

文章编号: 1001-0920(2015)05-0865-06

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2014.0455

求解约束多目标区间优化的交互多属性决策 NSGA-II 算法

陈志旺, 陈林, 白 铎, 杨 七, 赵方亮

(燕山大学 工业计算机控制工程河北省重点实验室, 河北 秦皇岛 066004)

摘 要: 针对约束多目标区间优化问题, 提出一种交互多属性决策 NSGA-II 算法. 该算法将非线性问题线性化, 定义 P 占优支配关系求出个体的序值, 定义区间拥挤距离来区分具有相同序值个体的优劣, 采用约束精英策略删除种群中不满足约束的个体. 将选出的个体作为方案集, 目标函数作为属性集, 决策者对于各目标函数的偏好作为属性权重, 构建一个多属性决策模型, 在进化过程中融入该模型来选取符合决策者偏好的满意解. 仿真实验验证了所提出方法的可行性和正确性.

关键词: 多目标优化; 不确定规划; 多属性决策; 区间数; 进化算法; NSGA-II; 交互

中图分类号: TP301

文献标志码: A

Interactive multi-attribute decision-making NSGA-II for constrained multi-objective optimization with interval numbers

CHEN Zhi-wang, CHEN Lin, BAI Xin, YANG Qi, ZHAO Fang-liang

(Key Lab of Industrial Computer Control Engineering of Hebei Province, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China. Correspondent: CHEN Lin, E-mail: chlnor@163.com)

Abstract: For constrained multi-objective optimization problems with interval numbers, a kind of interactive multi-attribute decision-making NSGA-II is proposed. In this algorithm, nonlinear optimization problems are transformed into linear ones. P dominance relationship is defined to get the rank values of individuals and interval crowding distance is presented to distinguish the quality of the individuals with the same rank value. A constrained elite strategy is used to remove those individuals that do not satisfy the constraint from the population. A multi-attribute decision-making model(DMM) is built, which regards the selected individuals as the alternatives set, the objective function as the attributes set, and the preference of each objective function as the attribute weights. In the process of evolution, an interactive NSGA-II incorporated with DMM is proposed to obtain satisfactory solutions which conform to the decision-makers preference. Simulation results show the feasibility and correctness of the proposed method.

Keywords: multi-objective optimization; uncertain programming; multi-attribute decision-making; interval number; evolutionary algorithms; NSGA-II; interactive

0 引 言

在现实生活中, 很多复杂问题的数学模型都可以归纳为约束多目标区间优化问题^[1-4]. 这类优化问题通常包含多个目标函数和约束函数, 且各目标函数之间相互限制, 因此不能找到单个解使所有目标函数都达到最优, 即它的解是一个解集. 人们往往只需要解集中的一个解, 而传统的多目标算法并没有给出从解集中选择所需要解的方法. 此外, 由于主客观因素的影响, 这些目标函数和约束函数中往往含有不确定变量. 由文献 [1] 可知, 在实际优化中得到不确定变

量的区间取值范围比得到其概率分布或隶属度函数容易得多. 因此, 本文重点求解不确定变量以区间形式给出的约束多目标优化问题. 进化算法能在一次运行中找到最优解集, 已被广泛应用于多目标优化领域^[5]. 然而, 约束多目标区间优化问题中的目标函数和约束函数都是区间数, 因此上述进化算法无法直接对其求解, 如何利用进化算法求解约束多目标区间优化问题已成为当今的研究热点^[1-5]. 根据求解思路的不同, 已有的求解方法主要分为两类: 1) 将约束多目标区间优化问题转化为约束多目标确定优化问题, 进

收稿日期: 2014-04-01; 修回日期: 2014-06-07.

基金项目: 河北省自然科学基金青年基金项目(F2014203099); 燕山大学青年教师自主研究计划课题(13LGA006).

作者简介: 陈志旺(1978—), 男, 副教授, 博士, 从事预测控制、区间数优化等研究; 陈林(1989—), 男, 硕士生, 从事区间数优化、多目标优化的研究.

而利用进化算法对其进行求解^[6]; 2) 提出可以直接求解区间优化问题的进化算法^[1,7]. 两类方法的目的是为了找到收敛性好且分布均匀的 Pareto 最优解集. 但在实际应用中, 决策者往往只需要众多解中的一个或几个, 因此在求解优化问题时, 有两个同等重要的任务: 搜索 Pareto 解集和选择满意解. 两个任务的先后顺序决定了 3 种不同的方法^[2-4]分别为: 先验法、交互法和后验法. 其中, 交互法能得到比先验法更满意的解, 同时算法耗时比后验法少, 且决策者的选择负担小^[4]. Sun 等^[2]从偏好多面体中提取决策者的偏好方向, 利用逼近测度区分具有相同序值和决策者偏好的进化个体, 引导进化的种群沿着决策者偏好方向进化; Jeyadevi 等^[8]利用 NSGA-II 得到 Pareto 前沿, 进而利用 TOPSIS 法找到 Pareto 前沿面上的满意解.

1 基本概念

1.1 问题描述

约束多目标区间优化问题描述如下:

$$Q: \min_{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}), f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \dots, f_z(\mathbf{x}, \mathbf{u})).$$

$$\text{s.t. } g_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq a_j = [\underline{a}_j, \bar{a}_j], j = 1, 2, \dots, m;$$

$$h_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = b_k = [\underline{b}_k, \bar{b}_k], k = 1, 2, \dots, n;$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_q) \subset \mathbf{R}^q, x_i = [\underline{x}_i, \bar{x}_i],$$

$$i = 1, 2, \dots, q;$$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_p) \subset \mathbf{R}^p, u_l = [\underline{u}_l, \bar{u}_l],$$

$$l = 1, 2, \dots, p. \quad (1)$$

其中: $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ 为目标函数向量; $f_z(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ 为第 z 个区间目标函数; $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_q)$ 为 q 维决策向量 (决策向量也可称为解), x_i 为决策向量第 i 个变量, \bar{x}_i 和 \underline{x}_i 分别为变量 x_i 的上下边界; $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ 为 p 维区间向量, u_l 为区间向量第 l 个变量, \bar{u}_l 和 \underline{u}_l 分别为变量 u_l 的上下边界; $g_j(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ 为第 j 个约束区间不等式; $h_k(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ 为第 k 个约束区间等式.

Q 中存在不确定参数 \mathbf{u} , 因此 \mathbf{x} 对应的目标函数和约束函数不再是确定数, 而变成区间数. 本文为了提高运算效率, 利用泰勒一阶展开^[9], 将非线性问题 (1) 转化为如下线性形式:

$$Q: \min_{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) =$$

$$((\underline{f}_1(\mathbf{x}), \bar{f}_1(\mathbf{x})), (\underline{f}_2(\mathbf{x}), \bar{f}_2(\mathbf{x})),$$

$$\dots, (\underline{f}_z(\mathbf{x}), \bar{f}_z(\mathbf{x}))).$$

$$\text{s.t. } [\underline{g}_j(\mathbf{x}), \bar{g}_j(\mathbf{x})] \geq a_j = [\underline{a}_j, \bar{a}_j], j = 1, 2, \dots, m;$$

$$[\underline{h}_k(\mathbf{x}), \bar{h}_k(\mathbf{x})] = b_k = [\underline{b}_k, \bar{b}_k], k = 1, 2, \dots, n;$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_q) \subset \mathbf{R}^q, x_i = [\underline{x}_i, \bar{x}_i],$$

$$i = 1, 2, \dots, q;$$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_p) \subset \mathbf{R}^p, u_l = [\underline{u}_l, \bar{u}_l],$$

$$l = 1, 2, \dots, p. \quad (2)$$

1.2 区间的基本概念

定义 1 对于一个区间数 $a = [\underline{a}, \bar{a}]$, 设 $a^c = \frac{\bar{a} + \underline{a}}{2}$, $a^r = \frac{\bar{a} - \underline{a}}{2}$, $a^w = \bar{a} - \underline{a}$, 则称 a^c 、 a^r 、 a^w 分别为区间数 a 的中点、半径和不确定度.

1.3 区间可能度

为了比较决策向量 \mathbf{x}_i 和 \mathbf{x}_j 的优劣性, 将 \mathbf{x}_i 和 \mathbf{x}_j 第 z 维上的区间目标函数分别表示为 $f_z(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}) = [\underline{f}_z(\mathbf{x}_i), \bar{f}_z(\mathbf{x}_i)]$ 和 $f_z(\mathbf{x}_j, \mathbf{u}) = [\underline{f}_z(\mathbf{x}_j), \bar{f}_z(\mathbf{x}_j)]$, 这里不妨设 $f_z(\mathbf{x}_i, \mathbf{u})$ 和 $f_z(\mathbf{x}_j, \mathbf{u})$ 在各自区间上服从独立均匀分布. 由文献 [9] 可知, $P(f_z(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}) \leq f_z(\mathbf{x}_j, \mathbf{u}))$ 表示为

$$\left\{ \begin{array}{l} 0, \bar{f}_z(\mathbf{x}_j) \leq \underline{f}_z(\mathbf{x}_i); \\ \frac{(\bar{f}_z(\mathbf{x}_j) - \underline{f}_z(\mathbf{x}_i))^2}{8f_z^r(\mathbf{x}_i)f_z^r(\mathbf{x}_j)}, \\ \underline{f}_z(\mathbf{x}_j) < \underline{f}_z(\mathbf{x}_i) < \bar{f}_z(\mathbf{x}_j) < \bar{f}_z(\mathbf{x}_i); \\ \frac{f_z^c(\mathbf{x}_j) - \underline{f}_z(\mathbf{x}_i)}{2f_z^r(\mathbf{x}_i)}, \\ \underline{f}_z(\mathbf{x}_i) < \underline{f}_z(\mathbf{x}_j) < \bar{f}_z(\mathbf{x}_j) \leq \bar{f}_z(\mathbf{x}_i); \\ 1 - \frac{(\bar{f}_z(\mathbf{x}_i) - \underline{f}_z(\mathbf{x}_j))^2}{8f_z^r(\mathbf{x}_i)f_z^r(\mathbf{x}_j)}, \\ \underline{f}_z(\mathbf{x}_i) \leq \underline{f}_z(\mathbf{x}_j) < \bar{f}_z(\mathbf{x}_i) < \bar{f}_z(\mathbf{x}_j); \\ \frac{\bar{f}_z(\mathbf{x}_j) - f_z^c(\mathbf{x}_i)}{2f_z^r(\mathbf{x}_j)}, \\ \underline{f}_z(\mathbf{x}_j) \leq \underline{f}_z(\mathbf{x}_i) < \bar{f}_z(\mathbf{x}_i) \leq \bar{f}_z(\mathbf{x}_j); \\ 1, \bar{f}_z(\mathbf{x}_i) \leq \underline{f}_z(\mathbf{x}_j). \end{array} \right. \quad (3)$$

1.4 区间距离公式

区间距离不能直接采用欧几里得距离公式, 本文利用下式对区间数距离进行计算:

$$d(f_z(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}), f_z(\mathbf{x}_j, \mathbf{u})) = \sqrt{D^2 + \frac{1}{3}F - \frac{2}{3}(T^r)^2}. \quad (4)$$

其中: $D = f_z^c(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}) - f_z^c(\mathbf{x}_j, \mathbf{u})$, $F = f_z^r(\mathbf{x}_i, \mathbf{u})^2 + f_z^r(\mathbf{x}_j, \mathbf{u})^2$, $T = (f_z(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}) \cap f_z(\mathbf{x}_j, \mathbf{u}))$ 为区间 $f_z(\mathbf{x}_i, \mathbf{u})$ 和 $f_z(\mathbf{x}_j, \mathbf{u})$ 的交集.

2 求解约束多目标区间优化问题的改进 NSGA-II 算法

NSGA-II 采用快速非占优支配、拥挤距离和精英保留策略, 使其具有较好的搜索性能, 具体步骤见文献 [5,8].

本文提出的改进 NSGA-II 仍采用 NSGA-II 框架, 在此基础上对其做如下改进:

1) 提出基于可能度的 P 占优支配关系, 用于对各区间目标函数进行占优排序;

2) 利用区间距离公式求出相同序值解之间的拥挤距离;

3) 引入正态分布交叉 (NDX) 算子替代模拟二进制交叉 (SBX) 算子;

4) 定义约束违背度来判断种群个体是否满足约束条件, 进而提出考虑约束条件的约束精英策略;

5) 在 NSGA-II 中融入交互多属性决策, 有利于决策者在整个 Pareto 前沿中选择符合决策者偏好的解。

本文从以上5个方面介绍改进 NSGA-II。

2.1 基于可能度的 P 占优支配关系

本文利用可能度 (如式 (3)) 求解两区间数之间的相对大小关系, 该关系定义如下。

定义 2 若可能度 $P(f_z(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}) \leq f_z(\mathbf{x}_j, \mathbf{u})) \geq \sigma, \sigma \in [0.5, 1]$, 则称区间 $f_z(\mathbf{x}_i, \mathbf{u})$ 在区间意义 σ 下小于等于 $f_z(\mathbf{x}_j, \mathbf{u})$ 。

此处以 $f_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{u})$ 和 $f_i(\mathbf{x}_2, \mathbf{u})$ 为例, 定义它们之间的占优关系如下。

定义 3 如果所有的 $f_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{u})$ 均在区间意义 0.5 下小于等于 $f_i(\mathbf{x}_2, \mathbf{u})$, 且存在 $f_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{u})$ 在区间意义 σ 下小于等于 $f_i(\mathbf{x}_2, \mathbf{u})$, 则称 \mathbf{x}_1 以 P 占优 \mathbf{x}_2 (P 代表区间数之间的区间比较关系), 记为 $\mathbf{x}_1 \succ_P \mathbf{x}_2$, 即

$$\begin{aligned} \forall i \in (1, 2, \dots, z), P(f_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}) \leq f_i(\mathbf{x}_2, \mathbf{u})) \geq 0.5, \\ \exists i \in (1, 2, \dots, z), P(f_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}) \leq f_i(\mathbf{x}_2, \mathbf{u})) > \sigma, \\ \sigma \in [0.5, 1]. \end{aligned} \quad (5)$$

定义 4 如果 \mathbf{x}_1 不以 P 占优 \mathbf{x}_2 , 且 \mathbf{x}_2 不以 P 占优 \mathbf{x}_1 , 则称 \mathbf{x}_1 和 \mathbf{x}_2 以 P 互不占优, 记为 $\mathbf{x}_1 \parallel_P \mathbf{x}_2$ 。

2.2 区间拥挤距离

定义目标函数为区间数的拥挤距离如下。

定义 5 具有相同序值的种群个体 i 周围的个体 $i-1$ 与 $i+1$ 区间距离的 z 维欧几里得距离为

$$SD_i = \sqrt{\sum_{m=1}^z d^2[f_m(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{u}), f_m(\mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{u})]}. \quad (6)$$

2.3 正态分布交叉 (NDX) 算子

为了增强空间搜索能力, 本文将正态分布交叉 (NDX) 算子^[11]引入 NSGA-II 中。在交叉运算中, 选择两个个体 \mathbf{x}_1 和 \mathbf{x}_2 (成为父代), 进而利用 NDX 算子产生两个新的个体 \mathbf{y}_1 和 \mathbf{y}_2 (成为子代)。对于第 i 个变量 ($\mathbf{x}_{1,i}$ 和 $\mathbf{x}_{2,i}$), 其交叉过程如下:

- 1) 产生一个随机数 $u \in [0, 1]$ 。
- 2) 如果 $u \leq 0.5$, 则有

$$\mathbf{y}_{1,i} = \frac{\mathbf{x}_{1,i} + \mathbf{x}_{2,i}}{2} + \frac{1.481(\mathbf{x}_{1,i} - \mathbf{x}_{2,i})|N(0, 1)|}{2},$$

$$\mathbf{y}_{2,i} = \frac{\mathbf{x}_{1,i} + \mathbf{x}_{2,i}}{2} - \frac{1.481(\mathbf{x}_{1,i} - \mathbf{x}_{2,i})|N(0, 1)|}{2};$$

如果 $u > 0.5$, 则有

$$\mathbf{y}_{1,i} = \frac{\mathbf{x}_{1,i} + \mathbf{x}_{2,i}}{2} - \frac{1.481(\mathbf{x}_{1,i} - \mathbf{x}_{2,i})|N(0, 1)|}{2},$$

$$\mathbf{y}_{2,i} = \frac{\mathbf{x}_{1,i} + \mathbf{x}_{2,i}}{2} + \frac{1.481(\mathbf{x}_{1,i} - \mathbf{x}_{2,i})|N(0, 1)|}{2}.$$

其中 $|N(0, 1)|$ 为正态分布随机变量。

2.4 约束精英策略

对于等式约束, 可以以牺牲某些准确性为代价, 放宽约束, 将他们转换成不等式约束^[9], 不妨将 $h_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = b_k$ 表示为 $b_k \leq h_k(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ 和 $h_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq \bar{b}_k$ 。为了统一格式, 本文将所有不等式都转化为大于等于的形式, 即 $h_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq \underline{b}_k$ 和 $\bar{b}_k \geq h_k(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, 进而利用式 (3) 计算解满足约束条件的可能度。若约束条件为 $g_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq a_j$, 则满足约束条件的可能度为 $P(g_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq a_j)$ 。令 ℓ_j 为种群个体违反第 j 个不等式约束的约束违背程度。由文献 [9] 可得 $\ell_j = 1 - P(g_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq a_j)$, 即 $\ell_j = P(g_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq a_j)$ 。在此基础上给出可行解定义如下。

定义 6 针对式 (2) 中描述的优化问题, 对于解 \mathbf{x}_q , 若 $\ell_j \leq \theta_j^{\max}$, 则称 \mathbf{x}_q 为该优化问题的 Pareto 可行解, 称 θ_j^{\max} 为第 j 个约束允许违背度。

根据 θ_j^{\max} 取值的不同, 可以得到如下结论:

- 1) 当 $\theta_j^{\max} = 0$ 时, 算法所得的解一定满足约束条件;
- 2) 当 $0 < \theta_j^{\max} < 1$ 时, 算法所得的解不完全满足约束条件;
- 3) 当 $\theta_j^{\max} = 1$ 时, 算法所得的解完全不考虑约束条件。

本文定义的约束精英策略用于删减不满足约束条件的解, 约束精英策略具体内容如下:

1) 根据定义 6 判断种群中的解是否为可行解, 是则保留, 否则删减;

2) 在保留的解中选取精英个体时, 首先选取序值小的个体, 若在序值相同的情况下, 则选择拥挤距离大的个体。

2.5 自适应交互多属性决策

定义 7 Pareto 最优解集^[5]中符合决策者偏好的解称为满意解。

这里设种群个数为 N 的决策方案集合为 $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ 。若目标函数个数为 z , 则对应的方案属性集合记为 $\mathbf{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_z\}$ 。决策者的偏好 (各属性权重) 为 $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_z\}$, 方案集 \mathbf{A}

在属性集 C 上的决策矩阵为

$$D = \begin{bmatrix} A_1^{C_1} & A_1^{C_2} & \cdots & A_1^{C_z} \\ A_2^{C_1} & A_2^{C_2} & \cdots & A_2^{C_z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_N^{C_1} & A_N^{C_2} & \cdots & A_N^{C_z} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

其中 $A_i^{C_j} = [\underline{a}_i^{C_j}, \bar{a}_i^{C_j}]$ ($i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, z$) 为方案 A_i 在属性 C_j 上的属性值。

为了公平比较不同量纲的属性值, 对决策矩阵做如下标准化处理^[10]:

$$\underline{r}_i^{C_j} = \frac{\underline{a}_i^{C_j}}{\left(\sum_{i=1}^N ((\underline{a}_i^{C_j})^2 + (\bar{a}_i^{C_j})^2) \right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\bar{r}_i^{C_j} = \frac{\bar{a}_i^{C_j}}{\left(\sum_{i=1}^N ((\underline{a}_i^{C_j})^2 + (\bar{a}_i^{C_j})^2) \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

规范后的决策矩阵表示为

$$R = \begin{bmatrix} R_1^{C_1} & R_1^{C_2} & \cdots & R_1^{C_z} \\ R_2^{C_1} & R_2^{C_2} & \cdots & R_2^{C_z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_N^{C_1} & R_N^{C_2} & \cdots & R_N^{C_z} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

其中: $R_i^{C_j} = [\underline{r}_i^{C_j}, \bar{r}_i^{C_j}]$, $i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, z$.

利用式(3)分别找出 $R_i^{C_j}$ 中的最小值 $R_{j \min}$ 作为理想方案 $R^+ = (R_{1 \min}, R_{2 \min}, \dots, R_{z \min})$, 再利用区间距离(式(4))计算各方案与理想方案之间的加权距离

$$D(R_j, R^+) = [d^2(R_j^{C_1}, R_{1 \min})\omega_1 + \cdots + d^2(R_j^{C_z}, R_{z \min})\omega_z]^{\frac{1}{2}}. \quad (9)$$

最后依据 $D(R_j, R^+)$ 对所有方案进行升序排序。为了在所得 Pareto 前沿的基础上选择出满意解, 本文将多属性决策与改进 NSGA-II 进行交互, 即在该算法中引入间隔代数 I (间隔代数 I 小于遗传代数), 在进化过程中, 设置种群每进化 I 代就进行一次多属性决策, 并存储当代种群中的满意解。若算法连续 3 次(进化 $3I$ 代)所得的满意解均为同一解, 则终止算法; 否则, 利用式(3)对所有满意解进行排序, 并选择其中的最小值个体作为满意解。

3 算法步骤及复杂度分析

Step 1: 设置遗传代数 $t = 0$, 区间占优参数 σ , 间隔代数 I , 遗传总代数 G , NSGA-II 算法中变异因子 η_m 和每个约束函数的约束允许违背度 θ_j^{\max} , 初始化个数为 N 的种群 $N(t)$ 。

Step 2: 利用文献[8,11]中正态分布交叉(NDX)算子和多项式变异算子计算 $N(t)$ 经过交叉、变异之

后的种群 $Q(t)$ 。

Step 3: 合并种群 $N(t)$ 和 $Q(t)$, 记作 $R(t)$ 。

Step 4: 利用定义 6 删除不满足约束要求的解。若解的个数不足 N , 则随机产生个体将种群增加到 N 个; 若解的个数大于 N , 则利用式(5)和(6)计算种群 $R(t)$ 中个体的序值和相同序值个体的区间拥挤距离, 并选取前 N 个优势个体构成下一代种群 $N(t+1)$ 。

Step 5: 判断遗传代数是否为 I 的倍数。如果是, 则进行多属性决策并存储当前代的满意解; 否则进行 Step 6。

Step 6: 判断存储的满意解是否连续 3 次相同。如果是, 则输出当前满意解且算法提前终止; 否则转到 Step 7。

Step 7: 判断算法是否进化了 G 代。如果是, 利用 TOPSIS 法对储存的满意解进行排序并选择其中最好的满意解, 算法终止; 否则, 令 $t = t + 1$, 转到 Step 2。

设目标函数维数为 M , 种群个数为 N , 由文献[5]可知, 传统 NSGA-II 的时间复杂度为 $O(N^2M)$ 。由于改进 NSGA-II 在进行 P 占优支配计算时需分别对目标函数的上下边界进行比较, 改进 NSGA-II 的时间复杂度为 $O(2N^2M)$ 。

4 数值算例及讨论

以优化问题 Q 为例, 验证所提算法的有效性。

$$Q: \min f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) =$$

$$u_1(x_1 + x_2 - 7.5)^2 + \frac{u_2^2(x_2 - x_1 + 3)^2}{4},$$

$$f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{u_1^2(x_1 - 1)^2}{4} + \frac{u_2^3(x_2 - 4)^2}{2}.$$

$$\text{s.t. } g_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{u_1^2(x_1 - 2)^3}{2} + u_2x_2 - 2.5 \leq [0, 0.3];$$

$$g_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) =$$

$$u_1^3x_2 + u_2^2x_1 - 3.85 - 8u_2^2(x_2 - x_1 + 0.65)^2 \leq [0, 0.3];$$

$$x_1 \in [0, 5], x_2 \in [0, 3], u_1, u_2 \in [0.9, 1.1].$$

若以下实验不做特殊说明, 则参数设置为

$$\sigma = 0.7, N = 30, G = 100,$$

$$\eta_m = 10, I = 10, \theta_1^{\max} = 0.2, \theta_2^{\max} = 0.2.$$

4.1 算法测度

基于目标函数为区间数这一特点, 参考文献[12]对于性能测度提出了 C 测度、 E 测度、 D 测度和运算时间, 以检验所提出的改进 NSGA-II 的性能。

定义 8 C 测度用来衡量 Pareto 前沿集合 \mathbf{x}_p^A 趋近于参考 Pareto 前沿集合 \mathbf{x}_p^B 的情况。

$$dm_i = \min_{j=1}^{|B|} \sqrt{\sum_{m=1}^z \left(\frac{d(f_m(\mathbf{x}_i^A, \mathbf{u}), f_m(\mathbf{x}_j^B, \mathbf{u}))}{d(f_m^{\max}, f_m^{\min})} \right)^2}, \quad (10)$$

$$C(\mathbf{x}_p^A, \mathbf{x}_p^B) = \sum_{i=1}^{|A|} \frac{dm_i}{|A|}. \quad (11)$$

其中: $d(\cdot, \cdot)$ 代表两区间数的区间距离(式(4)), 其余参数与文献[12]相同. 由式(11)可知, C 测度值越小, 趋近性越好.

定义 9 E 测度用来衡量 Pareto 前沿的均匀性.

$$E = \frac{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (d'_i - \bar{d})^2}}{\bar{d}}, \quad (12)$$

$$\bar{d} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} d'_i.$$

其中: d'_i 为第 i 个个体与 $i+1$ 个个体之间的区间距离(式(4)). 由式(12)可知, E 测度值越小, 分布越均匀.

定义 10 D 测度可以用来衡量 Pareto 前沿的散布度.

$$D = \sqrt{\sum_{m=1}^z |d[\max(f_m(\mathbf{x}, \mathbf{u})), \min(f_m(\mathbf{x}, \mathbf{u}))]|}. \quad (13)$$

由式(13)可知, D 测度越大, 分布越宽广.

4.2 θ_j^{\max} 取值分析

仿真分析约束精英策略中 θ_j^{\max} 对算法的影响. 分别取: 1) $\theta_1^{\max} = 0, \theta_2^{\max} = 0$; 2) $\theta_1^{\max} = 0.5, \theta_2^{\max} = 0.5$; 3) $\theta_1^{\max} = 1, \theta_2^{\max} = 1$. 表1统计了在上述3组参数情况下的实验结果.

表1 θ_j^{\max} 对算法性能测度的影响

测度	情况1)	情况2)	情况3)
C	0	0.2467	0.3265
E	0.312	0.248	0.242
D	13.02	12.104	19.08

由表1可得如下结论:

1) θ_j^{\max} 取值越大, 所得解集的 C 测度越大, 即最优解集违背约束条件的程度变高, 但目标函数变小;

2) θ_j^{\max} 取值越大, 进入最优解集的不可行解越多, 算法的多样性越强, 因此所得解 E 测度越好, 但同时 D 测度变差.

综合上述分析, 本文选取 $\theta_1^{\max} = 0.2, \theta_2^{\max} = 0.2$.

4.3 SBX 算子与 NDX 算子比较

为了验证本文改进 NSGA-II 算法的有效性, 将传统 NSGA-II 扩展为区间型(SBX 交叉算子^[8]), 并与本文算法进行比较. 两种算法优化问题 Q 所得 Pareto 前沿对比如图1所示, 两种算法所得数据的统计结果如表2所示.

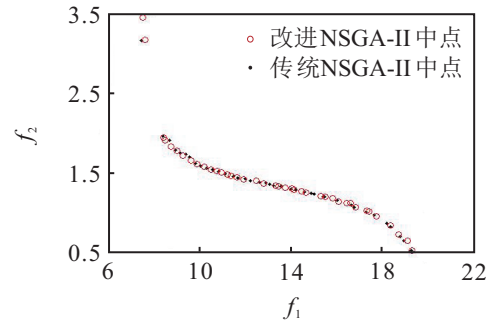


图1 两种算法优化函数 Q

表2 两种优化算法

测度	传统 NSGA-II	改进 NSGA-II
E	0.270	0.224
D	12	12.1

比较图1中传统 NSGA-II (“·”) 与改进 NSGA-II (“o”) 可知: 后者的 Pareto 前沿中两目标函数最小值均小于前者, 并且其 Pareto 前沿上解的分布均匀性也比传统 NSGA-II 优越(表2中的 D 测度和 E 测度也验证了上述结论).

由此可见, 在处理约束区间多目标问题时, 采用 NDX 算子的 NSGA-II 与采用 SBX 算子的 NSGA-II 相比, 前者能得到更好的 Pareto 前沿.

4.4 交互法与后验法的比较

选取4组偏好参数检验偏好对本文算法的影响:

1) $\omega_1 = 0.1, \omega_2 = 0.9$; 2) $\omega_1 = 0.5, \omega_2 = 0.5$; 3) $\omega_1 = 0.7, \omega_2 = 0.3$; 4) $\omega_1 = 1, \omega_2 = 0$. 满足4组不同偏好的满意解如图2所示.

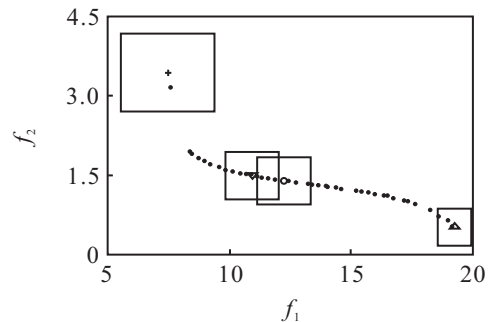


图2 不同偏好优化问题 Q

在图2中: “ Δ ” 为偏好1) 所得满意解中点, “o” 为偏好2) 所得满意解中点, “ ∇ ” 为偏好3) 所得满意解中点, “+” 为偏好4) 所得满意解中点, “·” 为 Pareto 前沿中点. 由仿真可知, 4组参数得到满意解的运算时间分别为 7.03s (“ Δ ”), 8.66s (“o”), 8.59s (“ ∇ ”), 6.87s (“+”). 因此可以得出结论: 偏好所对应的区域的 Pareto 最优解越密集, 算法的运算效率越低.

为了比较交互 NSGA-II 与后验 NSGA-II 的差异, 本文在上述4组偏好参数的情况下进行多次仿真实验, 其中具有代表性的数据如表3所示.

表 3 TOPSIS 法运算

组别	理想方案		与理想方案的距离	
	f_1	f_2	交互法	后验法
1)	[0.481 6, 0.517 8]	[0.129 2, 0.695 2]	0	0
2)	[0.451 6, 0.539 7]	[0.317 3, 0.630 3]	0.009	0.011
3)	[0.442 0, 0.541 7]	[0.327 2, 0.620 8]	0.016	0.019
4)	[0.358 0, 0.609 8]	[0.383 7, 0.594 0]	0	0

比较表 3 中的交互法和后验法与理想方案的距离可知,交互法优于后验法.在表 3 中:由于 1) 组和 4) 组偏好所对应区域最优解相对稀疏,交互法和后验法选择出的解相同;而在 2) 组和 3) 组偏好情况下,其对应区域最优解相对密集,且交互法与理想方案距离小于后验法,因此交互法决策出的满意解优于后验法.

综合本节可得结论如下: 1) 决策者的偏好不同,所得满意解随着偏好的不同而变化; 2) 偏好所对应的区域的 Pareto 最优解越密集,算法的运算效率越低; 3) 与后验法相比,在稀疏区域选择满意解能提高算法运算效率,在密集区域能选择出更好的满意解.

5 结 论

约束多目标区间优化问题是普遍存在且复杂的问题,而现有优化方法难以有效地求解.因此,本文在 NSGA-II 的基础上,提出一种交互多属性决策 NSGA-II. 为了比较种群个体的优劣,该算法定义 P 占优支配关系、区间拥挤距离,提出约束精英策略区分可行解和不可行解,并选出可行解中的优势个体,引入 NDX 交叉算子,增大算法的搜索空间,将多属性决策与改进 NSGA-II 进行交互,不仅能在得到优化问题 Pareto 前沿的基础上选择出符合决策者偏好的满意解,还可以使算法自适应地终止进化代数.

参考文献(References)

- [1] 张勇, 巩敦卫, 郝国生, 等. 含区间参数多目标系统的微粒群优化算法[J]. 自动化学报, 2008, 34(8): 921-928. (Zhang Y, Gong D W, Hao G S, et al. Particle swarm optimization for multi-objective systems with interval parameters[J]. Acta Automatica Sinica, 2008, 34(8): 921-928.)
- [2] 孙靖, 巩敦卫, 季新芳. 基于偏好方向的区间多目标交互进化算法[J]. 控制与决策, 2013, 28(4): 542-546. (Sun J, Gong D W, Ji X F. Interactive evolutionary algorithms for interval multi-objective optimization problems based on preference direction[J]. Control and Decision, 2013, 28(4): 542-546.)
- [3] 孙晓燕, 陈姗姗, 巩敦卫, 等. 基于区间适应值交互式遗传算法的加权多输出高斯过程代理模型[J]. 自动化学报, 2014, 40(2): 172-184.

- (Sun X Y, Chen S S, Gong D W, et al. Weighted multi-output gaussian process-based surrogate of interactive genetic algorithm with individual's interval fitness[J]. Acta Automatica Sinica, 2014, 40(2): 172-184.)
- [4] 巩敦卫, 季新芳. 融入偏好的区间高维多目标集合进化优化方法[J]. 控制理论与应用, 2013, 30(11): 1369-1383. (Gong D W, Ji X F. Optimizing interval higher-dimensional multi-objective problems using set-based evolutionary algorithms incorporated with preferences[J]. Control Theory & Applications, 2013, 30(11): 1369-1383.)
- [5] 公茂果, 焦李成, 杨咚咚, 等. 进化多目标优化算法研究[J]. 软件学报, 2009, 20(2): 271-289. (Gong M G, Jiao L C, Yang D D, et al. Research on evolutionary multi-objective optimization algorithms[J]. J of Software, 2009, 20(2): 271-289.)
- [6] 赵子衡, 韩旭, 姜潮. 基于近似模型的非线性区间数优化方法及其应用[J]. 计算力学学报, 2010, 27(3): 451-456. (Zhao Z H, Han X, Jiang C. Approximation model based nonlinear interval number optimization method and its application[J]. Chinese J of Computational Mechanics, 2010, 27(3): 451-456.)
- [7] Gong D W, Qin N N, Sun X Y. Evolutionary optimization algorithm for multi-objective optimization problems with interval parameters[C]. Proc of the 5th IEEE Int BioInspired Computing: Theories and Applications. New York: IEEE Press, 2010: 411-420.
- [8] Jeyadevi S, Baskar S, Babulal C K, et al. Solving multiobjective optimal reactive power dispatch using modified NSGA-II[J]. Int J of Electrical Power & Energy Systems, 2011, 33(2): 219-228.
- [9] Jiang Chao. Theories and algorithms of uncertain optimization based on interval[D]. Changsha: HNU College of Mechanical and Vehicle Engineering, Hu'nan University, 2008.
- [10] Dymova L, Sevastjanov P, Tikhonenko A. A direct interval extension of TOPSIS method[J]. Expert Systems with Applications, 2013, 40(12): 4841-4847.
- [11] 张敏, 罗文坚, 王煦法. 一种基于正态分布交叉的 ϵ -MOEA[J]. 软件学报, 2009, 20(2): 305-314. (Zhang M, Luo W J, Wang X F. A normal distribution crossover for ϵ -MOEA[J]. J of Software, 2009, 20(2): 305-314.)
- [12] 林浒, 彭勇. 面向多目标优化的适应度共享免疫克隆算法[J]. 控制理论与应用, 2011, 28(2): 206-214. (Lin H, Peng Y. Immune clonal algorithm with fitness sharing for multi-objective optimization[J]. Control Theory & Applications, 2011, 28(2): 206-214.)

(责任编辑: 闫 妍)