实 变 函 数

主讲人：孙明保

湖南理工学院
Hunan Institute of Science and Technology

序言

Lebesgue积分思想简介

主讲人：孙明保

湖南理工学院 Hunan Institute of Science and Technology

微积分发展的三个阶段

创立（17世纪）： Newton（力学）Leibniz（几何）

(无穷小)

严格化（19世纪）：Cauchy, Riemann, Weierstrass

(极限理论(ε-N, ε-δ语言)， 实数理论)

外微分形式（20世纪初）： Grassmann, Poincare, Cartan

（微积分基本定理如何在高维空间得到体现）

湖南理工学院
Hunan Institute of Science and Technology

微积分继续发展的三个方向

- 外微分形式 (整体微分几何)（微积分基本定理如何在高维空间得到体现）
- 复数域上的微积分（复变函数）
- 微积分的深化和拓展（实变函数）

R积分定义

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I = \int_a^b f(x)dx$$

不R可积函数的典型例子

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为}[0,1]\text{中有理数}\\ 0, & x\text{为}[0,1]\text{中无理数}\end{cases},$$

L积分结果记为

$$(L)\int_a^b f(x)dx$$

1.用两种方法计算同一个曲边梯形的面积应该是一样的

$$(L)\int_a^b f(x)dx = (R)\int_a^b f(x)dx$$

L积分能适应于更一般的函数

- 2.对于相当一类不能用R积分来计算面积的曲边梯形，可以按L积分计算相应曲边梯形的面积。

一般函数确定的曲边梯形该如何计算面积?

$$A < f(x) < B$$

$$A = y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} < y_n = B$$

$$E_k = \left\{x \in [a,b] : y_{k-1} < f(x) \le y_k\right\}$$

$$\sum_{k=1}^{n} y_k \bullet (E_k\text{的“长度”})$$

可测函数定义的导出

$$E_k = \{x \in [a,b] : y_{k-1} < f(x) \le y_k\}$$

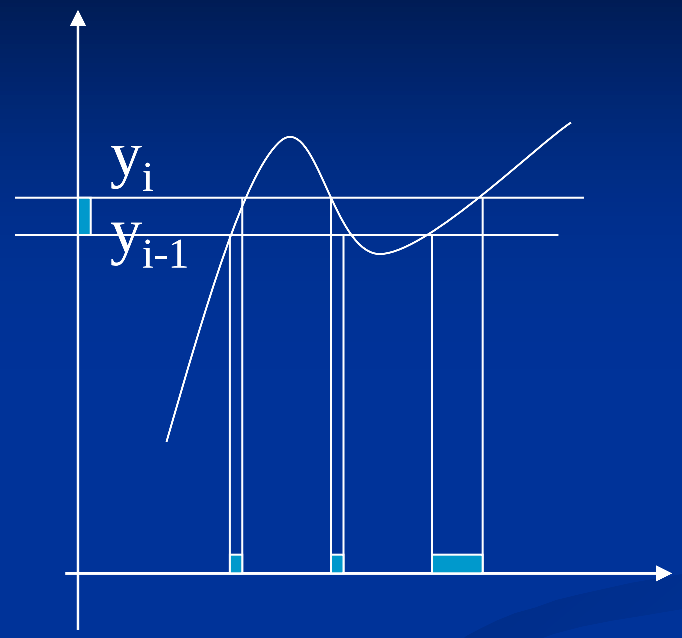
$$E_k = \{x \in [a,b] : f(x) > y_{k-1}\}$$

$$-\{x \in [a,b] : f(x) > y_k\}$$

因此实变函数中研究的是使对任何实数λ, $E = \{x : f(x) > \lambda\}$是一可测集的函数即可测函数。

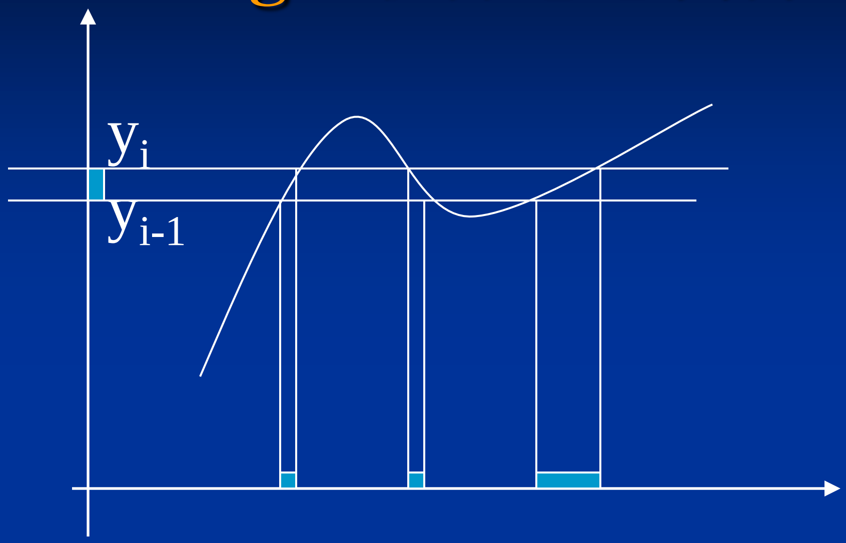
L积分思想

- 即采取对值域作分划，相应得到对定义域的分划
- （每一块不一定是区间），
- 使得在每一块上的振幅都很小，
- 即按函数值的大小对定义域的点加以归类



图示

Lebesgue积分思想简介



$$E_i = \{x : y_{i-1} \le f(x) < y_i\}$$

$$y_{i-1} \le \xi_i < y_i$$

用 mE_i 表示 E_i 的“长度”

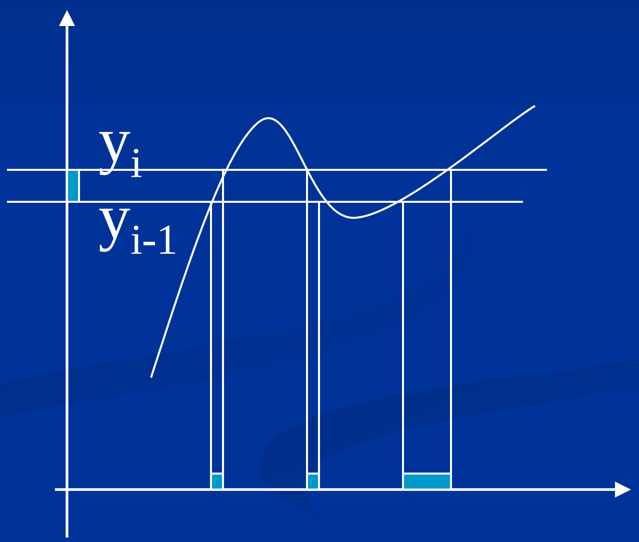
$$(L)\int_{[a,b]} f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}\xi_i mE_i$$

1902年Lebesgue在其论文“积分、长度与面积”中提出（参见：Lebesgue积分的产生及其影响，数学进展，2002.1）

Lebesgue积分思想

即：$\forall\delta>0$，作分划$m=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n=M$

其中$y_i-y_{i-1}<\delta, m\le f(x)<M$



取点集$E_i=\{x: y_{i-1}\le f(x)<y_i\}$

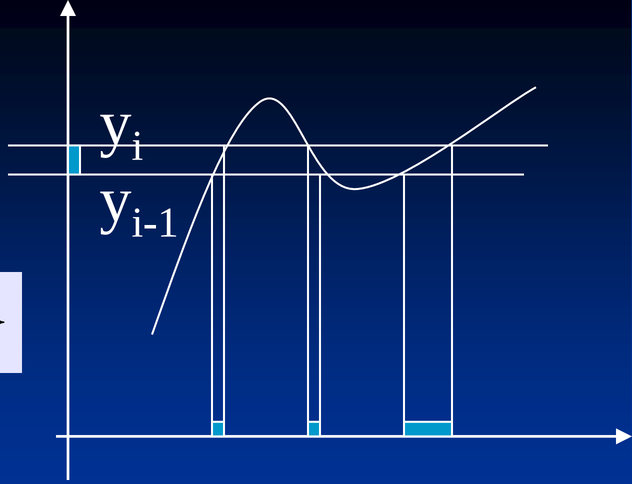
f(x)在 E_i 上的振幅不会大于δ

作和$s=\sum_{i=1}^{n}\xi_i mE_i$

其中 mE_i 表示 E_i 的 "长度" $y_{i-1}\le\xi_i<y_i$

取 "极限" $(L)\int_{[a,b]} f(x)dx=\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}\xi_i mE_i$

3.Lebesgue积分构思产生的问题



$$E_i = \{x : y_{i-1} \le f(x) < y_i\}$$

- (1) **集合**E_i 的“长度”如何定义（第三章 测度论）；
- (2)怎样的**函数**可使 E_i 都有“长度”（第四章 可测函数）；
- (3)定义Lebesgue**积分**并研究其性质（**第五章 积分论**）；

第一章 集合， 第二章 点集， 第六章 微分与不定积分

湖南理工学院
Hunan Institute of Science and Technology

第一章 集合

第一节 集合及其运算

一.集合的概念

- **1. 集合的定义**

具有某种特性或满足一定性质的所有“对象”或“事物”的全体称为集合, 其中这些“对象”或“事物”称为这个集合的元素.

空集：不含任何元素的集合, 记为ϕ

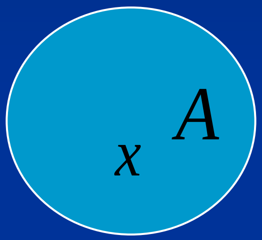
集合的元素具有：互异性，确定性，无序性

集合的表示：列举法，描述法

2.集合的术语与记号

$x \in A$表示x属于A，即x是集A的元素;

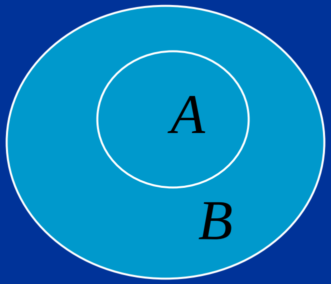
$x \notin A$表示x不属于A,即x不是集A的元素.



$x \in A, y \notin A$

$A \subseteq B$表示集A是集B的子集,即A的元素都是B的元素;

$A \subset B$表示A是B的真子集,即A的元素都属于B,且B中至少有一个元素不属于A.



$A \subset B$

Re :"$\in$"表示集合与元素之间的关系;"$\subseteq$"表示集合与集合之间的关系.

- 3.集合的性质

定理：对任何集合A, B, C，均有

1) $A \subseteq A$； (自反性)

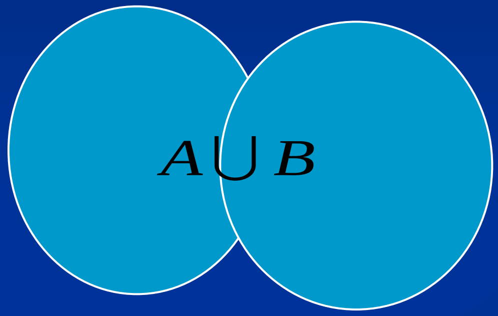
2) $A \subseteq B, B \subseteq A$，则$A = B$；

3) $A \subseteq B, B \subseteq C$，则$A \subseteq C$. (传递性)

二.集合的运算

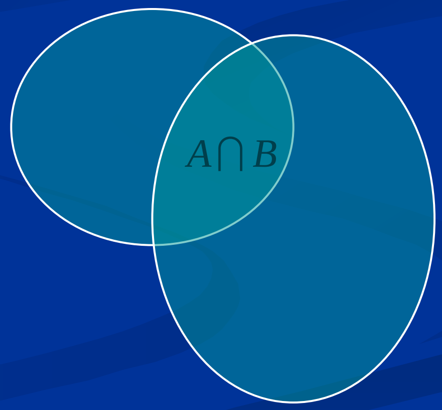
设A, B是任意两个集合

- 1.集合并与交



$$A \bigcup B = \{x \mid x \in A 或 x \in B\}$$

$$A \bigcap B = \{x \mid x \in A 且 x \in B\}$$

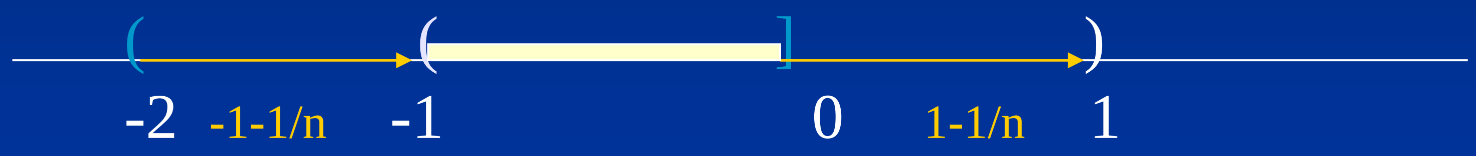


推广:

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \{x : \exists \alpha \in \Lambda, 使 x \in A_\alpha\}$$

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \{x : \forall \alpha \in \Lambda, 都有 x \in A_\alpha\}$$

例： 设$A_n=\{x:-1-\frac{1}{n}<x\le 1-\frac{1}{n}\}, n\in N,$



$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=(-2,1) \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=[-1,0]$$

注：在本书中我们未把0包含在N内， +∞不在N中

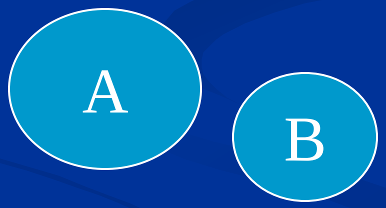
2.集合的差集与余集

差：$A-B$或$A\setminus B=\{x: x\in A但x\notin B\}$

余：$C_sA=S-A$ （其中S为全集）,简记为A^c

注：$A-B=A\cap B^c$

$(A-B)\cup B=A$不一定成立



3.集合运算性质

De Morgan公式

$$\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_{\alpha}\right)^{c} = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_{a}{}^{c}$$

$$\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_{\alpha}\right)^{c} = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_{\alpha}{}^{c}$$

注：通过取余集，使A与A^{c}，∪与∩互相转换

4.上极限与下极限

设$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$是一个集合序列

上极限集

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \ (\text{或} \limsup_n A_n)$$

$$=\{x: x\text{属于无限多个集合}A_n\}$$

$$=\{x: \text{存在无限多个}A_n\text{，使}x\in A_n\}$$

$$=\{x: \forall N, \exists n\ge N, \text{使} x\in A_n\}$$

$$=\bigcap_{N=1}^{\infty}\underbrace{\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n}_{B_N}$$

下极限集

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \ (\text{或} \liminf_n A_n)$$

$$=\{x: \text{除去有限个集外，有}x\in A_n\}$$

$$=\{x: \text{当}n\text{充分大时，有}x\in A_n\}$$

$$=\{x: \exists N, \forall n\ge N, \text{有} x\in A_n\}$$

$$=\bigcup_{N=1}^{\infty}\underbrace{\bigcap_{n=N}^{\infty} A_n}_{B_N}$$

例： 设A_{2n}=[0,1]，A_{2n+1}=[1,2];

则上极限集为[0,2],下极限集为{1}

注：

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \subset \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

极限集

如果集列$\{A_n\}$的上下极限相等，即

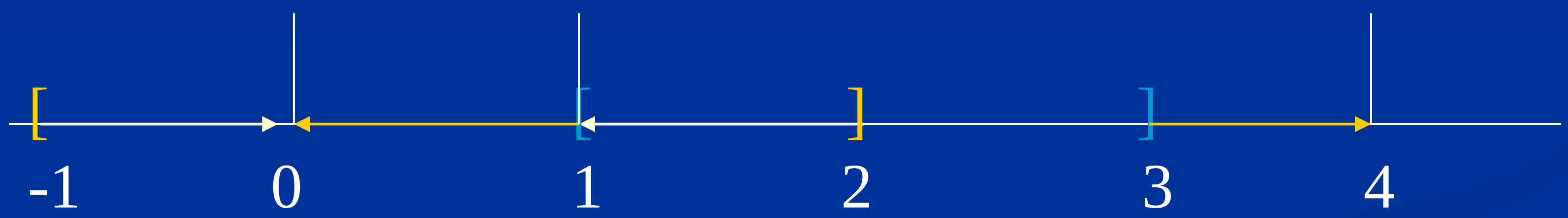
$$\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$$

则称集列$\{A_n\}$收敛,记

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$$

例 设$A_{2n-1}=[\frac{1}{n},4-\frac{1}{n}],\ A_{2n}=[-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}],\ n\in N$,则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=[0,4) \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=(0,1]$$



$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n(\limsup_n A_n)$$

$$=\{x:\forall N,\exists n\geq N,\text{使}x\in A_n\}$$

$$=\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}A_n$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n(\liminf_n A_n)$$

$$=\{x:\exists N,\forall n\geq N,\text{有}x\in A_n\}$$

$$=\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}A_n$$

5.单调集列

若集列$\{A_n\}$满足$A_n \subset A_{n+1} (\forall n \in N)$, 则称$\{A_n\}$为单调增加;

若集列$\{A_n\}$满足$A_n \supset A_{n+1} (\forall n \in N)$, 则称$\{A_n\}$为单调减少;

结论：单调集列是收敛的

1)若$\{A_n\}$单调增加, 则$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$;

2)若$\{A_n\}$单调减少，则$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

单调增集列极限分析

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n (\liminf_n A_n)$$

$$= \{x : \exists N, \forall n \geq N, 有 x \in A_n\}$$

$$= \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} A_n$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n (\limsup_n A_n)$$

$$= \{x : \forall N, \exists n \geq N, 使 x \in A_n\}$$

$$= \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n$$

当A_n为单调增加集列时

$$\bigcap_{n=N}^{\infty} A_n = A_N$$

$$\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} A_n = \bigcup_{N=1}^{\infty} A_N$$

$$\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

单调减集列极限分析

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n (\liminf_n A_n)$$
$$= \{x : \exists N, \forall n \ge N, 有 x \in A_n\}$$
$$= \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} A_n$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n (\limsup_n A_n)$$
$$= \{x : \forall N, \exists n \ge N, 使 x \in A_n\}$$
$$= \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n$$

当A_n为单调减小集列时

$$\bigcap_{n=N}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n = A_N$$

$$\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n = \bigcap_{N=1}^{\infty} A_N$$