1)=0$，$m_{xc}^*(1)=0$，由式(30)、式(35)和式(39)可得积分常数 $\beta_2=0$，$\beta_4=-(c_s+\lambda_\alpha)m_c^*(1)$，其中 $m_c^*=(m_{xc}^*+m_{\theta c}^*)/(1+\nu)=-\nabla^2 W_c^*$。于是得到任意轴对称载荷作用下周边可移简支圆板的解答：

$$\varphi=c\varphi_c^*-\lambda_\alpha q_{xc}^* \quad (40a)$$
$$W=cW_c^*+(c_s+\lambda_\alpha)\left(m_c^*(x)-m_c^*(1)\right) \quad (40b)$$
$$n_x=n_\theta=0 \quad (41a)$$
$$m_x=m_{xc}^*,\quad m_\theta=m_{\theta c}^* \quad (41b)$$
$$q_x=q_{xc}^* \quad (41c)$$

在单位均布载荷($Q=1$)作用情况下，相应的无量纲挠度解为：

$$W=\frac{1}{64}\bigg[c\left(x^4-\frac{2(3+\nu)}{1+\nu}x^2+\frac{5+\nu}{1+\nu}\right)+$$
$$16(c_s+\lambda_\alpha)(1-x^2)\bigg] \quad (42)$$

5.2　周边可移夹紧圆板的解答

周边可移夹紧圆板的边界条件为 $W(1)=0$，$\varphi(1)=0$。考虑到 $W_c^*(x)$ 已经满足边界条件 $W_c^*(1)=0$，$\varphi_c^*(1)=0$，利用式(30)和式(32)可得：

$$\beta_2=-2\lambda_\alpha q_{xc}^*(1) \quad (43a)$$
$$\beta_4=-\left(\frac{1}{2}-\frac{2c_s}{c}\right)\lambda_\alpha q_{xc}^*(1)-(c_s+\lambda_\alpha)m_c^*(1) \quad (43b)$$

于是得到任意轴对称载荷作用下周边可移夹紧圆板的解答：

$$\varphi=c\varphi_c^*-\lambda_\alpha[q_{xc}^*(x)-q_{xc}^*(1)x] \quad (44a)$$
$$W=cW_c^*+(c_s+\lambda_\alpha)(m_c^*(x)-m_c^*(1))+$$
$$\frac{\lambda_\alpha}{2}q_{xc}^*(1)(1-x^2) \quad (44b)$$
$$m_x=m_{xc}^*-c_s c_\alpha(1+\nu)q_{xc}^*(1) \quad (45a)$$
$$m_\theta=m_{\theta c}^*-c_s c_\alpha(1+\nu)q_{xc}^*(1) \quad (45b)$$
$$q_x=q_{xc}^* \quad (45c)$$

可见，对于周边可移夹紧圆板，三阶剪切理论和一阶剪切理论下的弯矩相差 $c_s c_\alpha(1+\nu)q_{xc}^*(1)$，剪力则相等，而一阶剪切理论下的剪力和弯矩与经典理论下相应量相等[6,10]。

在单位均布载荷作用下的挠度解答为：

$$W=\frac{1}{64}[c(1-x^2)^2+16c_s(1-x^2)] \quad (46)$$

6　结论

基于Levinson三阶剪切理论，建立了材料性质沿厚度任意非均匀变化功能梯度Levinson圆板轴对称弯曲位移形式的控制微分方程。利用常微分方程理论和载荷等效关系，导出了FGM 圆板在Levinson剪切理论下弯曲解答与具有相同尺寸、相同载荷以及边界支承的参考均匀板的经典理论解答之间的解析转换关系。利用这一转换关系，可以避免求解由于材料横向非均匀以及剪切变形效应而导致的耦合微分方程组式(21)~式(23)，通过计算出反映材料非均匀性质和剪切变形效应的系数 c、c_α、c_s，就可以直接利用熟知的均匀材料板的经典理论解答来获得非均匀圆板的高阶剪切变形理论解答，从而实现了非均匀圆板剪切理论解的均匀化和经典化表示，便于工程应用。解答式(30)和式(32)是功能梯度Levinson圆板轴对称弯曲通解，由此可以求得任意轴对称分布载荷和边界条件下FGM圆板的弯曲解答。分别针对周边面内可移简支和夹紧边界条件，给出了任意轴对称分布载荷作用下的特解。本文的解答是Levinson三阶剪切变形理论意义下的精确解，可为相关问题的数值求解提供检验标准。

参考文献：

[1]　仲政，吴林志，陈伟球. 功能梯度材料与结构的若干力学问题研究进展[J]. 力学进展, 2010, 40(5): 528－541.

Zhong Zheng, Wu Linzhi, Chen Weiqiu. Progress in the study on mechanics problems of functionally graded materials and structures [J]. Advances in Mechanics, 2010, 40(5): 528－541. (in Chinese)

[2] Shen H S. Functionally graded materials-nonlinear analysis of plates and shells [M]. London: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2009: 1－3.

[3] Zhang D G, Zhou Y H. A theoretical analysis of FGM plate based on physical neutral surface [J]. Computational Materials Science, 2008, 44(2): 716－720.

[4] 李世荣, 高颖, 张靖华. 功能梯度与均匀圆板静动态解之间的相似转换关系[J]. 固体力学学报, 2011, 32(Suppl): 120－125.

Li Shirong, Gao Ying, Zhang Jinghua. Analogous transformation between of static and dynamic solutions of functionally graded material and uniform circular plates [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2011, 32(Suppl): 120－125. (in Chinese)

[5] 李世荣, 高颖, 张靖华. 功能梯度板与均匀板固有频率之间的相似转换[J]. 兰州理工大学学报, 2012, 38(2): 158－163.

Li Shirong, Gao Ying, Zhang Jinghua. Analogous transformation between natural frequencies of functionally graded plates and homogenous plates [J]. Journal of Lanzhou University of Technology, 2012, 38(2): 158－163. (in Chinese)

[6] Reddy J N, Wang C M, Kitipomchai S. Axisymmetric bending of functionally graded circular plates [J]. European Journal of Mechanics-A/ Solids, 1999, 18(2): 185－199.

[7] 王铁军, 马连生, 石朝峰. 功能梯度中厚圆/环板轴对称弯曲问题的解析解[J]. 力学学报, 2004, 36(3): 348－353.

Wang Tiejun, Ma Liansheng Shi Zhaofeng. Analytical solutions for axisymmetric bending of functionally graded circular/annular plates [J]. Acta Mechanica Sinica, 2004, 36(3): 348－353. (in Chinese)

[8] Croce L D, Venini P. Finite elements for functionally graded Reissner-Mindlin plates [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004, 193(9/10/11): 705－724.

[9] 李世荣, 张靖华, 徐华. 功能梯度与均匀圆板弯曲解的线性转换关系[J]. 力学学报, 2011, 43(5): 871－877.

Li Shirong, Zhang Jinghua, Xu Hua. Linear transformation between the bending solutions of functionally graded and homogenous circular plates [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2011, 43(5): 871－877. (in Chinese)

[10] Ma L S, Wang T J. Relationships between axisymmetric bending and buckling solutions of FGM circular plates based on third-order plate theory and classical theory [J]. International Journal of Solids and Structures, 2004, 41(1): 85－101.

[11] Sahraee S, Saidi A R. Axisymmetric bending of thick functionally graded plates using fourth-order shear deformation theory [J]. European Journal of Mechanics A/Solids, 2009, 28(5): 974－984.

[12] Zhong Z, Shang E T. Exact analysis of simply supported functionally graded piezoelectric plates [J]. Journal of Intelligent Material System and Structures, 2005, 16(7/8): 643－651.

[13] 郑磊, 仲政. 弹性支承功能梯度圆板轴对称弯曲问题精确解[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2009, 37(7): 893－897.

Zheng Lei, Zhong Zheng. Exact solution for axisymmetric bending of functionally graded circular plate under elastically supported boundary condition [J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2009, 37(7): 893－897. (in Chinese)

[14] Wang Y, Xu R Q, Ding H J. Three-dimensional solution of axisymmetric bending of functionally graded circular plates [J]. Composite Structures, 2010, 92(7): 1683－1693.

[15] Wang Y, Xu R Q, Ding H J. Axisymmetric bending of functionally graded circular magneto-electro-elastic plates [J]. European Journal of Mechanics, 2011, 30(6): 999－1011.

[16] Abrate S. Free vibration, buckling and static deflections of functionally graded plates [J]. Composites Science and Technology, 2006, 66(14): 2383－2394.

[17] Abrate S. Functionally graded plates behave like homogenous plates [J]. Composites Part B: Engineering, 2008, 39(1): 151－158.

[18] 徐华, 李世荣. 一阶剪切理论下功能梯度梁与均匀梁静态解之间的相似关系[J]. 工程力学, 2012, 29(4): 161－167.

Xu Hua, Li Shirong. Analogous relationship between the static solutions of functionally graded beams and homogenous beams based on the first-order shear deformation theory [J]. Engineer Mechanics, 2012, 29(4): 161－167. (in Chinese)

[19] Sallai B O, Tounsi A, Mechab I, et al. A theoretical analysis of flexional bending of Al/Al_2O_3 S-FGM thick beams [J]. Computational Materials Science, 2009, 44(4): 1344－1350.

[20] Reddy J N, Wang C M, Lim G T, Ng K H. Bending solutions of Levinson beams and plates in terms of the classical theories [J]. International Journal of Solids and Structures, 2001, 38(26/27): 4701－4720.

(附录转第 35 页)

Association of Science and Technology, 2003. (in Chinese)

[13] 郭彦林, 江磊鑫. 双矩管带肋约束型装配式防屈曲支撑的设计方法[J].建筑科学与工程学报, 2010, 27(2): 67－74.

Guo Yanlin, Jiang Leixin. Design method of buckling-restrained braces assembled with dual ribbed rectangular hollow [J]. Journal of Architect ure and Civil Engineering, 2010, 27(2): 67－74. (in Chinese)

[14] 方鄂华, 钱稼茹, 叶列平. 高层建筑结构设计[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2003: 15－17.

Fang E'hua, Qian Jiaru, Ye Lieping. Design of high rise building structure [M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2003: 15－17. (in Chinese)

[15] 陈骥. 钢结构稳定理论与设计[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 546－551.

Chen Ji. Stability of steel structures theory and design [M]. Beijing: Science Press, 2001: 546 － 551. (in Chinese)

[16] Lu L W. Stability of frames under primary bending moments [J]. Journal of Structural Division, ASCE, 1963, 89(3): 35－62.

(上接第 16 页)

附录：

如果弹性模量按式(14)变化，则式(13)定义的无量纲系数为：

$$\phi_0 = 1 + \frac{\eta}{p+1} \tag{1a}$$

$$\phi_1 = \frac{\eta p}{2(p+1)(p+2)} \tag{1b}$$

$$\phi_2 = 1 + \frac{3\eta(p^2+p+2)}{(p+1)(p+2)(p+3)} \tag{1c}$$

$$\phi_3 = \frac{\eta p(p^2+3p+8)}{8(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)} \tag{1d}$$

$$\phi_4 = \frac{1}{80} + \frac{\eta(p^4+6p^3+23p^2+15p+24)}{16(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)(p+5)} \tag{1e}$$

$$\phi_{rz} = \frac{1}{2(1+\nu)}\left(\phi_0 - \frac{1}{3}\phi_2\right) \tag{1f}$$

如果弹性模量按式(15)变化，式(13)定义的无量纲系数为：

$$\phi_0 = \frac{1}{\chi}(r_E - 1) \tag{2a}$$

$$\phi_1 = \frac{1}{\chi}\left(\frac{r_E+1}{2} - \phi_0\right) \tag{2b}$$

$$\phi_2 = 3\phi_0 - \frac{24}{\chi}\phi_1 \tag{2c}$$

$$\phi_3 = \frac{1}{4\chi}\left(\frac{r_E+1}{2} - \phi_2\right) \tag{2d}$$

$$\phi_4 = \frac{1}{16}\left(\phi_0 - \frac{4}{\chi}\phi_3\right) \tag{2e}$$

$$\phi_{rz} = \frac{(1-\nu)}{2}\left(\phi_0 - \frac{1}{3}\phi_2\right) \tag{2f}$$