第 30 卷 第 1 期
Vol. 30 No. 1

控 制 与 决 策
Control and Decision

2015 年 1 月
Jan. 2015

文章编号: 1001-0920 (2015) 01-0181-04 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2013.1205

基于 $\mathcal{H}$ 表示的时变随机 Markov 跳跃系统的能观性

盛 立[1], 高 明[2], 张维海[2]

(1. 中国石油大学 (华东) 信息与控制工程学院，山东 青岛 266580;
2. 山东科技大学 信息与电气工程学院，山东 青岛 266590)

摘 要: 研究时变连续和离散随机 Markov 跳跃系统 (SMJSs) 的能观性问题. 基于 $\mathcal{H}$ 表示方法将时变 SMJSs 转化为等价的时变线性系统, 根据线性系统理论得到时变连续和离散 SMJSs 的能观性 Gramian 矩阵判据. 数值仿真表明了所得结论的正确性.

关键词: 随机 Markov 跳跃系统；时变系统；能观性；$\mathcal{H}$ 表示

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

Observability of time-varying stochastic Markov jump systems based on $\mathcal{H}$-representation

SHENG Li[1], *GAO Ming*[2], *ZHANG Wei-hai*[2]

(1. College of Information and Control Engineering，China University of Petroleum(East China)，Qingdao 266580, China；2. College of Information and Electrical Engineering，Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590，China．Correspondent：SHENG Li，E-mail：victory8209@163.com)

Abstract: The observability of time-varying continuous and discrete-time stochastic Markov jump systems(SMJSs) is investigated. Time-varying SMJSs are transformed into the equivalent time-varying linear systems based on the $\mathcal{H}$-representation method. Gramian matrix criteria for the observability of time-varying continuous and discrete-time SMJSs are derived based on the linear system theory. A numerical example is given to demonstrate the correctness of the obtained results.

Keywords: stochastic Markov jump systems；time-varying systems；observability；$\mathcal{H}$-representation

0 引 言

能观性从观测角度表征系统结构的基本特性, 是现代控制理论的重要概念. 对确定性系统而言, 能观性定义明确, 判别条件成熟[1]. 但由于随机系统的复杂性, 其能观性定义并不统一, 判别条件也各不相同. Zhang 等[2]定义随机系统的精确能观性为非零的初始状态导致非零的输出, 并基于谱技术给出了判定系统精确能观的 PBH 判据. Li 等[3]进一步给出了随机系统精确能观的秩判据. 另一方面, Markov 跳跃系统因能描述实际工程中大量的动态系统而受到广泛重视[4], 其能观性问题一直都是学者们关注的研究热点[5-7]. Costa 等[5]认为非零的初始条件会使系统的输出能量保持一个下界, 由此定义了 Markov 跳跃系统的 W- 能观性, 并给出了相关判据. Ni 等[6]将文献 [2] 的结论推广到具有乘性噪声的连续随机 Markov 跳跃系统 (SMJSs)中, 提出了连续 SMJSs 精确能观性. Shen 等[7]研究了离散 SMJSs 的能观性和能检性, 并证明了精确能观性和 W- 能观性对于离散随机 Markov 跳跃系统而言是等价的. 但上述文献关于能观性的讨论均局限于时不变跳跃系统, 由于缺乏有效的分析方法, 时变跳跃系统的能观性研究较少见到报道.

目前, 文献 [8] 提出了随机系统的 $\mathcal{H}$ 表示分析方法, 并基于该方法研究了随机系统的 D- 稳定性、D-镇定、能观性等一系列重要的控制问题. $\mathcal{H}$ 表示分析方法是指在矩阵参数方程转化为向量参数方程的过程中, 通过定义 $\mathcal{H}$ 表示矩阵将 $n^2 \times 1$ 维向量映射为 $p \times 1$ 维向量 ($p \leqslant n^2$), 从而消除冗余项, 并将随机系统中的某些控制问题转化为标准确定性系统相应的

收稿日期: 2013-09-01；**修回日期:** 2014-02-22.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61203053, 61174078)；中国博士后基金项目(2013M531635)；山东省博士后创新项目专项资金项目(201203096)；中央高校基本科研业务费专项资金项目(12CX02010A, 14CX02093A).

作者简介: 盛立(1982−), 男, 副教授, 博士, 从事随机系统、非线性系统控制的研究；张维海(1965−), 男, 教授, 博士生导师, 从事随机控制、鲁棒控制等研究.

控制问题. 由于存在随机切换信号, $\mathcal{H}$ 表示方法不直接适用于Markov跳跃系统的分析. 鉴于此, 本文首先将 $\mathcal{H}$ 表示分析方法推广至SMJSs中, 然后分别给出时变连续和离散SMJSs能观性的定义和相应的能观性判据, 最后通过数值仿真实例验证结论的正确性.

本文采用如下记号: $\boldsymbol{R}$ 为实数集合; $\boldsymbol{R}^n$ 为 n 维欧氏空间; $\boldsymbol{R}^{m\times n}$ 为 $m\times n$ 维实矩阵集合; $\boldsymbol{S}^n$ 为 $n\times n$ 维实对称矩阵集合; 记 $\boldsymbol{R}^+ := [0,+\infty)$, $\boldsymbol{Z}^+ := \{0,1,\cdots\}$; 对于矩阵 A, $\mathrm{rank}(A)$ 为矩阵 A 的秩, A^{T} 为矩阵的转置; $\mathcal{S}_N^n$ 为实对称矩阵序列 $A=(A_1,A_2,\cdots,A_N)$ 集合, $A_i\in\boldsymbol{S}^n$, $i=1,2,\cdots,N$; I_n 为 $n\times n$ 维单位矩阵; $\mathrm{diag}\{\cdot\}$ 为分块对角矩阵; $\mathrm{E}\{\cdot\}$ 为数学期望; $\chi_{\mathcal{A}}$ 为集合 $\mathcal{A}$ 的示性函数; a.s.表示几乎处处; $\otimes$ 为Kronecker积, $\oplus$ 为Kronecker和, 且有 $A\oplus B=A\otimes I+I\otimes B$.

1 系统描述和准备工作

考虑如下具有乘性噪声的时变连续与离散随机Markov跳跃系统:

$$\begin{cases}\mathrm{d}x(t)=A(t,r_t)x(t)\mathrm{d}t+C(t,r_t)x(t)\mathrm{d}w(t),\\ y(t)=D(t,r_t)x(t),\ x(0)=x_0\in\boldsymbol{R}^n;\end{cases}\tag{1}$$

$$\begin{cases}x(k+1)=A(k,r_k)x(k)+C(k,r_k)x(k)w(k),\\ y(k)=D(k,r_k)x(k),\ x(0)=x_0\in\boldsymbol{R}^n.\end{cases}\tag{2}$$

其中: $x(t)\in\boldsymbol{R}^n$ (相应的, $x(k)$) 为系统状态, $y(t)\in\boldsymbol{R}^{n_y}$ (相应的, $y(k)$) 为系统输出, x_0 为初始状态; $\omega(t)$ 为定义在完备的滤波概率空间 (Ω,F,F_t,P) 上的一维标准布朗运动, $w(k)$ 为满足 $\mathrm{E}(w(k))=0$ 和 $\mathrm{E}(w(k)w(s))=\delta_{ks}$ (Kronecker函数) 的实随机变量; $\{r_t,t\geqslant 0\}$ (相应的, $\{r_k,k\geqslant 0\}$) 为取值于有限模态集合 $\boldsymbol{T}=\{1,2,\cdots,N\}$ 的Markov跳跃过程.

在连续情况下, 系统(1)的转移率矩阵为 $\Pi=\{\pi_{ij}\}_{N\times N}$, 其模态间的转移概率为

$$P(r_{t+h}=j|r_t=i)=\begin{cases}\pi_{ij}h+o(h),\ i\neq j;\\ 1+\pi_{ii}h+o(h),\ i=j.\end{cases}$$

其中: $h>0$, $\lim\limits_{h\to 0}o(h)/h=0$; $\pi_{ij}\geqslant 0\,(i,j\in\boldsymbol{T})$ 为从时刻 t 状态 i 转移到时刻 $t+h$ 状态 $j\,(j\neq i)$ 的转移率, 且满足 $\pi_{ii}=-\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{N}\pi_{ij}$. 在离散情形下, 系统(2)的转移概率矩阵为 $\Lambda=\{\lambda_{ij}\}_{N\times N}$, 其模态间的转移概率为 $P(r_{k+1}=j|r_k=i)=\lambda_{ij}$, $\lambda_{ij}\geqslant 0$, $\forall i,j\in\boldsymbol{T}$, 且 $\sum\limits_{j=1}^{N}\lambda_{ij}=1$. 本文假设随机过程 $w(t)$ (相应的, $w(k)$) 与 r_t (相应的, r_k) 相互独立.

对于时变连续系统(1), $A(t,r_t)$、$C(t,r_t)$、$D(t,r_t)$ $(r_t\in\boldsymbol{T})$ 为已知合适维数的连续矩阵函数. 当 $r_t=i\in\boldsymbol{T}$ 时, 记 $A_i(t):=A(t,i)$, $C_i(t):=C(t,i)$, $D_i(t):=D(t,i)$. 对时变离散系统(2)的系数矩阵也进行类似定义, 当 $r_k=i\in\boldsymbol{T}$ 时, $A_i(k):=A(k,i)$, $C_i(k):=C(k,i)$, $D_i(k):=D(k,i)$.

对于 $A\in\mathcal{S}_N^n$, 定义如下映射:

$$\phi:\mathcal{S}_N^n\to\boldsymbol{R}^{n^2N},\ \varphi:\mathcal{S}_N^n\to\boldsymbol{R}^{\frac{n\times(n+1)}{2}N},$$

$$\phi(A)=(\mathrm{vec}(A_1)^{\mathrm{T}},\mathrm{vec}(A_2)^{\mathrm{T}},\cdots,\mathrm{vec}(A_N)^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}};$$

$$\varphi(A)=(\mathrm{svec}(A_1)^{\mathrm{T}},\mathrm{svec}(A_2)^{\mathrm{T}},\cdots,\mathrm{svec}(A_N)^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}},$$

其中 $\mathrm{vec}(\cdot)$ 和 $\mathrm{svec}(\cdot)$ 分别为对称矩阵 $A_i\,(i\in\boldsymbol{T})$ 的拉直函数和对称拉直函数, 即

$$\mathrm{vec}(A_i)=$$

$$(a_{11}(i),\cdots,a_{1n}(i),\cdots,a_{n1}(i),\cdots,a_{nn}(i))^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^{n^2},$$

$$\mathrm{svec}(A_i)=$$

$$(a_{11}(i),\cdots,a_{1n}(i),a_{22}(i),\cdots,a_{2n}(i),\cdots,$$

$$a_{n-1,n-1}(i),a_{n-1,n}(i),a_{nn}(i))^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^{\frac{n(n+1)}{2}},$$

$a_{jk}(i)(j,k=1,2,\cdots,n)$ 为对称矩阵 A_i 第 j 行第 k 列的元素. 对于 $A\in\mathcal{S}_N^n$, $\phi(A)$ 和 $\varphi(A)$ 的关系如下:

$$\phi(A)=H_N^n\varphi(A),\ H_N^n\in\boldsymbol{R}^{n^2N\times\frac{n(n+1)}{2}N}.\tag{3}$$

其中: $H_N^n\varphi(A)$ 为 $\phi(A)$ 的 $\mathcal{H}$ 表示, H_N^n 为 $\phi(A)$ 的 $\mathcal{H}$ 表示矩阵. 同理, 可定义 $H_N^{n_y}\in\boldsymbol{R}^{n_y^2N\times\frac{n_y(n_y+1)}{2}N}$, 其中 n_y 为系统输出 y 的维数. 易知 $\mathrm{rank}(H_N^n)=\dfrac{n(n+1)}{2}N$. 由矩阵理论可得到

$$\mathrm{rank}((H_N^n)^{\mathrm{T}}H_N^n)=\mathrm{rank}(H_N^n)=\frac{n(n+1)}{2}N.$$

因此, $(H_N^n)^{\mathrm{T}}H_N^n$ 是可逆矩阵, 进而有如下结论.

引理1 令 $Z_1,Z_2\in\mathcal{S}_N^n$, 若 $(H_N^n)^{\mathrm{T}}\phi(Z_1)=(H_N^n)^{\mathrm{T}}\phi(Z_2)$, 则 $\phi(Z_1)=\phi(Z_2)$.

证明 由式(3)可知, $\phi(Z_1)=H_N^n\varphi(Z_1)$, $\phi(Z_2)=H_N^n\varphi(Z_2)$. 根据 $(H_N^n)^{\mathrm{T}}\phi(Z_1)=(H_N^n)^{\mathrm{T}}\phi(Z_2)$, 有

$$(H_N^n)^{\mathrm{T}}H_N^n\varphi(Z_1)=(H_N^n)^{\mathrm{T}}H_N^n\varphi(Z_2).$$

因为 $(H_N^n)^{\mathrm{T}}H_N^n$ 可逆, 所以上式表示 $\varphi(Z_1)=\varphi(Z_2)$, 等价于 $\phi(Z_1)=\phi(Z_2)$. □

引理2[8] 对于合适维数的矩阵 A、P、B, 有

$$\mathrm{vec}(APB)=(A\otimes B^{\mathrm{T}})\mathrm{vec}(P).$$

按照非零初始状态导致非零输出的原则, 分别定义时变连续和离散SMJSs的能观性如下.

定义1 称系统(1)在时刻 $t_0\in\boldsymbol{R}^+$ 能观测, 若存在有限时间段 $[t_0,t_1]$, $t_1>t_0$, 则当 $y(t)\equiv 0$ a.s. 时, $\forall t\in[t_0,t_1]$, 有 $x(t_0)=0$ a.s. 成立.

定义2 称系统(2)在时刻 $k_0\in\boldsymbol{Z}^+$ 能观测, 若存在有限时间段 $[k_0,k_1]$, $k_1>k_0$, 则当 $y(k)\equiv 0$ a.s. 时, $\forall k\in[k_0,k_1]$, 有 $x(k_0)=0$ a.s. 成立.

2 主要结论

本节基于 $\mathcal{H}$ 表示方法将时变连续和离散SMJSs转化为等价的时变连续和离散确定性系统, 进而利用线性系统理论得到相应的能观性判据.

2.1 时变连续SMJSs的能观性

定理 1 定义

$$N(t)=((H_N^{n_y})^{\mathrm{T}}H_N^{n_y})^{-1}(H_N^{n_y})^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}\{D_i(t)\otimes D_i(t)\}H_N^n,$$
$$M(t)=((H_N^n)^{\mathrm{T}}H_N^n)^{-1}(H_N^n)^{\mathrm{T}}(\mathrm{diag}\{A_i(t)\oplus A_i(t)+C_i(t)\otimes C_i(t)\}+\Pi^{\mathrm{T}}\otimes I_{n^2})H_N^n.$$

令 $\Phi(t,t_0)$ 为系统(1)的状态转移矩阵, 有

$$\dot{\Phi}(t,t_0)=M(t)\Phi(t,t_0),\ \Phi(t_0,t_0)=I.$$

系统(1)在时刻$t_0\in\boldsymbol{R}^+$能观测, 当且仅当存在有限时间段$[t_0,t_1](t_1>t_0)$使得能观Gramian矩阵

$$W_0[t_0,t_1]=\int_{t_0}^{t_1}\Phi^{\mathrm{T}}(t,t_0)N^{\mathrm{T}}(t)N(t)\Phi(t,t_0)\mathrm{d}t \tag{4}$$

非奇异, 即$\det(W_0[t_0,t_1])\neq 0$.

证明 针对系统(1), 定义

$$\begin{cases}X_i(t)=\mathrm{E}\{x(t)x^{\mathrm{T}}(t)\chi_{\{r_t=i\}}\},\\ X(t)=(X_1(t),X_2(t),\cdots,X_N(t));\end{cases}$$
$$\begin{cases}Y_i(t)=\mathrm{E}\{y(t)y^{\mathrm{T}}(t)\chi_{\{r_t=i\}}\},\\ Y(t)=(Y_1(t),Y_2(t),\cdots,Y_N(t)).\end{cases}$$

其中$x(t)$和$y(t)$分别为系统(1)的状态和输出. 对$X(t)$使用广义Itô公式[6]可得

$$\begin{aligned}&\dot{X}(t)=L(X(t)),\\ &Y(t)=(D_1(t)X_1(t)D_1^{\mathrm{T}}(t),\cdots,D_N(t)X_N(t)D_N^{\mathrm{T}}(t)),\\ &X(0)=X_0=(0,\cdots,X_i(0),\cdots,0)\in\mathcal{S}_N^n,\\ &X_i(0)=\mathrm{E}\{x_0x_0^{\mathrm{T}}\chi_{\{r_0=i\}}\},\ i\in\boldsymbol{T}.\end{aligned}\tag{5}$$

其中

$$\begin{aligned}&L(X(t))=(\bar{L}(X_1(t)),\cdots,\bar{L}(X_N(t))),\\ &\bar{L}(X_i(t))=A_i(t)X_i(t)+X_i(t)A_i^{\mathrm{T}}(t)+C_i(t)X_i(t)C_i^{\mathrm{T}}(t)+\sum_{j=1}^N\pi_{ji}X_j(t),\\ &\dot{X}_i(t)=\bar{L}(X_i(t)),\ i\in\boldsymbol{T}.\end{aligned}\tag{6}$$

以矩阵参数方程形式给出的式(5)不利于分析, 下面将其转化为向量参数方程. 对式(6)两边取拉直运算vec, 并使用引理2可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{vec}(\dot{X}_i(t))=\\ &(A_i(t)\otimes I_n+I_n\otimes A_i(t)+C_i(t)\otimes C_i(t))\mathrm{vec}(X_i(t))+\sum_{j=1}^N\pi_{ji}\mathrm{vec}(X_j(t)),\ i\in\boldsymbol{T}.\end{aligned}\tag{7}$$

系统(5)等价于

$$\phi(\dot{X}(t))=\bar{M}(t)\phi(X(t)),\tag{8}$$
$$\phi(Y(t))=\bar{N}(t)\phi(X(t)),\tag{9}$$
$$\phi(X(0))=\phi(X_0).\tag{10}$$

其中

$$\bar{M}(t)=\mathrm{diag}\{A_i(t)\oplus A_i(t)+C_i(t)\otimes C_i(t)\}+\Pi^{\mathrm{T}}\otimes I_{n^2},$$
$$\bar{N}(t)=\mathrm{diag}\{D_i(t)\otimes D_i(t)\}.$$

下面证明式(8)等价于

$$\varphi(\dot{X}(t))=M(t)\varphi(X(t)),\tag{11}$$

其中$M(t)$如定理1所示. 考虑到式(3), 式(8)改写为

$$H_N^n\varphi(\dot{X}(t))=\bar{M}(t)H_N^n\varphi(X(t)).\tag{12}$$

对式(12)两边同乘$(H_N^n)^{\mathrm{T}}$, 因为$(H_N^n)^{\mathrm{T}}H_N^n$可逆, 两边再同乘$((H_N^{n_y})^{\mathrm{T}}H_N^{n_y})^{-1}$可得式(11). 反之, 若式(11)成立, 则根据$\varphi(A)=((H_N^n)^{\mathrm{T}}H_N^n)^{-1}(H_N^n)^{\mathrm{T}}\phi(A)$(由式(3)推得)和$M(t)$的定义可得

$$(H_N^n)^{\mathrm{T}}\phi(\dot{X}(t))=(H_N^n)^{\mathrm{T}}\bar{M}(t)\phi(X(t)).\tag{13}$$

由引理1可得式(8). 同理, 对式(9)进行类似的变换, 式(8)$\sim$(10)等价于

$$\begin{cases}\varphi(\dot{X}(t))=M(t)\varphi(X(t)),\\ \varphi(Y(t))=N(t)\varphi(X(t)),\\ \varphi(X(0))=\varphi(X_0),\end{cases}\tag{14}$$

其中$M(t)$, $N(t)$如定理1所示.

注意到, $y(t)\equiv 0$ a.s.$(\forall t\in[t_0,t_1])$, 当且仅当$\varphi(Y(t))=0\,(\forall t\in[t_0,t_1])$; $x(t_0)\equiv 0$ a.s., 当且仅当$\varphi(X(t_0))=0$. 因此, 系统(1)在时刻$t_0\in\boldsymbol{R}^+$能观测, 当且仅当时变线性连续系统(14)在时刻$t_0\in\boldsymbol{R}^+$能观测. 根据文献[1]的定理9.8, 若能观Gramian矩阵非奇异, 则系统(14)在时刻$t_0\in\boldsymbol{R}^+$能观测. □

由于时变系统状态转移矩阵$\Phi(t,t_0)$求解困难, 能观性Gramian矩阵判据在具体判别中的应用受到限制, 定理1的意义在于理论分析中的应用. 基于文献[1]的定理9.10, 直接得到易于验证的充分性判据.

定理 2 假设存在正整数q, 对于$t\in[t_0,t_f]$, $A_i(t),C_i(t)$为$(q-1)$次连续可微, $D_i(t)$为q次连续可微, $i\in\boldsymbol{T}$. 定义$\dfrac{n_y(n_y+1)}{2}N\times\dfrac{n(n+1)}{2}N$维矩阵函数序列

$$G_0(t)=N(t),\ G_1(t)=G_0(t)M(t)+\dot{G}_0(t),\cdots,$$
$$G_q(t)=G_{q-1}(t)M(t)+\dot{G}_{q-1}(t).$$

若存在$t_1>t_0$满足$\mathrm{rank}(G(t_1))=n(n+1)N/2$, 则系统(1)在时刻$t_0\in\boldsymbol{R}^+$能观测, 其中

$$G(t)=[G_0^{\mathrm{T}}(t)\ \ G_1^{\mathrm{T}}(t)\ \ \cdots\ \ G_q^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}.$$

2.2 时变离散SMJSs的能观性

定理 3 定义

$$Q(k)=((H_N^{n_y})^{\mathrm{T}}H_N^{n_y})^{-1}(H_N^{n_y})^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}\{D_i(k)\otimes D_i(k)\}H_N^n,$$
$$P(k)=((H_N^n)^{\mathrm{T}}H_N^n)^{-1}(H_N^n)^{\mathrm{T}}(\Lambda^{\mathrm{T}}\otimes I_{n^2})\times\mathrm{diag}\{A_i(k)\otimes A_i(k)+C_i(k)\otimes C_i(k)\}H_N^n.$$

令$\Psi(k,k_0)$为系统(2)的状态转移矩阵, 有$\Psi(k+1,k_0)=P(k)\Psi(k,k_0)$, $\Psi(k_0,k_0)=I$. 系统(2)在时刻$k_0\in\boldsymbol{Z}^+$能观测, 当且仅当存在有限时间段$[k_0,k_1]$ $(k_1>k_0)$使得Gramian矩阵

$$W_0[k_0,k_1]=\sum_{k=k_0}^{k_1-1}\Psi^{\mathrm{T}}(k,k_0)Q^{\mathrm{T}}(k)Q(k)\Psi(k,k_0) \quad (15)$$

非奇异, 即 $\det(W_0[k_0,k_1])\neq 0$.

证明 针对系统 (2), 定义

$$\begin{cases}X_i(k)=\mathrm{E}\{x(k)x^{\mathrm{T}}(k)\chi_{\{r_k=i\}}\},\\ X(k)=(X_1(k),X_2(k),\cdots,X_N(k));\end{cases}$$

$$\begin{cases}Y_i(k)=\mathrm{E}\{y(k)y^{\mathrm{T}}(k)\chi_{\{r_k=i\}}\},\\ Y(k)=(Y_1(k),Y_2(k),\cdots,Y_N(k)).\end{cases}$$

其中 $x(k)$ 和 $y(k)$ 分别为系统 (2) 的状态和输出. 由文献 [4] 可知, $X(k)$ 满足以下差分方程:

$$\begin{aligned}&X(k+1)=M(X(k)),\\ &Y(k)=(D_1(k)X_1(k)D_1^{\mathrm{T}}(k),\cdots,D_N(k)X_N(k)D_N^{\mathrm{T}}(k)),\\ &X(0)=X_0=(0,\cdots,X_i(0),\cdots,0)\in\mathcal{S}_N^n,\\ &X_i(0)=\mathrm{E}\{x_0x_0^{\mathrm{T}}\chi_{\{r_0=i\}}\},\ i\in\boldsymbol{T}.\end{aligned} \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned}&M(X(k))=(\bar{M}(X_1(k)),\cdots,\bar{M}(X_N(k))),\\ &\bar{M}(X_i(k))=\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ji}A_j(k)X_j(k)A_j^{\mathrm{T}}(k)+\\ &\qquad\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ji}C_j(k)X_j(k)C_j^{\mathrm{T}}(k),\\ &X_i(k+1)=\bar{M}(X_i(k)),\ i\in\boldsymbol{T}.\end{aligned} \quad (17)$$

与定理 1 类似, 使用 $\mathcal{H}$ 表示方法可以证明式 (16) 与如下时变线性离散系统等价:

$$\begin{aligned}&\varphi(X(k+1))=P(k)\varphi(X(k)),\\ &\varphi(Y(k))=Q(k)\varphi(X(k)),\ \varphi(X(0))=\varphi(X_0),\end{aligned} \quad (18)$$

其中 $P(k)$, $Q(k)$ 如定理 3 所示.

容易看出, $y(k)\equiv 0$ a.s.$(\forall k\in[k_0,k_1])$, 当且仅当 $\varphi(Y(k))=0\,(\forall k\in[k_0,k_1])$; $x(k_0)\equiv 0$ a.s., 当且仅当 $\varphi(X(k_0))=0$. 因此, 系统 (2) 在时刻 $k_0\in\boldsymbol{Z}^+$ 能观测, 当且仅当时变线性离散系统 (18) 在时刻 $k_0\in\boldsymbol{Z}^+$ 能观测. 基于文献 [1] 的定理 25.10, 若定理 3 中给出的能观 Gramian 矩阵非奇异, 则系统 (18) 在时刻 $k_0\in\boldsymbol{Z}^+$ 能观测. □

3 数值仿真

考虑时变连续随机 Markov 跳跃系统具有参数

$$A_1(t)=\begin{bmatrix}t&0\\1&2\end{bmatrix},\ C_1(t)=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\ D_1(t)=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$A_2(t)=\begin{bmatrix}1&0\\t&1\end{bmatrix},\ C_2(t)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ D_2(t)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\Pi=\begin{bmatrix}-2&2\\1&-1\end{bmatrix}.$$

其中: $H_N^n=H_2^2$, $H_N^{n_y}=H_2^1$. 根据第 1 节中 $\mathcal{H}$ 表示矩阵的定义, 易得 $H^1=1$, $H_2^1=\mathrm{diag}\{H^1,H^1\}$, $H^2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $H_2^2=\mathrm{diag}\{H^2,H^2\}$. 故有

$$M(t)=\begin{bmatrix}2t-2&0&0&1&0&0\\1&t&0&0&1&0\\0&2&3&0&0&1\\2&0&0&2&0&0\\0&2&0&t&2&0\\0&0&2&0&2t&2\end{bmatrix},\ N(t)=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\9&0\\0&1\\0&2\\0&1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

进而, 可以计算得到 $G(t)=[G_0^{\mathrm{T}}(t)\ \ G_1^{\mathrm{T}}(t)\ \ G_2^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}$. 其中 $G_0(t)=N(t)$, $G_1(t)=G_0(t)M(t)+\dot{G}_0(t)$, $G_2(t)=G_1(t)M(t)+\dot{G}_1(t)$. 计算 $G(t)$ 的行列式 $\det(G(t))=-5832t(1+10t^2)<0,\forall t>0$, 有 $\mathrm{rank}(G(t))=6,\forall t>0$. 根据定理 2 和定义 1, 此系统对于任意 $t_0>0$ 均是能观测的.

4 结 论

本文基于 $\mathcal{H}$ 表示方法研究了时变连续和离散随机 Markov 跳跃系统的能观性, 给出了保证系统能观的 Gramian 矩阵判据. 能观性在时变 SMJSs 的线性二次最优控制和 H_2/H_∞ 控制中的应用有待进一步研究.

参考文献(References)

[1] Rugh W J. Linear system theory[M]. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1993: 148-150.

[2] Zhang W, Chen B S. On stabilizability and exact observability of stochastic systems with their applications[J]. Automatica, 2004, 40(1): 87-94.

[3] Li Z Y, Wang Y, Zhou B, et al. Detectability and observability of discrete-time stochastic systems and their applications[J]. Automatica, 2009, 45(5): 1340-1346.

[4] Dragan V, Morozan T, Stoica A M. Mathematical methods in robust control of discrete-time linear stochastic systems[M]. New York: Springer, 2010: 45-48.

[5] Costa E F, Val J B R. On the observability and detectability of continuous-time Markov jump linear systems[J]. SIAM J of Control and Optimization, 2002, 41(4): 1295-1314.

[6] Ni Y, Zhang W, Fang H. On the observability and detectability of linear stochastic systems with Markov jumps and multiplicative noise[J]. J of Systems Science & Complexity, 2010, 23(1): 102-115.

[7] Shen L, Sun J, Wu Q. Observability and detectability of discrete-time stochastic systems with Markovian jump[J]. Systems & Control Letters, 2013, 62(1): 37-42.

[8] Zhang W, Chen B S. $\mathcal{H}$-representation and applications to generalized Lyapunov equations and linear stochastic systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2012, 57(12): 3009-3022.

(责任编辑: 郑晓蕾)