关于自由质点相对地球的运动

陈立群 1)

(上海大学力学系，上海 200444)

摘要 研究自由质点相对于旋转地球的运动. 导出了任意初始条件下自由质点相对于旋转地球运动方程的显式精确解. 利用该精确解证明了自由落体偏东. 所导出精确解略去地球自转速度高次项时与教材中用近似方法导出的一次近似解一致.

关键词 相对运动，地球自转，落体偏东，动力学，理论力学

中图分类号：O311 **文献标识码**：A

doi：10.6052/1000-0879-14-013

引 言

在分析地球自转对自由落体的影响时，需要求解相对运动的运动微分方程. 传统的处理方法是利用地球自转角速度很小的事实，将待求的运动质点坐标展开为自转角速度的幂级数，然后逐次求解 [1-4]. 在零次近似解基础上导出的一次近似解就可以说明落体偏东 [1-4]. 也有些教材直接计算数值解说明落体偏东 [5-6]. 若忽略空气阻力，质点相对于地球运动的动力学方程为线性微分方程组，因此有可能导出精确解. 本文通过解耦该微分方程组，显式求得了任意初始条件下的精确解. 在精确解中只保留地球自转角速度一次项时，与以往一次近似解一致. 由所导出精确解还可以说明落体偏东.

1 相对地球运动质点动力学方程的求解

设质点在地球表面北纬 φ 的空域运动，将动参考系固连在地球表面，轴 x 指向东，轴 y 指向北，轴 z 指向天. 地球以角速度 ω 自转时，若忽略空气阻力，质量为 m 质点满足动力学方程

$$\ddot{x} = 2\omega(\dot{y}\sin\varphi - \dot{z}\cos\varphi) \tag{1}$$

$$\ddot{y} = -2\omega\dot{x}\sin\varphi \tag{2}$$

$$\ddot{z} = -g + 2\omega\dot{x}\cos\varphi \tag{3}$$

考虑一般的初始条件

$$\left.\begin{aligned} &x(0) = x_0\,,\ y(0) = y_0\,,\ z(0) = z_0 \\ &\dot{x}(0) = \dot{x}_0\,,\ \dot{y}(0) = \dot{y}_0\,,\ \dot{z}(0) = \dot{z}_0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

为求方程组 (1)~(3) 的解，先进行解耦. 为此对式 (1) 两端求时间导数，并将式 (2) 和式 (3) 代入所得结果消去 $\ddot{y}$ 和 $\ddot{z}$，整理得到

$$\dddot{x} + 4\omega^2\dot{x} - 2g\omega\cos\varphi = 0 \tag{5}$$

式 (5) 为 3 阶常系数线性非齐次微分方程，相应齐次方程的本征方程 3 个根分别为 0 和 $\pm 2\omega\mathrm{i}$. 因此可以导出方程 (5) 的通解为非齐次方程的特解与齐次方程通解的叠加，即

$$x(t) = \frac{gt}{2\omega}\cos\varphi + A + B\sin(2\omega t) + C\cos(2\omega t) \tag{6}$$

其中 A, B 和 C 为待定常数. 由式 (1) 可得

$$\ddot{x}(0) = 2\omega(\dot{y}_0\sin\varphi - \dot{z}_0\cos\varphi) \tag{7}$$

利用式 (1) 给出关于 x 的初位置和初速度以及式 (7) 给出的初加速度，可以确定式 (6) 的待定常数

$$\left.\begin{aligned} &A = x_0 + \frac{\dot{y}_0\sin\varphi - \dot{z}_0\cos\varphi}{2\omega} \\ &B = \frac{\dot{x}_0}{2\omega} - \frac{g}{4\omega^2}\cos\varphi \\ &C = -\frac{\dot{y}_0\sin\varphi - \dot{z}_0\cos\varphi}{2\omega} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

将式 (8) 代入式 (3) 并积分两次，得到

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2\sin\varphi\cos\varphi + B\sin\varphi\cos(2\omega t) - C\sin\varphi\sin(2\omega t) + Dt + E \tag{9}$$

本文于 2014–01–13 收到.

1) E-mail: lqchen@staff.shu.edu.cn

引用格式：陈立群. 关于自由质点相对地球的运动. 力学与实践, 2015, 37(2): 243-244

Chen Liqun. The motion of a free particle relative to the Earth. *Mechanics in Engineering*, 2015, 37(2): 243-244

其中 D 和 E 为积分常数，可用式 (4) 中给出的初始条件求得为

$$\left.\begin{aligned} D &= \dot{y}_0 \cos^2\varphi + \dot{z}_0 \sin\varphi\cos\varphi \\ E &= y_0 - \frac{\dot{x}_0}{2\omega}\sin\varphi + \frac{g}{4\omega^2}\sin\varphi \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

再将式 (8) 代入式 (2) 并积分两次，得到

$$\begin{aligned} z(t) = &-\frac{1}{2}gt^2\sin^2\varphi + \\ &\cos\varphi\left[-B\cos(2\omega t) + C\sin(2\omega t)\right] + Ft + G \end{aligned} \tag{11}$$

其中积分常数 F 和 G 为可由式 (4) 中给出的初始条件确定为

$$\left.\begin{aligned} F &= \dot{z}_0 + (\dot{y}_0\sin\varphi - \dot{z}_0\cos\varphi)\cos\varphi \\ G &= z_0 + \frac{\dot{x}_0\cos\varphi}{2\omega} - \frac{g\cos^2\varphi}{4\omega^2} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

2 落体偏东

考虑从高度 h 处自由下落的质点，则相应的初始条件为

$$\left.\begin{aligned} &x_0 = 0,\ y_0 = 0,\ z_0 = h \\ &\dot{x}_0 = 0,\ \dot{y}_0 = 0,\ \dot{z}_0 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

由式 (8)，式 (10) 和式 (12) 可得到

$$\left.\begin{aligned} &A = 0,\ B = -\frac{g}{4\omega^2}\cos\varphi,\ C = 0 \\ &D = 0,\ E = \frac{g}{4\omega^2}\sin\varphi,\ F = 0, \\ &G = h - \frac{g\cos^2\varphi}{4\omega^2} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

代入式 (6) 得到向东的坐标为

$$x(t) = \frac{gt}{2\omega}\cos\varphi\left[1 - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega t}\right] \tag{15}$$

注意到对于任意正数 α 有 $\alpha > \sin\alpha$，取 $\alpha = 2\omega t$，由式 (14) 可知，$x(t) > 0$，即下落过程中向东偏.

当 ω 充分小时，式 (14) 可以导出以往教材中一次近似的结果 [1-4]. 事实上，对于地球附近下落的物体，t 较小，因此可以认为 $2\omega t$ 为小量. 从而有

$$\sin(2\omega t) = 2\omega t - \frac{1}{3!}(2\omega t)^3 + \frac{1}{5!}(2\omega t)^5 + O\left[(2\omega t)^7\right] \tag{16}$$

将式 (15) 代入式 (14)，整理并略去 2 次以上的小量，得到

$$x(t) = \frac{1}{3}g\omega t^3\cos\varphi \tag{17}$$

这就是用一次近似的结果 [1-4]. 若略去 4 次以上的小量，可以得到 3 次近似的结果

$$x(t) = \frac{1}{3}g\omega t^3\left(1 - \frac{1}{5}\omega^2 t^2\right)\cos\varphi \tag{18}$$

参 考 文 献

1 朱照宣, 周起钊, 殷金生. 理论力学 (下). 北京: 北京大学出版社, 1982. 176-181

2 贾书惠, 李万琼. 理论力学. 北京: 高等教育出版社, 2002. 187-188

3 李俊峰, 张雄. 理论力学 (第 2 版). 北京: 清华大学出版社, 2010. 199-201

4 梅凤翔, 尚玫. 理论力学 I—- 基本教程. 北京: 高等教育出版社, 2012. 221-223

5 陈立群, 戈新生, 徐凯宇等. 理论力学. 北京: 清华大学出版社, 2006. 138-139

6 谢传峰, 王琪. 理论力学. 北京: 高等教育出版社, 2009. 189-190

(责任编辑: 胡 漫)

(上接第 248 页)

参 考 文 献

1 Broek D. 工程断裂力学基础. 王克仁等译. 北京：科学出版社，1980

2 沈成康. 断裂力学. 上海：同济大学出版社，1996

3 程靳，赵树山. 断裂力学. 北京：科学出版社，2006

4 Lawn B. 脆性固体力学 (第 2 版). 龚江宏译. 北京：高等教育出版社，2010

5 张作启，刘彬. 任意加载模式下含裂纹超弹性体的能量释放率. 力学学报，2013，45(1)：129-133

6 Zehnder AT. Fracture Mechanics (2nd edn). London: Springer, 2012

(责任编辑: 胡 漫)