文章编号: 1001-0920 (2014) 10-1839-06　　DOI: 10.13195/j.kzyjc.2013.0783

基于不完全转移率的连续Markov跳变奇异系统的 H_∞ 控制

常　华[1,2], 楼顺天[1], 方洋旺[3]

(1. 西安电子科技大学 电子工程学院，西安 710071；2. 中航工业西安飞行自动控制研究所, 西安 710065；3. 空军工程大学 航空航天工程学院，西安 710038)

摘　要: 研究一类不完全转移率信息的Markov跳变奇异系统的 H_∞ 控制问题, 提出连续Markov跳变奇异系统的新型有界实引理, 并将其推广到不完全转移率条件. 进一步设计 H_∞ 状态反馈控制器, 使得闭环系统在转移率部分未知的条件下随机可容许, 且满足 H_∞ 性能 γ. 所得结论涵盖了奇异矩阵模态依赖情形, 且表示为严格线性矩阵不等式形式, 利于工程实现. 最后, 通过仿真算例表明了所提出方法的有效性和优越性.

关键词: Markov跳变奇异系统；有界实引理；H_∞ 控制；不完全转移率；严格线性矩阵不等式

中图分类号: TP13　　**文献标志码:** A

H_∞ control of continuous-time Markov jump singular systems subject to incomplete transition rates

CHANG Hua[1,2], *LOU Shun-tian*[1], *FANG Yang-wang*[3]

(1. School of Electronic Engineering，Xidian University，Xi'an 710071，China；2. AVIC Xi'an Flight Automatic Control Research Institute，Xi'an 710065，China；3. College of Aeronautics and Astronautics Engineering，Air Force Engineering University，Xi'an 710038，China．Correspondent：CHANG Hua，E-mail：huachang0218@163.com)

Abstract: The H_∞ control problem of Markov jump singular systems with incomplete transition rates is discussed. A new bounded real lemma for continuous time Markov jump singular systems is derived and then expanded to systems with partial transition rates. Moreover, an H_∞ controller is designed to make sure that the closed-loop systems are admissible and satisfy H_∞ criteria. The given method also covers the systems with the mode-dependent singular matrix and the controller is designed in terms of a set of strict linear matrix inequalities. Finally, a simulation example is given to illustrate the effectiveness and advantages of the proposed method.

Key words: Markov jump singular system；bounded real lemma；H_∞ control；incomplete transition rates；strict linear matrix inequality

0 引　言

近年来, Markov跳变奇异(MJS)系统成为控制领域的研究热点[1-3], 该类系统将结构跳变子系统描述为奇异系统[4]的一类Markov跳变系统[5]. 在工程实际中, 如网络控制系统、飞行控制系统、航空航天系统、经济动态分析系统等[6-7], 均可用Markov跳变奇异系统描述其动态特性, 因此该类系统具有广泛的理论基础和研究价值.

现有文献针对Markov跳变奇异系统的研究结论大多建立在转移率信息完全已知的基础上[8-11], 文献[8-9]分别研究了连续和离散MJS系统的稳定性和镇定, 文献[10]研究了时滞MJS系统的鲁棒可容许性, 文献[11]研究了连续MJS系统 H_∞ 控制问题. 近几年, 有学者开始关注转移率部分未知的情况[12-14], 文献[12]研究了部分转移概率条件下Markov跳变系统的 H_∞ 控制问题, 文献[13-14]研究了部分转移率条件下连续MJS系统的稳定性和镇定. 然而, 由于奇异系统的脉冲特性, 文献[12]的方法不能直接推广到MJS系统中, 文献[13-14]结论中的奇异矩阵唯一, 不能应用于奇异矩阵模态依赖的情形. 现有文献较少见到转移率部分未知条件下, 奇异矩阵模态依赖MJS系统的 H_∞ 控制问题, 故本文针对此类问题进行研究.

本文首先提出连续Markov跳变奇异系统的新型有界实引理, 并将其推广到不完全转移率条件; 然后

收稿日期: 2013-06-13；**修回日期:** 2013-11-12.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61074102, 61201299).

作者简介: 常华(1983−), 男, 博士, 从事飞行器控制理论的研究；楼顺天(1962−), 男, 教授, 博士生导师, 从事盲信号处理、模式识别等研究.

设计H_∞状态反馈控制器, 使得闭环系统在转移率部分未知的条件下随机可容许, 且满足H_∞性能γ; 最后, 通过仿真算例表明了所提出方法的有效性和优越性.

1 问题描述及预备知识

给定概率空间(Ω, F, P), 考虑连续Markov跳变奇异系统

$$E(r_t)\dot{x}(t) = A(r_t)x(t) + B_1(r_t)u(t) + D_1(r_t)w(t),$$
$$z(t) = C(r_t)x(t) + B_2(r_t)u(t) + D_2(r_t)w(t). \tag{1}$$

其中: $x(t) \in \boldsymbol{R}^n$、$u(t) \in \boldsymbol{R}^m$、$z(t) \in \boldsymbol{R}^q$分别为系统状态、控制输入和控制输出; $w(t) \in \boldsymbol{R}^p$为干扰输入, 取值于$L_2[0, \infty)$空间; r_t为取值在有限空间$S = \{1, 2, \cdots, N\}$中的连续时间Markov过程; $E(r_t) \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$, 满足$\mathrm{rank}(E(r_t)) = r \leqslant n$; $A(r_t)$、$B_1(r_t)$、$D_1(r_t)$、$C(r_t)$、$B_2(r_t)$、$D_2(r_t)$为已知的系统矩阵. 为表述方便, 当$r_t = i \in S$时, $E(r_t)$简记为E_i, 以此类推, 有A_i、B_{1i}、D_{1i}、C_i、B_{2i}、D_{2i}等.

Markov过程r_t中, 从模态i到模态j的转移概率表示为

$$\Pr(r_{t+h} = j | r_t = i) = \begin{cases} \lambda_{ij}h + o(h), \ j \neq i; \\ 1 + \lambda_{ii}h + o(h), \ j = i. \end{cases}$$

其中: $h > 0$且$\lim\limits_{h\to 0}(o(h)/h) = 0$; λ_{ij}为从模态i到模态j的转移率, 满足$\lambda_{ij} \geqslant 0\,(\forall\, i, j \in S), j \neq i)$且$\lambda_{ii} = -\sum\limits_{j\in S, j\neq i} \lambda_{ij}\ (\forall i \in S)$; 转移率矩阵定义为

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1N} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{N1} & \lambda_{N2} & \cdots & \lambda_{NN} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

本文研究不完全转移率情况, 即转移率矩阵(2)中部分元素未知. 为描述此类情形, 给出如下定义:

$$S = S_K^i \bigcup S_{UK}^i, \ \forall\, i \in S. \tag{3}$$

其中: $S_K^i = \{j : \lambda_{ij}\ 已知\}$, $S_{UK}^i = \{j : \lambda_{ij}\ 未知\}$. 进而给出如下定义:

$$S_K^i = (K_1^i, K_2^i, \cdots, K_m^i), \ \forall\, 1 \leqslant m \leqslant N; \tag{4}$$

$$S_{UK}^i = (UK_1^i, UK_2^i, \cdots, UK_k^i), \ \forall\, 1 \leqslant k \leqslant N. \tag{5}$$

其中: $K_m^i \in N^+$表示转移率矩阵(2)中第i行m列元素已知, 值为m; $UK_k^i \in N^+$表示转移率矩阵(2)中第i行k列元素未知, 值为k.

当$u(t) = 0, w(t) = 0$时, 给出如下定义.

定义 1[7] 1) 系统(1)是正则的, 若$\forall i \in S$, 存在s, 满足$\det(sE_i - A_i) \neq 0$;

2) 系统(1)是无脉冲的, 若$\forall\, i \in S$, 满足

$$\deg(\det(sE_i - A_i)) = \mathrm{rank}(E_i);$$

3) 系统(1)是随机稳定的, 若对于任意初始状态$x_0 \in \boldsymbol{R}^n$和$r_0 \in S$, 存在标量$M(x_0, r_0) > 0$满足

$$\mathrm{E}\Big\{\int_0^\infty \|x(t)\|^2 \mathrm{d}t | (x_0, r_0)\Big\} \leqslant M(x_0, r_0);$$

4) 系统(1)是随机可容许的, 若其正则、无脉冲且随机稳定.

定义 2[11] 给定扰动抑制度$\gamma > 0$, 称自治系统(1)$(u(t) = 0)$随机可容许, 且满足H_∞性能γ, 当$w(t) = 0$时, 系统(1)随机可容许, 对于任意$w(t) \in L_2[0, \infty)$, 系统(1)在零初始条件下满足如下H_∞性能指标:

$$\|z\|_{E_2} < \gamma \|w\|_2. \tag{6}$$

其中

$$\|z\|_{E_2} \triangleq \Big(\mathrm{E}\Big\{\int_0^\infty z^T(t)z(t)\mathrm{d}t\Big\}\Big)^{1/2},$$
$$\|w\|_2 \triangleq \Big(\int_0^\infty w^T(t)w(t)\mathrm{d}t\Big)^{1/2}.$$

给出模态依赖状态反馈控制器

$$u(t) = K_i x(t). \tag{7}$$

将控制器(7)代入系统(1), 得到如下闭环系统:

$$E_i\dot{x}(t) = \hat{A}_i x(t) + D_{1i}w(t),$$
$$z(t) = \hat{C}_i x(t) + D_{2i}w(t). \tag{8}$$

其中: $\hat{A}_i = A_i + B_{1i}K_i, \hat{C}_i = C_i + B_{2i}K_i$.

引理 1[10] 当$u(t) = 0$, $w(t) = 0$时, 系统(1)随机可容许, 若$\forall i \in S$, 则存在矩阵P_i使得下式成立:

$$A_i^{\mathrm{T}}P_i + A_i P_i^{\mathrm{T}} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}E_j^{\mathrm{T}}P_j < 0, \tag{9}$$

$$E_i^{\mathrm{T}}P_i = P_i^{\mathrm{T}}E_i \geqslant 0. \tag{10}$$

引理 2[11] 若对称矩阵P满足$E_L^{\mathrm{T}}PE_L > 0$, $\varPhi$为适当维数的非奇异矩阵, 则矩阵$PE + R\varPhi S^{\mathrm{T}}$是非奇异矩阵, 其逆矩阵可以表示为$(PE + R\varPhi S^{\mathrm{T}})^{-1} = \bar{P}E^{\mathrm{T}} + S\bar{\varPhi}R^{\mathrm{T}}$. 对称矩阵$\bar{P}$和$\bar{\varPhi}$分别满足

$$E_R^{\mathrm{T}}\bar{P}E_R = (E_L^{\mathrm{T}}PE_L)^{-1}, \ \bar{\varPhi} = (RR^{\mathrm{T}})^{-1}\varPhi(SS^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

其中: E_L、E_R满足列满秩, 且$E = E_L E_R^{\mathrm{T}}$; R和S满足行满秩, 且$E^{\mathrm{T}}R = 0, ES = 0$.

系统(1)中E_i模态依赖, 故$\forall i \in S$, 有

$$E_i = E_{Li}E_{Ri}^{\mathrm{T}}, \ E_i^{\mathrm{T}}R_i = 0, \ E_i S_i = 0.$$

本文的目的是研究自治系统(1)$(u(t) = 0)$的H_∞性能, 得出在转移率部分未知的条件下, 自治系统(1)随机可容许, 且满足H_∞性能指标的充分条件, 进而设计模态依赖H_∞状态反馈控制器, 使得闭环系统随机可容许且满足H_∞性能指标.

2 H_∞性能分析

定理 1 令$u(t) = 0$, 给定$\gamma > 0$, 系统(1)随机可容许且满足H_∞性能γ, 若$\forall\, i \in S$, 则存在矩阵$P_i > 0$和非奇异矩阵$\varPhi_i$, 使得下列不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Psi_i & (P_iE_i+R_i\Phi_iS_i^{\rm T})^{\rm T}D_{1i} & C_i^{\rm T} \\ * & -\gamma^2 I & D_{2i}^{\rm T} \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \tag{11}$$

其中

$$\Psi_i=(A_i^{\rm T}(P_iE_i+R_i\Phi_iS_i^{\rm T}))^\dagger+\sum_{j=1}^N\lambda_{ij}E_j^{\rm T}P_jE_j,$$

$$(A_i^{\rm T}(P_iE_i+R_i\Phi_iS_i^{\rm T}))^\dagger=$$
$$A_i^{\rm T}(P_iE_i+R_i\Phi_iS_i^{\rm T})+(P_iE_i+R_i\Phi_iS_i^{\rm T})^{\rm T}A_i,$$

后文中符号“†”的用法与此处相同.

证明　存在矩阵 P_i 和 Φ_i, 使得式 (11) 成立. 由式 (11) 可知 $\Psi_i<0$, 令 $\tilde P_i=P_iE_i+R_i\Phi_iS_i^{\rm T}$, 代入式 (9), 可得式 (9) 成立, 同时 $\tilde P_i$ 满足式 (10). 由引理 1 可知, 系统 (1) 随机可容许.

下面分析系统的 H_∞ 性能. 定义随机 Lyapunov 函数 $V(x(t),i)=x^{\rm T}(t)E_i^{\rm T}P_iE_ix(t)$, ∇ 表示随机过程 $\{r_t,x(t)\}$ $(t\geqslant 0)$ 的弱无穷小算子, 当 $w(t)=0$ 时, 有

$$\begin{aligned}&\nabla V(x(t),i)=\\&\dot x^{\rm T}(t)E_i^{\rm T}P_iE_ix(t)+x^{\rm T}(t)E_i^{\rm T}P_iE_i\dot x(t)+\\&x^{\rm T}(t)\Big(\sum_{j=1}^N\lambda_{ij}E_j^{\rm T}P_jE_j\Big)x(t)=\\&\dot x^{\rm T}(t)E_i^{\rm T}(P_iE_i+R_i\Phi_iS_i^{\rm T})x(t)+\\&x^{\rm T}(t)(P_iE_i+R_i\Phi_iS_i^{\rm T})^{\rm T}E_i\dot x(t)+\\&x^{\rm T}(t)\Big(\sum_{j=1}^N\lambda_{ij}E_j^{\rm T}P_jE_j\Big)x(t)=x^{\rm T}(t)\Psi_ix(t).\end{aligned}$$

当 $w(t)\neq 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}&\nabla V(x(t),i)=\\&x^{\rm T}(t)\Psi_ix(t)+w^{\rm T}(t)D_{1i}^{\rm T}(P_iE_i+R_i\Phi_iS_i^{\rm T})x(t)+\\&x^{\rm T}(t)(P_iE_i+R_i\Phi_iS_i^{\rm T})^{\rm T}D_{1i}w(t)=\\&[x^{\rm T}(t)\ \ w^{\rm T}(t)]\begin{bmatrix}\Psi_i & (P_iE_i+R_i\Phi_iS_i^{\rm T})^{\rm T}D_{1i}\\ * & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ w(t)\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

定义 H_∞ 性能指标

$$J_T\triangleq{\rm E}\Big\{\int_0^T z^{\rm T}(s)z(s){\rm d}s\Big\}-\gamma^2\int_0^T w^{\rm T}(s)w(s){\rm d}s.$$

利用 Dynkin 公式和零初始值条件, 可得到

$$\begin{aligned}&J_T=\\&{\rm E}\Big\{\int_0^T[z^{\rm T}(s)z(s)+\gamma^2w^{\rm T}(s)w(s)+\\&\nabla V(x(s),r_s)]{\rm d}s\Big\}{\rm E}[\nabla V(x(t),i)]\leqslant\\&{\rm E}\Big\{\int_0^T[z^{\rm T}(s)z(s)+\gamma^2w^{\rm T}(s)w(s)+\nabla V(x(s),r_s)]{\rm d}s\Big\}.\end{aligned}$$

同时, 有以下变换:

$$\begin{aligned}&z^{\rm T}(s)z(s)=\\&[x^{\rm T}(s)\ \ w^{\rm T}(s)]\begin{bmatrix}C_i^{\rm T}\\ D_{2i}^{\rm T}\end{bmatrix}[C_i\ \ D_{2i}]\begin{bmatrix}x(s)\\ w(s)\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

将上式和 $\nabla V(x(s),r_s)$ 代入 J_T, 由 Schur 补可得

$$J_T\leqslant{\rm E}\Big\{\int_0^T\xi^{\rm T}(s)\tilde\Psi_i\xi(s){\rm d}s\Big\},$$

其中 $\tilde\Psi_i$ 同式 (11) 左边, 且 $\xi(s)=[x^{\rm T}(s)\ \ w^{\rm T}(s)]^{\rm T}$. 由式 (11) 可知, $J_T<0$, 令 T 趋于无穷大, 得到 $\|z\|_{E_2}<\gamma\|w\|_2$. □

注 1　现有文献在研究 Markov 跳变奇异系统时, 大多选取唯一的奇异矩阵, 该奇异矩阵与模态无关[1,13-14]. 然而, 在实际工程应用中, 奇异矩阵模态依赖最广泛的情况是定理 1 提出的结论, 建立在奇异矩阵模态依赖的基础上, 较奇异矩阵模态独立的情形具有更广泛的理论意义.

下面讨论转移率矩阵 (2) 中部分元素未知的情况. 为描述方便, 首先定义 $\lambda_K^i=\sum_{j\in S_K^i}\lambda_{ij},\forall\, i\in S$.

定理 2　令 $u(t)=0$, 给定 $\gamma>0$, 在转移率矩阵满足部分未知条件式 (3) ∼ (5) 时, 系统 (1) 随机可容许且满足 H_∞ 性能 γ. 若 $\forall i\in S$, 存在矩阵 $P_i>0$ 和非奇异矩阵 Φ_i, 使得下列不等式成立:

$$\begin{bmatrix}\Psi_{1i} & (1+\lambda_K^i)(P_iE_i+R_i\Phi_iS_i^{\rm T})^{\rm T}D_{1i} & (1+\lambda_K^i)C_i^{\rm T}\\ * & -\gamma^2(1+\lambda_K^i)I & (1+\lambda_K^i)D_{2i}^{\rm T}\\ * & * & -(1+\lambda_K^i)I\end{bmatrix}<0, \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix}\Psi_{2i} & (P_iE_i+R_i\Phi_iS_i^{\rm T})^{\rm T}D_{1i} & C_i^{\rm T}\\ * & -\gamma^2I & D_{2i}^{\rm T}\\ * & * & -I\end{bmatrix}<0, \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix}\Psi_{3i} & (P_iE_i+R_i\Phi_iS_i^{\rm T})^{\rm T}D_{1i} & C_i^{\rm T}\\ * & -\gamma^2I & D_{2i}^{\rm T}\\ * & * & -I\end{bmatrix}>0. \tag{14}$$

其中

$$\begin{aligned}\Psi_{1i}=&(1+\lambda_K^i)(A_i^{\rm T}(P_iE_i+R_i\Phi_iS_i^{\rm T}))^\dagger+\\&\sum_{j\in S_K^i}\lambda_{ij}E_j^{\rm T}P_jE_j;\end{aligned}$$

$$\Psi_{2i}=(A_i^{\rm T}(P_iE_i+R_i\Phi_iS_i^{\rm T}))^\dagger+E_j^{\rm T}P_jE_j,$$
$$j\in S_{UK}^i,\ j\neq i;$$

$$\Psi_{3i}=(A_i^{\rm T}(P_iE_i+R_i\Phi_iS_i^{\rm T}))^\dagger+E_j^{\rm T}P_jE_j,$$
$$j\in S_{UK}^i,\ j=i.$$

证明　令 $\hat P_i=P_iE_i+R_i\Phi_iS_i^{\rm T}$, 式 (11) 左边可变换为

$$\tilde\Psi_i=$$
$$\begin{bmatrix}(A_i^{\rm T}\hat P_i)^\dagger+\sum_{j=1}^N\lambda_{ij}E_j^{\rm T}P_jE_j & \hat P_i^{\rm T}D_{1i} & C_i^{\rm T}\\ * & -\gamma^2I & D_{2i}^{\rm T}\\ * & * & -I\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} (1+\lambda_K^i)(A_i^{\mathrm T}\hat P_i)^\dagger + \Big(\sum\limits_{j\in S_K^i}\lambda_{ij}+\sum\limits_{j\in S_{UK}^i}\lambda_{ij}\Big)E_j^{\mathrm T}P_jE_j & (1+\lambda_K^i)\hat P_i^{\mathrm T}D_{1i} & (1+\lambda_K^i)C_i^{\mathrm T} \\ * & -\gamma^2(1+\lambda_K^i)I & (1+\lambda_K^i)D_{2i}^{\mathrm T} \\ * & * & -(1+\lambda_K^i)I \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (1+\lambda_K^i)(A_i^{\mathrm T}\hat P_i)^\dagger + \sum\limits_{j\in S_K^i}\lambda_{ij}E_j^{\mathrm T}P_jE_j & (1+\lambda_K^i)\hat P_i^{\mathrm T}D_{1i} & (1+\lambda_K^i)C_i^{\mathrm T} \\ * & -\gamma^2(1+\lambda_K^i)I & (1+\lambda_K^i)D_{2i}^{\mathrm T} \\ * & * & -(1+\lambda_K^i)I \end{bmatrix} +$$

$$\sum_{j\in S_{UK}^i}\lambda_{ij}\begin{bmatrix} (A_i^{\mathrm T}\hat P_i)^\dagger + E_j^{\mathrm T}P_jE_j & \hat P_i^{\mathrm T}D_{1i} & C_i^{\mathrm T} \\ * & -\gamma^2 I & D_{2i}^{\mathrm T} \\ * & * & -I \end{bmatrix}.$$

若 $j\in S_{UK}^i$, $i\in S_K^i$, 则由式(12)、(13)和 $\lambda_{ij}>0$ ($\forall\, i,j\in S, j\neq i$) 可得 $\tilde\Psi_i<0$. 若 $j\in S_{UK}^i$, $i\in S_{UK}^i$, 则由式(12)～(14)和 $\lambda_{ii}<0$ 可得 $\tilde\Psi_i<0$.

综上所述, 若式(12)～(14)成立, 则式(11)成立, 由定理1可得, 系统(1)随机可容许且满足 H_∞ 性能 γ. □

注2 定理2所讨论的情形涵盖了转移率完全未知和完全已知两种特殊情况, 具有一般性. 文献[11]的结论只能处理转移率完全已知的条件, 当转移率部分未知时, 文献[11]的结论不再适用, 只有定理2才能描述此类问题, 因此定理2比文献[11]具有更广泛的适用范围.

3 H_∞ 控制器设计

由于定理2中的不等式含有非线性项, 不能直接用来求解状态反馈控制器, 本文用以下定理3求解系统(1)的 H_∞ 控制问题.

定理3 给定 $\gamma>0$, 在转移率矩阵满足部分未知条件式(3)～(5)时, 闭环系统(8)随机可容许且满足 H_∞ 性能 γ. 若 $\forall i\in S$, 存在矩阵 $\bar P_i\in \boldsymbol{R}^{n\times n}>0$ 和非奇异矩阵 $\bar\Phi_i\in\boldsymbol{R}^{(n-r)\times(n-r)}$, 矩阵 $H_i\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$, 使得下列不等式成立:

$$\begin{bmatrix} (1+\lambda_K^i)(A_iY_i+B_{1i}H_i)^\dagger & Y_i^{\mathrm T}F_i^{\mathrm T}(E_R) & (1+\lambda_K^i)D_{1i} & (1+\lambda_K^i)(Y_i^{\mathrm T}C_i^{\mathrm T}+H_i^{\mathrm T}B_{2i}^{\mathrm T}) \\ * & -\chi_i(\bar P) & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma^2(1+\lambda_K^i)I & (1+\lambda_K^i)D_{2i}^{\mathrm T} \\ * & * & * & -(1+\lambda_K^i)I \end{bmatrix}<0,$$

$\forall\, i\notin S_K^i$; (15)

$$\begin{bmatrix} (1+\lambda_K^i)(A_iY_i+B_{1i}H_i)^\dagger + \lambda_{ii}((Y_i^{\mathrm T}E_i^{\mathrm T})^\dagger - E_i\bar P_iE_i^{\mathrm T}) & Y_i^{\mathrm T}F_i^{\mathrm T}(E_R) & (1+\lambda_K^i)D_{1i} & (1+\lambda_K^i)(Y_i^{\mathrm T}C_i^{\mathrm T}+H_i^{\mathrm T}B_{2i}^{\mathrm T}) \\ * & -\chi_i(\bar P) & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma^2(1+\lambda_K^i)I & (1+\lambda_K^i)D_{2i}^{\mathrm T} \\ * & * & * & -(1+\lambda_K^i)I \end{bmatrix}<0,$$

$\forall\, i\in S_K^i$; (16)

$$\begin{bmatrix} (A_iY_i+B_{1i}H_i)^\dagger & Y_i^{\mathrm T}E_{Rj} & D_{1i} & Y_i^{\mathrm T}C_i^{\mathrm T}+H_i^{\mathrm T}B_{2i}^{\mathrm T} \\ * & -E_{Rj}^{\mathrm T}\bar P_jE_{Rj} & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & D_{2i}^{\mathrm T} \\ * & * & * & -I \end{bmatrix}<0,\ \forall\, j\in S_{UK}^i,\ j\neq i; \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} (A_iY_i+B_{1i}H_i)^\dagger & Y_i^{\mathrm T}E_{Rj} & D_{1i} & Y_i^{\mathrm T}C_i^{\mathrm T}+H_i^{\mathrm T}B_{2i}^{\mathrm T} \\ * & -E_{Rj}^{\mathrm T}\bar P_jE_{Rj} & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & D_{2i}^{\mathrm T} \\ * & * & * & -I \end{bmatrix}>0,\ \forall\, j\in S_{UK}^i,\ j=i. \quad (18)$$

其中

$Y_i=\bar P_iE_i^{\mathrm T}+S_i\bar\Phi_iR_i^{\mathrm T}$;

$F_i(E_R)=$
$[\sqrt{\lambda_{iK_1^i}}E_{RK_1^i}\ \ \sqrt{\lambda_{iK_2^i}}E_{RK_2^i}\ \ \cdots\ \ \sqrt{\lambda_{iK_m^i}}E_{RK_m^i}]^{\mathrm T}$,
$K_m^i\neq i$;

$\chi_i(\bar P)=\mathrm{diag}\{E_{RK_1^i}^{\mathrm T}\bar P_{K_1^i}E_{RK_1^i}\ \ E_{RK_2^i}^{\mathrm T}\bar P_{K_2^i}E_{RK_2^i}\ \cdots\ E_{RK_m^i}^{\mathrm T}\bar P_{K_m^i}E_{RK_m^i}\}$, $K_m^i\neq i$.

则状态反馈控制器为 $K_i=H_iY_i^{-1}$.

证明 考虑系统(1)的奇异矩阵模态依赖, $\forall\, i\in S$, 存在 E_{Li}、E_{Ri}、R_i、S_i, 满足 $E_i=E_{Li}E_{Ri}^{\mathrm T}$, $E_i^{\mathrm T}R_i=0$, $E_iS_i=0$.

从定理2出发, 若存在矩阵$P_i>0$, 非奇异矩阵$\varPhi_i$使得式(12)～(14)成立, 则由引理2可得, 存在矩阵$\bar{P}_i>0$和非奇异矩阵$\bar{\varPhi}_i$满足

$$(P_iE_i+R_i\varPhi_iS_i^{\rm T})^{-1}=\bar{P}_iE_i^{\rm T}+S_i\bar{\varPhi}_iR_i^{\rm T},$$
$$(E_{Li}^{\rm T}P_iE_{Li})^{-1}=E_{Ri}^{\rm T}\bar{P}_iE_{Ri}.$$

令$Y_i=\bar{P}_iE_i^{\rm T}+S_i\bar{\varPhi}_iR_i^{\rm T}, H_i=K_iY_i$, 将定理2中的$A_i$、$C_i$分别替换为$\hat{A}_i=A_i+B_{1i}K_i, \hat{C}_i=C_i+B_{2i}K_i$. 对式(12)两边分别左乘和右乘$\begin{bmatrix} Y_i^{\rm T} & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix}$及其转置, 利用引理2和Schur补可得, 当$\forall i\notin S_K^i$时, 式(15)成立. 同时, 由

$$E_{Ri}E_{Ri}^{\rm T}\bar{P}_iE_{Ri}E_{Ri}^{\rm T}Y_i\geqslant(Y_i^{\rm T}E_i^{\rm T})^{\dagger}-E_i\bar{P}_iE_i^{\rm T},$$
$$\lambda_{ii}<0$$

可得, 当$\forall\, i\in S_K^i$时, 式(16)成立. 类似可以证明, 式(13)和(14)成立, 则式(17)和(18)分别成立.

综上所述, 若式(15)～(18)成立, 则闭环系统(8)在转移率部分未知的条件下随机可容许且满足H_∞性能γ. 最后, 由$H_i=K_iY_i$可得到控制器增益矩阵为$K_i=H_iY_i^{-1}$. □

注3　定理3提出的H_∞控制器设计方法, 涵盖了转移率部分未知和奇异矩阵模态依赖等多种情况, 可以用来解决多种复杂情形下的Markov跳变奇异系统的H_∞控制问题, 且结论用严格线性矩阵不等式形式表示, 易于工程实现. 当转移率完全已知时, 定理3的形式完全简化为文献[11]中定理2的形式, 因此定理3是文献[11]中结论的推广. 文献[2,7]的结论均含有等式约束条件, 不利于工程实现; 文献[9,13-14]的结论局限于奇异矩阵模态独立, 且以上文献均未涉及不完全转移率情形和H_∞控制问题.

4　数值算例

考虑一个3维4模态的数值算例系统, 参数如下:

$$E_1=\begin{bmatrix}0.5&0.25&0\\0&0.5&0\\0&0&0\end{bmatrix}, A_1=\begin{bmatrix}-0.25&-0.15&0\\0.3&-0.35&-0.2\\-0.1&0&-0.55\end{bmatrix},$$

$$B_{11}=\begin{bmatrix}0&-0.05\\0.1&0\\0&0.05\end{bmatrix}, D_{11}=\begin{bmatrix}0.5&0\\0&-0.5\\0&0\end{bmatrix},$$

$$C_1=\begin{bmatrix}0.5&0&-0.5\\0&0.5&0\end{bmatrix}, B_{21}=\begin{bmatrix}0.25&0.5\\0&0\end{bmatrix},$$

$$D_{21}=\begin{bmatrix}0.1&-0.15\\0&0.25\end{bmatrix}, E_2=\begin{bmatrix}0.75&0&0\\0&0.25&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$A_2=\begin{bmatrix}-0.25&-0.15&0\\0.3&-0.35&-0.2\\-0.1&0&0.55\end{bmatrix}, B_{12}=\begin{bmatrix}0&0.05\\-0.1&0\\0&0.05\end{bmatrix},$$

$$D_{12}=\begin{bmatrix}0.5&0\\0&-1\\0&0\end{bmatrix}, C_2=\begin{bmatrix}0.5&0&-0.5\\0&0.75&0\end{bmatrix},$$

$$B_{22}=\begin{bmatrix}0.25&-0.5\\0&0\end{bmatrix}, D_{22}=\begin{bmatrix}0.1&-0.15\\0&0.25\end{bmatrix},$$

$$E_3=\begin{bmatrix}0.5&0&0\\0.3&0.15&0\\0&0&0\end{bmatrix}, A_3=\begin{bmatrix}-0.6&-0.4&-0.25\\-0.4&-0.75&-0.1\\0.3&0.3&-0.6\end{bmatrix},$$

$$B_{13}=\begin{bmatrix}0.1&0.15\\-0.15&0\\-0.05&0\end{bmatrix}, D_{13}=\begin{bmatrix}-0.75&0.3\\0&-0.55\\0.1&0\end{bmatrix},$$

$$C_3=\begin{bmatrix}0&0.5&0.5\\0.5&0&0\end{bmatrix}, B_{23}=\begin{bmatrix}0.3&-0.5\\0&0\end{bmatrix},$$

$$D_{23}=\begin{bmatrix}0&0\\0&-0.25\end{bmatrix}, E_4=\begin{bmatrix}0.75&0.1&0\\0&0.3&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$A_4=\begin{bmatrix}-0.75&-0.3&0.2\\-0.2&-0.6&-0.1\\0.35&0.4&-0.55\end{bmatrix}, B_{14}=\begin{bmatrix}0.05&-0.15\\0.1&0\\-0.05&0\end{bmatrix},$$

$$D_{14}=\begin{bmatrix}-0.1&0.3\\0&-0.6\\0.2&0\end{bmatrix}, C_4=\begin{bmatrix}0&-0.5&0.8\\0.5&0&0\end{bmatrix},$$

$$B_{24}=\begin{bmatrix}-0.3&-0.5\\0&0\end{bmatrix}, D_{24}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0.3\end{bmatrix},$$

$$R_1=R_2=\begin{bmatrix}0\\0\\0.5\end{bmatrix}, S_1=S_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},$$

$$R_3=R_4=S_3=S_4=\begin{bmatrix}0\\0\\1.5\end{bmatrix}, E_{L1}=\begin{bmatrix}0.5&0\\0&0.25\\0&0\end{bmatrix},$$

$$E_{L2}=\begin{bmatrix}0.75&0\\0&0.25\\0&0\end{bmatrix}, E_{L3}=\begin{bmatrix}0.5&0\\0.3&0.15\\0&0\end{bmatrix},$$

$$E_{L4}=\begin{bmatrix}1.5&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}, E_{R1}=\begin{bmatrix}0.5&0\\0.25&1\\0&0\end{bmatrix},$$

$$E_{R2}=E_{R3}=\begin{bmatrix}0.5&0\\0&0.5\\0&0\end{bmatrix}, E_{R4}=\begin{bmatrix}0.25&0\\0.1&0.15\\0&0\end{bmatrix}.$$

转移率矩阵为

$$\lambda = \begin{bmatrix} -0.5 & ? & 0.1 & ? \\ 0.3 & -0.7 & ? & ? \\ ? & ? & -0.8 & 0.3 \\ 0.2 & ? & ? & -0.6 \end{bmatrix},$$

其中“?”表示未知的转移率. 取 $\gamma = 1$, 求解式(15) ∼(18), 可得控制器增益矩阵为

$$K_1 = \begin{bmatrix} -1.2285 & -198.68 & -1.5074 \\ -0.3685 & 99.3802 & 1.7537 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -8.9243 & 264.3947 & -5.2292 \\ -3.4651 & 132.1420 & -3.6144 \end{bmatrix},$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -87.7569 & 1.1479 & -0.7016 \\ -52.6648 & 1.6869 & 0.5790 \end{bmatrix},$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -126.4103 & -1.2342 & -1.8355 \\ 75.8546 & -0.2611 & 2.7013 \end{bmatrix}.$$

如上所述, 奇异矩阵 E_i 模态依赖, 因此, 即使转移率矩阵全部已知, 文献[11]中的方法仍然无法解决此问题. 然而, 定理3的方法可以解决此问题, 且是在基于不完全的转移率条件下, 因此定理3方法具有更广泛的适用范围和更小的保守性.

5 结 论

基于转移率部分未知情形, 本文研究了连续Markov跳变奇异系统的 H_∞ 性能分析和 H_∞ 控制问题. 首先提出奇异矩阵模态依赖情况下系统随机可容许且满足 H_∞ 性能指标的条件; 然后推广到部分转移率情况下Markov跳变奇异系统的 H_∞ 性能分析; 最后设计了状态反馈 H_∞ 控制器, 使得闭环系统在不完全转移率条件下随机可容许且满足 H_∞ 性能.

参考文献(References)

[1] Long S, Zhong S, Liu Z. Robust stochastic stability for a class of singular systems with uncertain markovian jump and time-varying delay[J]. Asian Journal of Control, 2013, 15(4): 1102-1111.

[2] Long Shaohua, Zhong Shouming, Liu Zijian. H_∞ filtering for a class of singular Markovian jump systems with time-varying delay[J]. Signal Processing, 2012, 92(11): 2759-2768.

[3] Wang G, Zhang Q, Yang C. Exponential H_∞ filtering for singular systems with Markovian jump parameters[J]. Int J of Robust Nonlinear Control, 2013, 23(7): 792-806.

[4] Lewis F L. A survey of linear singular systems[J]. Circuits Systems Signal Process, 1986, 5(1): 3-36.

[5] Costa O L V, Fragoso M D, Marques R P. Discrete time Markovian jump linear systems[M]. London: Springer, 2005: 1-2.

[6] Chaibi Noreddine, Tissir El Houssaine. Delay dependent robust stability of singular systems with time-varying delay[J]. Int J of Control, Automation and Systems, 2012, 10(3): 632-638.

[7] Boukas E K. Control of singular systems with random abrupt changes in series: Communications and control engineering[M]. Berlin: Springer, 2008: 185-211.

[8] Xia Y, Zhang J, Boukas E K. Control for discrete singular hybrid systems[J]. Automatica, 2008, 44(10): 2635-2641.

[9] Xia Y, Boukas E K, Shi P, et al. Stability and stabilization of continuous time singular hybrid systems[J]. Automatica, 2009, 45(6): 1504-1509.

[10] Zhou Wu-neng, Fang Jian-an. Delay-dependent robust H_∞ admissibility and stabilization for uncertain singular system with markovian jumping parameters[J]. Circuits, Systems and Signal Processing, 2009, 28(3): 433-450.

[11] Zhang Jin-hui, Xia Yuan-qing, Boukas E K. New approach to H_∞ control for Markovian jump singular systems[J]. IET Control Theory Application, 2010, 4(11): 2273-2284.

[12] Che W, Wang J. Static output feedback H_∞ control for discrete-time Markov jump linear systems[C]. The 8th IEEE Int Conf on Control and Automation. Xiamen: IEEE Press, 2010: 2278-2283.

[13] 常华, 方洋旺, 楼顺天. 一类连续广义Markov跳变系统的镇定性研究[J]. 控制与决策, 2012, 27(5): 641-645.
(Chang H, Fang Y W, Lou S T. Stabilization of a class of continuous-time singular Markov jump systems[J]. Control and Decision, 2012, 27(5): 641-645.)

[14] 高明, 盛立. 连续Markov跳变奇异系统的稳定性分析和镇定[J]. 系统工程与电子技术, 2011, 33(1): 157-161.
(Gao M, Sheng L. Stability analysis and stabilization of continuous time Markov jump singular systems[J]. Systems Engineering and Electronics, 2011, 33(1): 157-161.)

(责任编辑: 郑晓蕾)