第三章 测度论

第三节 可测集类

一 可测集类

定理1：

(1).凡外测度为零之集皆可测，称为零测度集；

(2).零测度集之任何子集仍为零测度集；

(3).有限个或可数个零测度集之和仍为零测度集.

定理2： 区间I(不论开，闭或半开半闭区间)都是可测集合且$mI=|I|$.

定理3：凡开集，闭集皆可测.

定义1：设Ω为R^n中某些集合所成的集合类。如果$R^n \in \Omega$，并且Ω对于可数并及作差运算(因此由德摩根公式知，对可数交及取余集运算)是封闭的，则称Ω为R^n上的一个σ代数.

注：R^n中可测集全体所成的集合类μ是一个σ代数。

定义2： 设Σ是R^n中某些集合所组成集簇，称R^n上所有包含Σ的σ代数的交集为**由 Σ 生成的 σ 代数**。

定义3： 由R^n中所有开集所生成的σ代数记为$\mathfrak{R}$，并称$\mathfrak{R}$中的集合为**博雷尔(Borel)集**。

定理4：凡博雷尔集都是L可测集.

定义4：设集合G可以表示为一列开集$\{G_i\}$之交集$G=\bigcap_{i=1}^{\infty}G_i$，则$G$称为$G_\delta$型集.

设集合F可以表示为一列闭集$\{F_i\}$之并集$F=\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i$，则$F$称为$F_\sigma$型集.

可测集类

零集、区间、开集、闭集、G_δ型集（可数个开集的交）、F_σ型集（可数个闭集的并）、Borel型集（粗略说：从开集出发通过取余，取交或并（有限个或可数个）运算得到）都是**可测集**。

二 可测集与开集、闭集的关系

定理5(1)若E可测， 则$\forall \varepsilon > 0, \exists$开集$G$， 使得$E \subset G$且$m(G - E) < \varepsilon$

(2)若E可测， 则$\forall \varepsilon > 0, \exists$闭集$F$，使得$F \subset E$且$m(E - F) < \varepsilon$

即：可测集与开集、闭集只相差一小测度集（可测集“差不多”就是开集或闭集），从而可测集基本上是至多可数个开区间的并。

证明（2）若(1)已证明，由E^{c}可测可知

$\forall \varepsilon > 0, \exists$开集$G$，使得$E^c \subset G$且$m(G - E^c) < \varepsilon$

取F=G ^{c}，则F为闭集$F \subset E$

且$m(E - F) = m(E \cap F^c)$

$= m((E^c)^c \cap F^c) = m(F^c - E^c) = m(G - E^c) < \varepsilon$

（1） 当mE<+∞时，由外测度定义知

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists$开区间列$\{I_i\}$，使得$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$且$m^* E \le \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \le m^* E + \varepsilon$

令$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$，则$G$为开集，$E \subset G$，且

$$mE \le mG \le \sum_{i=1}^{\infty} mI_i \le \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < mE + \varepsilon$$

从而（这里用到mE<+∞ ）

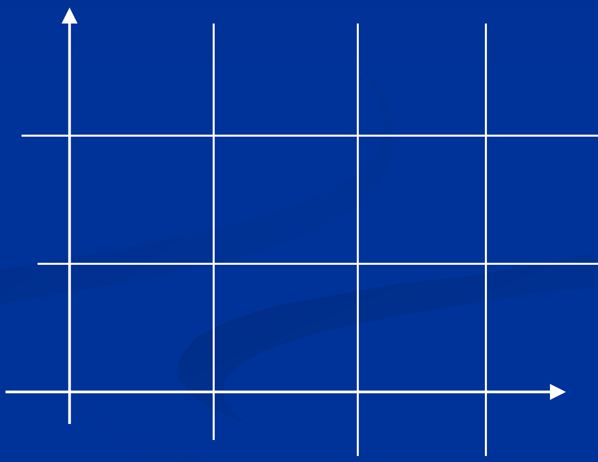
$$m(G - E) = mG - mE < \varepsilon$$

当mE=+∞时，

这时将E分解成可数个互不相交的可测集的并：

$$E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\,(mE_i<+\infty)$$

对每个E_i应用上述结果



$\exists$开集G_i，使得$E_i\subset G_i$且$m(G_i-E_i)<\frac{\varepsilon}{2^i}$

令$G=\bigcup_{i=1}^{\infty}G_i$,则$G$为开集，$E\subset G$，且

$$m(G-E)=m(\bigcup_{i=1}^{\infty}G_i-\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)=m(\bigcup_{i=1}^{\infty}(G_i-\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i))$$

$$\le m(\bigcup_{i=1}^{\infty}(G_i-E_i))\le\sum_{i=1}^{\infty}m((G_i-E_i)\le\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^i}<\varepsilon$$

三. 可测集与 G_δ 集和 F_σ 集的关系

定理6：

(1).若E可测，则存在 G_δ 型集 G, 使

$$G \supset E \text{且} m(G-E)=0$$

(2).若E可测，则存在 F_σ 型集F, 使

$$F \subset E \text{且} m(E-F)=0$$

可测集可由 G_δ 型集去掉一零集，

或 F_σ 型集添上一零集得到。

证明 (2)若(1)已证明，由E^c可测可知

$\exists G_\delta$型G，使得$G \supset E^c$且$m(G-E^c)=0$

取F=G ^{c}，则F为 F_σ型集， $F \subset E$且

$$m(E-F)=m(E\cap F^c)$$

$$=m((E^c)^c\cap F^c)=m(F^c-E^c)=m(G-E^c)=0$$

(1) 证明：对任意的1/n，

$\exists$开集G_n，使得$G_n \supset E$且$m(G_n - E) < \frac{1}{n}$

令$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$，则G为$G_\delta$型集，且$G \supset E$

$m(G - E) \le m(G_n - E) < \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \cdots$

故$m(G - E) = 0$

例 设$E\subset R^n$，若$\forall\varepsilon>0,\exists$开集$G$，使得$E\subset G$且$m^*(G-E)<\varepsilon$，则$E$是可测集。

证明：对任意的1/n，

$\exists$开集G_n，使得$G_n\supset E$且$m^*(G_n-E)<\frac{1}{n}$

令$\mathrm{G}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$，则G为$G_\delta$型集，$\mathrm{E}\subset G$且

$m^*(G-E)\le m^*(G_n-E)\le\frac{1}{n},n=1,2,3,\cdots$

故$m^*(G-E)=0$

从而$E=G-(G-E)$为可测集

例2和例3

例2：设$E\subset R^p$.求证存在G_δ型集$G\subset R^p$，使得$E\subset G$且$mG=m^*(E)$.

例3：设对于任何正整数n，有$E_n\subset E_{n+1}\subset R^p$ $(n=1,2,\cdots)$，令$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，求证$m^*E=\lim_{n\to\infty}m^*E_n$.

第四节 不可测集

- **存在不可测集**（利用选择公理构造，教材p73；1970，R.Solovay证明不可测集存在蕴涵选择公理）

- **存在不是Borel集的可测集**

（利用Cantor函数和不可测集构造）

参见：《实变函数》周民强 , p87