

基于SRCKF的自适应高斯和状态滤波算法

刘瑜^a, 董凯^a, 刘俊^a, 齐林^a, 肖楚琬^b

(海军航空工程学院 a. 信息融合研究所, b. 接改装大队, 山东烟台 264001)

摘要: 针对非线性非高斯离散动态系统中的状态估计问题, 基于高斯和递推关系, 提出一种高斯和状态估计算法 GSSRCKF. 首先将状态噪声、观测噪声及滤波初值均表示为高斯和的形式, 以平方根容积卡尔曼滤波为子滤波器分别估计各高斯子项对应的系统状态; 然后结合各子项对应的权值实现全局估计; 最后设计高斯子项对应权值的自适应策略, 并采用约简控制法降低计算复杂度. 仿真结果验证了所提出的算法在滤波稳定性方面的优越性.

关键词: 非线性非高斯; 状态估计; 平方根容积卡尔曼滤波; 高斯和滤波; 自适应滤波权值

中图分类号: U249

文献标志码: A

Adaptive Gaussian sum method based on squared-root cubature Kalman filter for state estimation

LIU Yu^a, DONG Kai^a, LIU Jun^a, QI Lin^a, XIAO Chu-wan^b

(a. Research Institute of Information Fusion, b. Training Center of New Equipment, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai 264001, China. Correspondent: LIU Yu, E-mail: liuyu77360132@126.com)

Abstract: For the state estimation of nonlinear non-Gaussian discrete dynamic systems, based on the Gaussian sum recursive relations, a Gaussian sum squared-root cubature Kalman filter (GSSRCKF) for state estimation is proposed. On the assumption that the probability density functions of process noises, measurement noises and initial condition are denoted by a Gaussian sum or approximated by a Gaussian sum, a bank of squared-root cubature Kalman filters (SRCKF) are used as the Gaussian sub-filters to estimate the state of the system respectively in GSSRCKF. Then, the different filtering results are combined to the global state estimation according to the corresponding weights, which are set as adaptive process parameters at each filtering time. And the effective reduction method is adopted to reduce the computational complexity. The simulation results verify the superiority of the proposed method on filter consistency.

Key words: nonlinear non-Gaussian; state estimation; squared-root cubature Kalman filter; Gaussian sum filter; adaptive filtering weight

0 引言

离散随机动态系统中的状态估计是一个迅速发展的研究问题, 在目标跟踪、卫星导航、信号处理、决策分析、自适应与最优控制等领域具有举足轻重的地位及广阔的应用前景^[1].

贝叶斯理论是解决递归状态估计问题的常用方法, 即基于量测并通过状态概率密度函数(PDF)的贝叶斯递归关系(BRR)来实现状态的估计. 概率密度函数可以提供完整的状态描述, 但其本身是不可观测的, 只有在某些特殊情况下才能取得贝叶斯递归关系的直接解, 比如线性高斯系统, 在其他情况下, 需要采用有效的近似方法. 根据估计结果的有效性, 可以将

现有的近似方法分为两类^[2]: 第1种方法仅仅根据一系列相邻点估计来计算最终估计结果, 称为局部估计方法; 第2种方法利用整个状态空间的信息进行估计, 称为全局估计方法. 标准的局部估计方法通过泰勒级数的展开(取一阶或者二阶)来近似状态或者量测方程中的非线性函数. 基于此种近似方法, 通过贝叶斯递归关系的推导就产生了相应的一阶和二阶扩展卡尔曼滤波算法^[3].

近十年来, 研究者们基于多项式内插法^[4-8]、不敏变换(UT)^[6-11]等思想, 开发出一系列新的局部估计滤波算法. 采用 Stirling 多项式内插法来近似非线性函数, 即推导出中心差分滤波器(DDF)^[4]. 此外, 摒弃

收稿日期: 2013-08-02; 修回日期: 2014-03-02.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61032001); 山东省自然科学基金项目(ZR2012FQ004).

作者简介: 刘瑜(1986-), 男, 讲师, 博士, 从事非线性滤波、多传感器信息融合等研究; 董凯(1986-), 男, 讲师, 博士, 从事多传感器信息融合、航迹关联等研究.

了对系统方程中非线性函数直接近似替换的思想, UT 采用一系列确定性的加权点(称为 Sigma 点)经过非线性函数传播之后, 对状态估计中的概率密度函数进行近似. 主要代表算法有不敏卡尔曼滤波(UKF)^[9]、高斯厄米特滤波(GHF)^[6]. 此类局部估计算法也常称为 Sigma 点卡尔曼滤波, 例如 UKF 基于 UT 思想选择 $2n + 1$ (n 为状态维数) 个具有权值的 Sigma 点来近似状态变量的均值. 这些 Sigma 点经过非线性函数传播后捕获到的均值和方差可以达到非线性函数真实值的 3 阶精度, 相对于 EKF, 不仅提高了估计精度, 也克服了 EKF 易于发散、只适用于弱非线性系统的缺点; 另一方面, 由于使用确定性采样 Sigma 点, UKF 避免了粒子滤波(PF)容易出现粒子退化、计算量大以及实时性差等问题. 然而, UKF 必须调节系统参数才能达到理想效果, 且在高维系统中容易出现数值不稳定的现象^[11].

近年来, Arasaratnam 同样从分布近似的角度推导出一种 3 阶球面-径向容积规则, 提出了容积卡尔曼滤波(CKF)^[12]. CKF 通过 $2n$ 个等权值容积点来传播系统状态的均值和方差, 能获得较高的滤波精度. CKF 具备 UKF 的优点, 且无需像 UKF 一样调节各参数因子, 其容积点及其权值仅由状态维数唯一确定, 可以预先计算和存储, 所以算法设计和实现更为简单, 受到了广大学者的高度重视. 此外, CKF 的平方根形式(SRCKF)更是在 CKF 基础上提高了滤波的稳定性.

由于局部估计方法对状态估计中条件概率密度函数的近似只考虑了二阶矩信息, 此类方法在非高斯系统中并不实用. 而全局估计方法可以提供条件概率密度函数的完整信息, 能够在非线性非高斯系统中取得更高的估计质量. 然而, 估计质量的提高是以牺牲计算功耗为代价的. 目前, 全局估计方法的设计主要有以下 3 种途径: 1) 基于系统近似及概率密度函数高斯和近似的分析法^[13-14]; 2) 以数值方式求解贝叶斯递归关系中积分式的数值法^[15-16]; 3) 基于 Monte Carlo 的仿真法^[17-18].

实际上, 分析类的全局估计方法利用了一系列的局部方法, 例如高斯和滤波(GSF)采用了一系列扩展卡尔曼滤波器, Sigma 点高斯和滤波(SPGSF)采用了一系列 Sigma 点滤波器. 分析类的全局估计方法能够利用多个局部滤波器克服概率密度函数的多模性问题, 因而可以取得相当高的估计质量.

基于以上分析, 本文主要针对非线性非高斯系统中的状态估计问题, 研究新的更有效的分析类全局估计算法. 基于 SRCKF 滤波分析, 结合量测似然函数的利用, 在权值自适应准则中引入更多的有用信息, 提出一种基于 SRCKF 的权值自适应高斯和滤波算法

(GSSRCKF), 并结合仿真比较证明了 GSSRCKF 的有效性.

1 基于 SRCKF 的状态估计

考虑如下离散非线性随机系统:

$$x_{k+1} = f_k(x_k) + w_k, \quad k = 0, 1, \dots; \quad (1)$$

$$z_k = h_k(x_k) + v_k, \quad k = 0, 1, \dots. \quad (2)$$

其中: 向量 $x_k \in \mathbf{R}^{n_x}$ 、 $z_k \in \mathbf{R}^{n_z}$ 分别表示 k 时刻的系统状态及量测; $f_k: \mathbf{R}^{n_x} \rightarrow \mathbf{R}^{n_x}$ 、 $h_k: \mathbf{R}^{n_x} \rightarrow \mathbf{R}^{n_z}$ 分别表示状态转移矩阵及量测矩阵; $w_k \in \mathbf{R}^{n_x}$ 、 $v_k \in \mathbf{R}^{n_z}$ 分别表示过程噪声及量测噪声, 且相互独立. 假设已预知过程噪声及量测噪声的概率密度函数分别为 $p(w_k)$ 和 $p(v_k)$, 初始状态为 x_0 , 初始概率密度函数为 $p(x_0)$, 且初始状态与噪声无关.

状态估计的主要目标是, 基于量测 $z^k \triangleq [z_0, z_1, \dots, z_k]$, 解算被估目标的状态信息, 并以条件概率密度函数的形式表示估计结果. 通常情况下, 状态估计要求解算出目标的一阶矩信息(状态 $\hat{x}_{k/k} = E[x_k|z^k]$)及二阶矩信息(协方差矩阵 $\mathbf{P}_{k/k} = \text{COV}[x_k|z^k]$), 例如 $\mathbf{P}_{k/k}(x_k|z^k) \approx N\{x_k : \hat{x}_{k/k}, \mathbf{P}_{k/k}\}$ ^[11].

1.1 CKF 数值积分近似法

在阐述 CKF 滤波原理之前, 先介绍求容积的数值积分近似法. 考虑如下高斯密度函数的 n 维积分^[12,19]:

$$\mathbf{I}(f) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) \exp(-x^T x) dx. \quad (3)$$

其中: $f(x)$ 为任意函数, \mathbf{R}^n 为积分区域. 贝叶斯理论求解非线性高斯滤波的关键问题在于计算式(3)所示积分, 其积分项 $f(x) \exp(-x^T x)$ 可以概括为具有“非线性函数 \times 高斯概率密度”形式的多维积分.

令 $x = ry$, $y^T y = 1$, $r \in [0, \infty)$, 则式(3)可表示为

$$\mathbf{I}(f) = \int_0^\infty \int_{\mathbf{U}_n} f(ry) r^{n-1} \exp(-r^2) d\sigma(y) dr. \quad (4)$$

其中: $\mathbf{U}_n = \{y \in \mathbf{R}^n | y^T y = 1\}$ 为半径为 1 的超球面; $\sigma(\cdot)$ 为球面度量单位或 \mathbf{U}_n 的面积微元. 将式(4)化简得

$$\mathbf{I}(f) = \int_0^\infty \mathbf{S}(r) r^{n-1} \exp(-r^2) dr, \quad (5)$$

$$\mathbf{S}(r) = \int_{\mathbf{U}_n} f(ry) d\sigma(y). \quad (6)$$

这样, n 维积分式(3)便变换为如式(5)和(6)所示的球面-径向积分形式, 可采用球面积分原理及径向原理求解, 如下式所示, 从而形成 CKF 滤波算法.

$$\int_{\mathbf{U}_n} f(y) d\sigma(y) \approx w \sum_{i=1}^{2n} f[u_i], \quad (7)$$

$$\int_a^b f(x) w(x) dx \approx w_i \sum_{i=1}^m f(x_i). \quad (8)$$

式(7)显示了球面积分原理下的一种 3 阶球面积

分结构, 其中 $[u]_i$ 表示生成算子的第 i 个元素. 式 (8) 展示了球面径向原理, 即 m 点高斯积分可以等价于 $(2m-1)$ 个多项式求和形式, 其中 $w(x)$ 是一个在积分区间 $[a, b]$ 上非负的权重函数.

更为具体地, CKF 利用球面径向准则选取 $2n$ (n 为状态维度) 个具有相应权值的点集 (w_i, ξ_i) , 用于逼近非线性状态的后验均值和协方差, 如下所示:

$$\mathbf{I}(f) = \sum_{i=1}^m w_i f(\xi_i). \quad (9)$$

其中

$$\begin{cases} \xi_i = \sqrt{n}[1]_i, \\ w_i = \frac{1}{2n}, \\ i = 1, 2, \dots, 2n. \end{cases} \quad (10)$$

这里 $[1]_i$ 表示集合 $[1]$ 的第 i 列. 若 $n = 2$, 则有

$$[1] = \{[1, 0]^T, [0, 1]^T, [-1, 0]^T, [0, -1]^T\}. \quad (11)$$

按照以上方法计算出容积点集之后, 可以执行 CKF 中的时间更新和量测更新步骤.

1.2 平方根容积卡尔曼滤波^[12]

原理上, CKF 滤波过程与 UKF 类似, 但其理论推导更加严谨^[12, 19]. CKF 采用了一种全新的点集近似分布方法, 即基于 Cubature 准则, 产生 $2n$ 个相同权值的 Cubature 点, 经过非线性函数转换后生成新的点, 然后结合权值计算系统状态预测, 此过程中不需要对非线性模型实施线性化.

CKF 同样具备 UKF 的优良特性, 可以较好地处理非线性系统的估计问题, 使用更少的采样点, 进一步降低了计算代价, 且在 3 维以上非线性系统中的优势更为明显, 具有数值精度更高、滤波稳定性更高和可采用平方根策略的优良特性^[19].

然而, 在 CKF 的滤波递推过程中, 每一步都要计算状态估计协方差矩阵 $\mathbf{P}_{k/k}$ 以及一步预测协方差矩阵 $\mathbf{P}_{k/k-1}$ 的平方根, 具有计算量较大且数值不稳定的缺点. 而平方根 CKF (SRCKF) 在 CKF 的基础上, 以 Cholesky 分解的形式直接传播和更新状态协方差矩阵的平方根, 降低了计算负担, 获得了更高的计算效率, 同时能保证协方差矩阵的非负定性, 避免了滤波器的发散, 提高了滤波的收敛速度和数值稳定性. 以下详述 SRCKF 的滤波过程^[12].

考虑如下 n 维非线性离散状态空间模型:

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}) + w_{k-1}, \quad k = 0, 1, \dots; \quad (12)$$

$$z_k = h(x_k, u_k) + v_k, \quad k = 0, 1, \dots. \quad (13)$$

其中: u_k 是已知的控制输入, 过程噪声 w_{k-1} 是零均值、方差 \mathbf{Q}_{k-1} 的高斯白噪声, 量测噪声 v_k 是零均值、方差 \mathbf{R}_k 的高斯白噪声.

Step 1 初始化. 设置状态初值 $x_{0|0}$, 协方差矩阵初值 $\mathbf{P}_{0|0}$, 协方差矩阵平方根因子的初始值 $\mathbf{S}_{0|0}$, 其中 $\mathbf{P}_{0|0} = \mathbf{S}_{0|0} \mathbf{S}_{0|0}^T$.

Step 2 时间更新 ($k = 1, 2, \dots$).

Step 2.1: 计算当前状态的 $2n$ 个容积点 ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$\mathbf{X}_{i,k-1|k-1} = \mathbf{S}_{k-1|k-1} \xi_i + \hat{x}_{k-1|k-1}. \quad (14)$$

Step 2.2: 计算容积点经过非线性状态转移函数的预测值 ($i = 1, 2, \dots, 2n$)

$$\mathbf{X}_{i,k|k-1}^* = f(\mathbf{X}_{i,k-1|k-1}, u_{k-1}). \quad (15)$$

Step 2.3: 结合权值和容积点预测值, 估计预测状态 (SRCKF 采用相等权值)

$$\hat{x}_{k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{X}_{i,k|k-1}^*. \quad (16)$$

Step 2.4: 估计预测误差协方差矩阵的平方根因子

$$\mathbf{S}_{k|k-1} = \text{Tria}([\mathbf{X}_{k|k-1}^* \quad \mathbf{S}_{Q,k-1}]), \quad (17)$$

其中 $\mathbf{Q}_{k-1} = \mathbf{S}_{Q,k-1} \mathbf{S}_{Q,k-1}^T$, 且

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{k|k-1}^* = & \frac{1}{\sqrt{2n}} [\mathbf{X}_{1,k|k-1}^* - \hat{x}_{k|k-1}, \\ & \mathbf{X}_{2,k|k-1}^* - \hat{x}_{k|k-1}, \dots, \mathbf{X}_{2n,k|k-1}^* - \hat{x}_{k|k-1}]. \end{aligned} \quad (18)$$

需要说明的是, 算法 $\mathbf{S} = \text{Tria}(\mathbf{A})$ 意为先对矩阵 \mathbf{A} 进行 QR 分解, 得到一个正规正交矩阵 \mathbf{B} 和一个上三角矩阵 \mathbf{C} , 令 $\mathbf{S} = \mathbf{C}^T$, 得到的 \mathbf{S} 即为上三角矩阵.

Step 3 量测更新.

Step 3.1: 计算更新状态容积点 ($i = 1, 2, \dots, 2n$)

$$\mathbf{X}_{i,k|k-1} = \mathbf{S}_{k|k-1} \xi_i + \hat{x}_{k|k-1}. \quad (19)$$

Step 3.2: 计算预测量测容积点 ($i = 1, 2, \dots, 2n$)

$$\mathbf{Z}_{i,k|k-1} = h(\mathbf{X}_{i,k|k-1}, u_k). \quad (20)$$

Step 3.3: 估计预测量测

$$\hat{z}_{k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{Z}_{i,k|k-1}. \quad (21)$$

Step 3.4: 估计新息协方差矩阵

$$\mathbf{S}_{zz,k|k-1} = \text{Tria}([\mathbf{Z}_{k|k-1} \quad \mathbf{S}_{R,k}]), \quad (22)$$

其中 $\mathbf{R}_k = \mathbf{S}_{R,k} \mathbf{S}_{R,k}^T$, 且

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{k|k-1} = & \frac{1}{\sqrt{2n}} [\mathbf{Z}_{1,k|k-1} - \hat{z}_{k|k-1}, \\ & \mathbf{Z}_{2,k|k-1} - \hat{z}_{k|k-1}, \dots, \mathbf{Z}_{2n,k|k-1} - \hat{z}_{k|k-1}]. \end{aligned} \quad (23)$$

Step 3.5: 估计互协方差矩阵

$$\mathbf{P}_{xz,k|k-1} = \mathbf{X}_{k|k-1} \mathbf{Z}_{k|k-1}^T, \quad (24)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k|k-1} = & \\ & \frac{1}{\sqrt{2n}} [X_{1,k|k-1} - \hat{x}_{k|k-1}, \\ & X_{2,k|k-1} - \hat{x}_{k|k-1}, \dots, X_{2n,k|k-1} - \hat{x}_{k|k-1}]. \end{aligned} \quad (25)$$

Step 3.6: 估计 SRCKF 滤波增益

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_k = & \\ & (\mathbf{P}_{xz,k|k-1} / \mathbf{S}_{zz,k|k-1}^T) / \mathbf{S}_{zz,k|k-1}. \end{aligned} \quad (26)$$

Step 3.7: 基于 k 时刻新的量测 z_k , 更新系统状态

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + \mathbf{W}_k (z_k - \hat{z}_{k|k-1}). \quad (27)$$

Step 3.8: 更新误差协方差矩阵的平方根因子

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{k|k} = & \\ & \text{Tria}([\boldsymbol{\chi}_{k|k-1} - \mathbf{W}_k \mathbf{Z}_{k|k-1} \quad \mathbf{W}_k \mathbf{S}_{R,k}]). \end{aligned} \quad (28)$$

2 基于 SRCKF 的自适应高斯和状态滤波

相关研究表明, SRCKF 具有优越的非线性滤波性能^[12,19-21]. 为进一步解决非线性非高斯系统中的状态滤波问题, 本文将系统状态的初始值、状态噪声、观测噪声均表示成高斯和的形式, 用 SRCKF 作为非线性滤波核心的高斯子滤波器, 得到满足高斯和形式的状态预测和更新递推式, 提出一种基于 SRCKF 的分析类全局估计算法 GSSRCKF, 并设计滤波过程中各高斯子项对应的权值自适应策略. 此外, 为了克服由于高斯子项个数随着时间的积累不断增加而带来的计算负担, 在实际执行时, 根据权值大小限制最大高斯子项个数, 以提高算法的实时性.

在自适应高斯和滤波算法中, 状态估计的过程不仅需要求解状态均值及方差, 也需要计算高斯子项对应的权值等参数. 以下分 5 个步骤详述 GSSRCKF 的算法流程.

Step 1 初始化. 设置初始时间点 $k = 0$, 定义初始状态 $p(x_0 | z^{-1}) = p(x_0)$, 并以其作为 $N_{k|k-1}$ 个高斯子项的求和.

采用期望最大化 (EM)^[22] 的方法, 将初始概率密度函数 $p(x_0)$ 、过程噪声概率密度函数 $p(w_k)$ 和量测噪声概率密度函数 $p(v_k)$ 均通过高斯和的形式表示 (或者近似为高斯和的形式) 如下:

$$p(x_0) = \sum_{i=1}^{N_0} \alpha_0^{(i)} N\{x_0; \hat{x}_0^{(i)}, \mathbf{P}_0^{(i)}\}, \quad (29)$$

$$p(w_k) = \sum_{i=1}^{q_k} \beta_k^{(i)} N\{w_k; \hat{w}_k^{(i)}, \mathbf{Q}_k^{(i)}\}, \quad (30)$$

$$p(v_k) = \sum_{i=1}^{r_k} \gamma_k^{(i)} N\{v_k; \hat{v}_k^{(i)}, \mathbf{R}_k^{(i)}\}. \quad (31)$$

其中: $\alpha_0^{(i)}$, $\beta_k^{(i)}$ 和 $\gamma_k^{(i)}$ 为其对应高斯子项的权值, 且有

$$\begin{cases} \alpha_0^{(i)} > 0, \sum_{i=1}^{N_0} \alpha_0^{(i)} = 1; \\ \beta_k^{(i)} > 0, \sum_{i=1}^{q_k} \beta_k^{(i)} = 1; \\ \gamma_k^{(i)} > 0, \sum_{i=1}^{r_k} \gamma_k^{(i)} = 1. \end{cases} \quad (32)$$

Step 2 分布式滤波. 采用以下高斯和形式对滤波概率密度函数进行近似:

$$p(x_k | z^k) \approx \sum_{i=1}^{N_{k|k}} \alpha_{k|k}^{(i)} N\{x_k; \hat{x}_{k|k}^{(i)}, \mathbf{P}_{k|k}^{(i)}\}, \quad (33)$$

其中

$$N_{k|k} = N_{k|k-1} \cdot r_k. \quad (34)$$

另外, 基于 $k - 1$ 时刻的预测状态均值 $\hat{x}_{k|k-1}^{(j)}$ 、预测协方差矩阵 $\mathbf{P}_{k|k-1}^{(j)}$ 、量测噪声均值 $\hat{v}_k^{(l)}$ 及量测方差矩阵 $\mathbf{R}_k^{(l)}$, 采用 SRCKF 算法计算 k 时刻第 i 个高斯子项 $N\{x_k; \hat{x}_{k|k}^{(i)}, \mathbf{P}_{k|k}^{(i)}\}$ 的滤波均值及协方差矩阵, 如式 (27) 和 (28) 所示.

此时, 关于第 i 个高斯子项状态估计的量测似然函数可以表示为

$$\zeta_k^{(i)} = p(z_k | z^{k-1}) \approx N\{z_k; \hat{z}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{z,k|k-1}\}. \quad (35)$$

指标 j 和 l 的计算方式为

$$\begin{cases} j = i - \lfloor \frac{i-1}{N_{k|k-1}} \rfloor N_{k|k-1}, \\ l = 1 + \lfloor \frac{i-1}{N_{k|k-1}} \rfloor. \end{cases} \quad (36)$$

其中: $i = 1, 2, \dots, N_{k|k}$; $j = 1, 2, \dots, N_{k|k-1}$; $l = 1, 2, \dots, r_k$; 符号 $\lfloor x \rfloor$ 表示往下取整运算. k 时刻高斯子项对应的滤波权值 $\alpha_{k|k}^{(i)}$ 需要综合 3 项信息, 即 $k - 1$ 时刻该子项对应的滤波权值 $\alpha_{k|k-1}^{(i)}$ 、该子项中量测噪声 pdf 所占权值 γ_k^l 以及该子项状态估计的似然函数 $\zeta_k^{(i)}$, 故设计 $\alpha_{k|k}^{(i)}$ 的自适应计算方式为

$$\alpha_{k|k}^{(i)} = \frac{\alpha_{k|k-1}^{(i)} \gamma_k^l \zeta_k^{(i)}}{\sum_{j=1}^{N_{k|k-1}} \sum_{l=1}^{r_k} \alpha_{k|k-1}^{(j)} \gamma_k^l \zeta_k^{(N_{k|k-1}(j-1)+l)}}. \quad (37)$$

Step 3 全局点估计. 各高斯子项得到 k 时刻的滤波状态后, 可采用以下方程计算 k 时刻全局滤波均值和协方差矩阵:

$$\hat{x}_{k|k} = E[x_k | z^k] = \sum_{i=1}^{N_{k|k}} \alpha_{k|k}^{(i)} \hat{x}_{k|k}^{(i)}, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k} = \text{COV}[x_k | z^k] = & \\ & \sum_{i=1}^{N_{k|k}} \alpha_{k|k}^{(i)} [\mathbf{P}_{k|k}^{(i)} + (x_{k|k}^{(i)} - \hat{x}_{k|k}^{(i)})(x_{k|k}^{(i)} - \hat{x}_{k|k}^{(i)})^T]. \end{aligned} \quad (39)$$

同样, 其他时间点的状态估计也可由式 (33)~(39) 计算得到.

Step 4 约简控制. 通常, 以高斯和形式分布的过程噪声和量测噪声会随着时间的积累而导致高斯子项个数的不断递增, 如式 (34) 中的 $N_{k|k}$ 及后文给出的 $N_{k+1|k}$. 这势必大幅度增加计算开销, 降低滤波实时性. 因此, 为提高算法的实时性, 同时保证滤波精度, 本文采取限制最大高斯子项个数的方法. 设置滤波过程中高斯子项个数的上限为 G , 在 k 时刻计算出各高斯子项估计均值及协方差之后, 只保留前 G 个权重相对较大的子高斯分布, 并将对应权值重新归一化, 以降低计算复杂度. 需要说明的是, G 值的选取需考虑具体应用问题, 可参考文献 [23] 中的选取方法.

Step 5 预测更新. 预测状态概率密度函数可由下式表示:

$$p(x_{k+1}|z^k) \approx \sum_{i=1}^{N_{k+1|k}} \alpha_{k+1|k}^{(i)} N\{x_{k+1}; \hat{x}_{k+1|k}^{(i)}, \mathbf{P}_{k+1|k}^{(i)}\}, \quad (40)$$

其中

$$\begin{cases} N_{k+1|k} = N_{k|k} \cdot q_k, \\ \alpha_{k+1|k}^{(i)} = \alpha_{k|k}^{(i)} \beta_k^{(i)}. \end{cases} \quad (41)$$

可见, k 时刻高斯子项对应的预测权值 $\alpha_{k+1|k}^{(i)}$ 的计算综合了两项信息, 即 k 时刻该子项对应的滤波权值 $\alpha_{k|k}^{(i)}$ 和该子项中过程噪声 pdf 所占权值 $\beta_k^{(i)}$. 另外, 基于 k 时刻估计状态均值 $\hat{x}_{k|k}^{(j)}$ 、估计方差矩阵 $\mathbf{P}_{k|k}^{(j)}$ 、过程噪声均值 $\hat{w}_k^{(l)}$ 及其方差矩阵 $\mathbf{Q}_k^{(l)}$, 采用 SRCKF 算法计算 k 时刻第 i 个高斯子项 $N\{x_{k+1}; \hat{x}_{k+1|k}^{(i)}, \mathbf{P}_{k+1|k}^{(i)}\}$ 的预测均值及协方差矩阵, 如式 (16) 和 (17) 所示.

此外, 指标 j 和 l 的计算方式为

$$\begin{cases} j = i - \left\lfloor \frac{i-1}{N_{k|k}} \right\rfloor N_{k|k}, \\ l = 1 + \left\lfloor \frac{i-1}{N_{k|k}} \right\rfloor, \end{cases} \quad (42)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, N_{k+1|k}$.

至此, k 时刻状态滤波过程已完成, 设置时间点更新 $k = k + 1$, 跳至 Step 2, 实现逐步状态滤波.

3 仿真及分析

3.1 仿真设置

考虑如下经典非线性非高斯系统(一维状态)^[17,24]:

$$x_{k+1} = \varphi_1 x_k + \sin(\omega \pi k) + w_k. \quad (43)$$

其中: 过程噪声 w_k 服从伽马分布 $\text{Ga}(3, 2)$; φ_1 、 ω 为标量参数, 且 $\forall k, \varphi_1 = 0.5, \omega = 0.04$. 量测方程如下:

$$z_k = \begin{cases} \varphi_2 x_k^2 + v_k, & k \leq 30; \\ \varphi_3 x_k - 2 + v_k, & k > 30. \end{cases} \quad (44)$$

其中: 量测噪声 v_k 服从高斯分布 $N\{v_k; 0, 10^{-5}\}$; φ_2 、

φ_3 为标量参数, 且 $\forall k, \varphi_2 = 0.2, \varphi_3 = 0.5$. 显然, 可以得出式 (34) 中的 $r_k = 1$, 式 (37) 中的 $\gamma_k^l = 1$ ($l = 1, 2, \dots, r_k$). 初始状态由 5 项高斯分布求和得到, 即

$$p(x_0) = \sum_{j=1}^5 \tilde{w}_{-1}^{(j)} \times N\{x_0; \hat{x}_0^{(j)}, \mathbf{P}_0^{(j)}\} = \sum_{j=1}^5 0.2 \times N\{x_0; j-3, 10\}, \quad (45)$$

且初始预测概率密度函数 $p(x_0|z^{-1}) = p(x_0)$.

为更好地仿真实现本文讨论的分析类全局估计算法, 基于 EM 算法, 以 3 项高斯和的形式近似过程噪声的伽马分布(这就意味着式 (41) 中的 $q_k = 3$), 如下式所示:

$$\begin{aligned} \tilde{p}(w_k) &= 0.29 \times N\{w_k; 2.14, 0.72\} + \\ &0.18 \times N\{w_k; 7.45, 8.05\} + \\ &0.53 \times N\{w_k; 4.31, 2.29\}. \end{aligned} \quad (46)$$

可见, 式 (41) 中 $\beta_k^{(1)} = 0.29, \beta_k^{(2)} = 0.18, \beta_k^{(3)} = 0.53$.

由于文献 [24-26] 中的仿真结果显示了 GSUKF 等高斯和类算法在确定性采样型滤波器 (UKF, CKF) 的基础上大幅度提高了估计精度和稳定性, 加之本文的仿真重点在于 GSSRCKF 相对 GSUKF 的优越性, 故在此不再赘述 UKF 和 CKF 的仿真性能, 而是集中讨论 GSSRCKF、文献 [24] 所提的 GSUKF 以及传统 PF 的比较分析. 其中: 设置仿真时间长度 $k = 1, 2, \dots, 60$, GSUKF 中的尺度参数 $\kappa = 3 - n = 2$. 此外, 滤波过程中的高斯和个数上限应该由系统的非线性非高斯程度以及系统精度和实时性要求来确定, 这将是本文工作之后的研究方向, 故在本文的仿真研究中, 设置 GSUKF 和 GSSRCKF 滤波过程中高斯子项个数的上限 $G = 10$. 另一方面, PF 作为高斯和滤波方法的滤波精度标尺, 设置其滤波粒子数为 1000 个.

3.2 算法评价指标

算法的性能主要由以下两个指标进行评判.

1) 算法的估计精度由均方根误差 (RMSE) 曲线的比较进行评价.

$$\text{RMSE}_k = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\hat{x}_k(i) - x_k(i))^2}. \quad (47)$$

其中: $x_k(i)$ 、 $\hat{x}_k(i)$ 分别表示第 i 次 Monte Carlo 仿真时的状态真值与估计值, M 为 Monte Carlo 仿真次数.

2) 算法的可靠性由不可靠指数 (NCI) 曲线的比较进行评价.

$$\text{NCI}_k = \sum_{i=1}^M \{10 \log_{10} [(\hat{x}_k(i) - x_k(i))^2 / \mathbf{P}_{k|k}(i)] - 10 \log_{10} [(\hat{x}_k(i) - x_k(i))^2 / \Sigma_k]\} / M. \quad (48)$$

其中: $\mathbf{P}_{k|k}(i)$ 表示第 i 次 Monte Carlo 仿真时滤波器

的状态估计协方差矩阵, Σ_k 表示状态估计的均方误差^[27-28].

对于上述算法评价指标, 一方面, RMSE 以状态真值与状态估计值之间欧氏距离的形式体现了估计误差的大小, 实际上是一种对状态估计绝对误差的衡量指标; 另一方面, NCI 提供了一种衡量相对误差的方法, 更多的是基于滤波器估计误差的协方差矩阵来实现滤波的稳定性评估. NCI 值越靠近零, 说明滤波器越可靠越稳定.

3.3 仿真结果及分析

设置 Monte Carlo 次数 $M = 100$. 图 1 和图 2 分别给出了各算法的 RMSE 及 NCI 随时间的变化曲线. 表 1 给出了各算法的平均 RMSE、平均 NCI 及单个时间点的平均耗时数据. 需要说明的是, 考虑到时间点 $k > 30$ 之后各算法的性能相近, 这里的平均数据是取前 30 个时间点的数据进行算术平均.

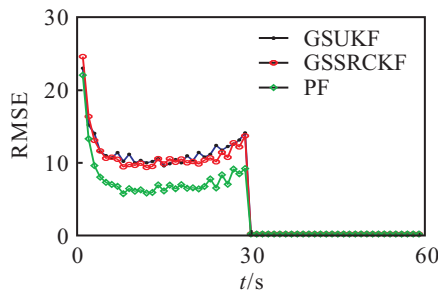


图 1 各算法的 RMSE 随时间变化曲线

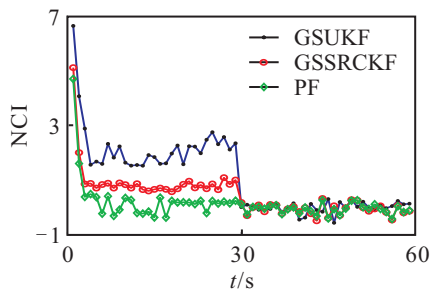


图 2 各算法的 NCI 随时间变化曲线

表 1 各算法性能指标及耗时比较

	GSUKF	GSSRCKF	PF
RMSE	12.23	12.15	7.87
NCI	2.35	0.98	0.15
Time	9.2	7.3	127

从图 1 可以看出: 当 $k \leq 30$ 时, 本文所设计的高斯和滤波算法 GSSRCKF 与传统 GSUKF 的 RSME 结果基本维持同一水平. 然而, 文献 [20] 中所得出的结论是: 在一维非线性系统中, UKF 在求解“非线性函数 \times 高斯概率密度”形式的积分项时相对于 CKF 具有稍高的估计精度. 在此需要解释的是, 由于本文算法 GSSRCKF 采用了高斯子项的自适应权值策略, 相对于传统的 GSUKF 能够更好地对非高斯项进行高斯和

近似, 从而能够更为准确地实现子滤波器的状态估计, 得到尽可能优化的全局估计结果. 此外, 从仿真图和表 1 可以看出, 两种高斯和类滤波器的估计精度仍然与粒子滤波有一定差距. 当 $30 < k \leq 60$ 时, 由于系统量测方程转为线性, 3 种滤波器的 RSME 均靠近零值, 说明各算法在线性系统中的滤波性能相对精确且较为接近.

从图 2 可以看出: 当 $k \leq 30$ 时, GSUKF 的 NCI 值最高, PF 的 NCI 均值仅仅略高于零, 说明 PF 在非线性非高斯系统中的稳定滤波方面具有明显的优势. 特别地, GSSRCKF 的 NCI 均值约为 GSUKF 的一半, 这是因为 GSSRCKF 基于 SRCKF 作为子滤波器, 更是结合了权值自适应及高斯子项简约控制策略, 因此在滤波稳定性方面更胜一筹, 能够有效提高滤波的收敛速度和数值稳定性, 进一步防止滤波器的发散. 当 $30 < k \leq 60$ 时, 3 种滤波器的 NCI 值基本维持在零值附近, 说明各算法在线性系统中均能实现稳定滤波.

此外, 表 1 给出了 3 种算法的平均性能指标和耗时数据. 可见, GSUKF 与 GSSRCKF 的滤波精度和计算复杂度在同一个量级, PF 在非线性非高斯系统的滤波性能最优, 但其计算复杂度过高, 难以实现实时滤波. 另一方面, 因为 UKF 单次滤波需要采样 $2n_x + 1$ 个不敏点, 而 SRCKF 只需采样 $2n_x$ 个容积点, 所以 SRCKF 在单次滤波中的计算代价略低于 UKF. 同理, GSSRCKF 相对于 GSUKF 在计算代价和实时性方面也具有一定优势.

4 结 论

本文针对非线性非高斯动态系统中的状态估计问题, 设计了基于平方根容积卡尔曼滤波的高斯和状态估计算法, 详述了该算法的实施流程, 并采用典型状态估计案例将本文算法与现有经典滤波算法进行了仿真比较. 仿真结果表明, 本文算法在滤波稳定性方面取得了较大改善, 计算损耗和滤波实时性也具有一定优势, 为非线性非高斯系统中的状态估计问题提供了一种新的解决方法. 今后将结合系统要求, 针对滤波精度的提升及高斯子项个数自适应问题做进一步的研究.

参考文献(References)

- [1] Bertsekas D P. Dynamic programming and optimal control[M]. 3rd ed. Nashua: Athena Scientific, 2007: 12-25.
- [2] Sorenson H W. On the development of practical non-linear filters[J]. Information Sciences, 1974, 7(1): 230-270.
- [3] Anderson B D O, Moore S B. Optimal filtering[M]. New Jersey: Dover Publications Inc., 1979: 105-123.
- [4] Norgaard M, Poulsen N K, Ravn O. New developments

- in state estimation for nonlinear systems[J]. *Automatica*, 2000, 36(11): 1627-1638.
- [5] Schei T S. A finite-difference method for linearization in nonlinear estimation algorithms[J]. *Automatica*, 1997, 33(11): 2053-2058.
- [6] Ito K, Xiong K. Gaussian filters for nonlinear filtering problems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000, 45(5): 910-927.
- [7] Dunič J, Šimandl M, Straka O. Performance analysis of derivative-free filters[C]. Proc of the 44th IEEE Conf on Decision and Control, and 2005 European Control Conf. Seville, 2005: 1941-1946.
- [8] Šimandl M, Dunič J. Derivative-free estimation methods: New results and performance analysis[J]. *Automatica*, 2009, 45(7): 1749-1757.
- [9] Julier S J, Uhlmann J K. A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000, 45(3): 477-482.
- [10] Julier S J, Uhlmann J K. Unscented filtering and nonlinear estimation[J]. *IEEE Review*, 2004, 92(3): 401-421.
- [11] Dunič J, Šimandl M, Straka O. Adaptive choice of scaling parameter in derivative-free local filters[C]. Proc of 2010 Int Conf on Information Fusion. Edinburgh, 2010: 31-36.
- [12] Arasaratnam I, Haykin S. Cubature Kalman filters[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2009, 54(6): 1254-1269.
- [13] Sorenson H W, Alspach D L. Recursive bayesian estimation using Gaussian sums[J]. *Automatica*, 1971, 7(4): 465-479.
- [14] Šimandl M, Kralovec J. Filtering, prediction and smoothing with Gaussian sum representation[C]. Proc of Symposium on System Identification. Santa Barbara: Elsevier Science, 2000: 523-533.
- [15] Bucy R S, Senne K D. Digital synthesis of nonlinear filters[J]. *Automatica*, 1971, 7(3): 287-298.
- [16] Šimandl M, Kralovec J, Soderstrom T. Anticipative grid design in point-mass approach to nonlinear state estimation[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(4): 699-702.
- [17] Vander Merwe R, Wan E A. Gaussian mixture sigma-point particle filters for sequential probabilistic inference in dynamic state-space models[C]. Proc of the Int Conf on Acoustics, Speech and Signal Proc (ICASSP), 2003: 701-704.
- [18] Šimandl M, Straka O. Nonlinear filtering methods: Some aspects and performance evaluation[C]. Proc of 2003 Int Conf on Modelling, Identification and Control. Innsbruck, 2003: 67-72.
- [19] 何志昆, 刘光斌, 赵曦晶, 等. 基于 GPR 模型的自适应平方根容积卡尔曼滤波算法[J]. *航空学报*, 2013, 34(9): 2202-2211.
(He Z K, Liu G B, Zhao X J, et al. Adaptive square-root cubature Kalman filter algorithm based on Gaussian process regression models[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2013, 34(9): 2202-2211.)
- [20] 孙枫, 唐李军. Cubature 卡尔曼滤波与 Unscented 卡尔曼滤波估计精度比较[J]. *控制与决策*, 2013, 28(2): 303-308.
(Sun F, Tang L J. Estimation precision comparison of Cubature Kalman filter and Unscented Kalman filter[J]. *Control and Decision*, 2013, 28(2): 303-308.)
- [21] Huimin Chen. Adaptive Cubature Kalman filter for nonlinear state and parameter estimation[C]. Proc of 2012 Int Conf on Information Fusion. Singapore, 2012: 1413-1420.
- [22] Candy J V. Bayesian signal processing: Classical, modern and particle filtering methods[M]. Hoboken: Wiley, 2008: 168-178.
- [23] Kotecha J H, Djuric P M. Gaussian sum particle filtering[J]. *IEEE Trans On Signal Processing*, 2003, 51(10): 2602-2612.
- [24] Faubel F, Klakow D. The split and merge unscented Gaussian mixture filter[J]. *IEEE Signal Process Letter*, 2009, 16(9): 786-789.
- [25] Straka O, Dunič J, Šimandl M. Gaussian sum unscented Kalman filter with adaptive scaling parameters[C]. Proc of Int Conf on Information Fusion. Chicago, 2011: 1-8.
- [26] Leong P, Arulampalam S, Lamahewa T, et al. A gaussian-sum based cubature Kalman filter for bearings-only tracking[J]. *IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems*, 2013, 49(2): 1161-1176.
- [27] Li X R, Zhao Z. Measuring estimators credibility: Non-credibility Index[C]. Proc of 2006 Int Conf on Information Fusion. Florence, 2006: 1-8.
- [28] Li X R. Measure of nonlinearity for stochastic systems[C]. Proc of 2012 Int Conf on Information Fusion. Singapore, 2012: 1073-1080.

(责任编辑: 齐 霖)