第六章 微分与不定积分

第四节 不定积分

不定积分的定义

定义1（不定积分）设$f(x)$在$[a,b]$上L可积，则$[a,b]$上的函数$F(x)=\int_a^x f(t)dt+C$（C为任一常数）称为$f(x)$的一个不定积分.

绝对连续函数的定义

设F(x)是[a,b]上的有限函数，若$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,

使对[a,b]中的任意有限个互不相交的开区间

$(a_i, b_i)(i = 1, 2, \cdots, n)$，当$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$ 时，

有$\sum_{i=1}^{n}|F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon$

注：　绝对连续函数一定是一致连续函数，当然是连续函数，也一定是有界变差函数，从而几乎处处有有限导数.

定理1

定理1：若$f(x)$是$[a,b]$上的可积函数，则

$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt+C$为绝对连续函数.

定理2

定理2：若f(x)是[a,b]上的绝对连续函数，且f'(x)=0a.e.于[a,b],则$f(x)=$常数.

定理3

定理3：若$f(x)$是$[a,b]$上的可积函数，则存在绝对连续函数$F(x)$，使得$F'(x)=f(x)$ a.e. 于$[a,b]$（只需取$F(x)=\int_a^x f(t)dt$）.

定理4

定理4：若F(x)是[a,b]上的绝对连续函数，则几乎处处有定义的F'(x)在[a,b]上可积且$F(x)=F(a)+\int_a^x F'(t)\,dt$

即F(x)总是[a,b]上可积函数的不定积分.

定理5（分部积分法）

定理5：若f(x)，$g(x)$均为[a,b]上的绝对连续函数，则

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

定理6（换元法） 若设$f(x)$是$[a,b]$上的可积函数，$g(x)$是单调绝对连续函数，$a=g(\alpha),b=g(\beta)$，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t)g'(t)dt$$

定理6的证明作为练习留给读者。