文章编号: 1001-0920 (2014) 10-1823-05 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2013.0881

基于扩展灰数Hausdorff距离的随机多准则决策方法

王坚强, 王丹丹

(中南大学 商学院，长沙 410083)

摘 要: 针对准则值为扩展灰数形式的风险型多准则决策问题, 提出一种基于扩展灰数Hausdorff距离的随机多准则决策方法. 首先定义了离散型扩展灰色随机变量及期望值和标准差, 并在Hausdorff距离的基础上提出了扩展灰数的Hausdorff距离公式; 然后计算每个方案在各准则下的期望值, 得到期望值决策矩阵; 再根据传统TOPSIS方法的思想, 提出一种基于TOPSIS的灰色随机多准则决策方法. 最后, 通过实例验证了所提出方法的合理性和可行性.

关键词: 多准则决策；扩展灰数；Hausdorff距离；灰色随机

中图分类号: C934 **文献标志码:** A

Stochastic multi-criteria decision-making method based on Hausdorff distance of extended grey numbers

WANG Jian-qiang, *WANG Dan-dan*

(School of Business，Central South University，Changsha 410083，China．Correspondent：WANG Jian-qiang, E-mail：jqwang@csu.edu.cn)

Abstract: For the risk multi-criteria decision-making problems in which the criteria value of alternatives are in the form of extended grey numbers, a grey stochastic multi-criteria decision-making approach is proposed based on the Hausdorff distance of extended grey numbers. Firstly, the discrete extended grey random variable as well as its expected value and standard deviation are defined. Then, motivated by the idea of the Hausdorff distance, the Hausdorff distance of extended grey numbers is defined. The expected value of each alternative under every criterion is calculated, and then the expected valued decision matrix is obtained. After that, a TOPSIS-based grey stochastic multi-criteria decision-making approach is built according to the idea of traditional TOPSIS method. Finally, an example is given to verify the effectiveness and feasibility of the developed approach.

Key words: multi-criteria decision-making；extended grey numbers；Hausdorff distance；grey stochastic

0 引 言

灰色随机多准则决策问题是指利用灰数表示相关决策信息的随机多准则决策问题, 是不确定决策研究的一个重要内容, 在经济、管理、军事、工程等领域有着广泛的应用. 灰数[1]是只知其大概范围而不知其确切值的数. 目前灰数运算、比较规则、距离公式等研究较多, 其中以区间灰数的研究为最多, 而没有对离散灰数的研究, 对离散灰数和连续灰数的结合所构成的扩展灰数的研究只有运算规则[2]、灰度和核[3], 并没有提出相应的距离公式, 也未见其应用到多准则决策中. 现有的文献大多针对准则值为实数或区间灰数的灰色随机多准则决策问题进行研究: 文献[4-5]研究了准则值为确定实数的灰色随机多准则决策问题; 文献[6-11]针对准则值为区间灰数的随机多准则决策问题进行了研究. 对于准则值为离散灰数的随机多准则决策问题的研究还未见报导. 扩展灰数是离散灰数和连续灰数的结合, 所以以扩展灰数作为准则值进行研究能更全面地反映灰数在多准则决策上的应用. 为此, 本文在已有扩展灰数定义和运算的基础上提出扩展灰数的Hausdorff距离, 并根据传统TOPSIS方法的思想, 提出一种基于扩展灰数Hausdorff距离的随机多准则决策方法, 以解决决策信息具有灰色性和随机性的双重不确定的决策问题.

收稿日期: 2013-07-01；**修回日期:** 2013-11-30.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71271218, 71221061)；湖南省自然科学基金项目(14JJ2009).

作者简介: 王坚强(1963−), 男, 教授, 博士, 从事决策理论与应用、风险管理与控制、物流管理、信息管理等研究；王丹丹(1989−), 女, 硕士生, 从事决策理论与应用、信息管理的研究.

1 扩展灰数和距离

灰数能有效度量事物的灰色性, 是灰色系统理论的重要研究内容. 下面给出灰数的相关概念并定义扩展灰数的距离.

1.1 扩展灰数

定义 1[12] 给定命题 $\mathit{\Gamma}$, $\mathit{\Gamma}(\theta)$ 为命题信息域. 由于命题表达不完全或者人们难以获得命题全部信息, 只能获得命题可能的取值集合 D. 因此, 该命题表示为 $\mathit{\Gamma}(\theta)$ 下的不确定数 $\otimes$, d^* 为该命题的真值, 则:

1) $\otimes$ 为命题 $\mathit{\Gamma}$ 意义下的灰数;

2) D 为 $\otimes$ 的数值覆盖集合;

3) $\mathit{\Gamma}(\theta)$ 为灰数 $\otimes$ 的信息背景;

4) d^* 为灰数 $\otimes$ 的真实值.

通常, 灰数可以记作 $\forall\otimes \Rightarrow d^* \in D$.

定义 2[12] 假设 $\otimes$ 是一个灰数, D 是覆盖 $\otimes$ 的集合, 则:

1) 若 D 是一个区间, 则 $\otimes$ 为区间灰数, 记为 $\forall\otimes \Rightarrow d^* \in [a,b]$ 或者 $\otimes = [a,b]$;

2) 若 D 是离散集合, 则 $\otimes$ 为离散灰数, 记为 $\forall\otimes \Rightarrow d^* \in D, D = \{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$, 或者 $\otimes = \{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$.

扩展灰数作为离散灰数和连续灰数的结合能更全面地表达信息的不确定性. 文献 [2] 给出了扩展灰数的定义.

定义 3[2] 若 D 是一系列区间灰数的并集, 则称 $\otimes$ 为扩展灰数, 记作 $\otimes = \bigcup\limits_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$, 其中 $[a_i, b_i]\bigcap[a_j, b_j] = \varphi(i \neq j)$, $a_i \leqslant b_i, i = 1, 2, \cdots, n$. 将所有扩展灰数的集合记为 $R(\otimes)$.

扩展灰数的运算规则见文献 [2].

1.2 扩展灰数的距离

灰数的距离描述了两个灰数之间的相离程度, 它在描述准则评价值与理想值之间的距离上发挥了重要作用, 为决策者进行有效决策提供了一种解决途径. 目前关于区间灰数的距离定义已有很多[13-15], 但都不适合扩展灰数, 为此本文给出了扩展灰数距离的定义.

定义 4 若 $\otimes_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$, $\otimes_2 = \bigcup\limits_{j=1}^{m}[c_j, d_j]$, $a_i \leqslant b_i (i = 1, 2, \cdots, n) \in R(\otimes)$, $c_j \leqslant d_j\ (j = 1, 2, \cdots, m)$, 则扩展灰数 $\otimes_1$ 与 $\otimes_2$ 之间的 Hausdorff 距离定义为

$$D_1(\otimes_1, \otimes_2) = \max\{h(\otimes_1, \otimes_2), h(\otimes_2, \otimes_1)\}, \quad (1)$$

其中 $h(\otimes_1, \otimes_2) = \max\limits_{i=1}^{n}\min\limits_{j=1}^{m}\|\otimes x_i - \otimes y_j\|$ 为 $\otimes_1$ 到 $\otimes_2$ 的 Hausdorff 距离, $\otimes x_i = [a_i, b_i]$, $\otimes y_j = [c_j, d_j]\,(i = 1, 2, \cdots, n, j = 1, 2, \cdots, m)$, $\|\cdot\|$ 代表任意的范数, 如 L_p. 如果 $\otimes_1$ 和 $\otimes_2$ 都为离散灰数, 即 $a_i = b_i, c_j = d_j$, 则 $h(\otimes_1, \otimes_2)$ 就退化为不精确点集间的定向 Hausdorff 距离[16].

当 $\|\cdot\|$ 为 L_p 时

$$\|\otimes x_i - \otimes y_j\| = \sqrt[p]{|a_i - c_j|^p + |b_i - d_j|^p},$$

有

$$h(\otimes_1, \otimes_2) = \max_{i=1}^{n}\min_{j=1}^{m}\sqrt[p]{|a_i - c_j|^p + |b_i - d_j|^p},$$

从而可得

$$\begin{aligned} &D_1(\otimes_1, \otimes_2) = \\ &\max\{\max_{i=1}^{n}\min_{j=1}^{m}\sqrt[p]{|a_i - c_j|^p + |b_i - d_j|^p}, \\ &\max_{j=1}^{m}\min_{i=1}^{n}\sqrt[p]{|c_j - a_i|^p + |d_j - b_i|^p}\}. \end{aligned} \quad (2)$$

当 p 取 1、2、∞ 时, 式 (2) 分别是以下几种最常见的情形.

1) 当 $p = 1$ 时

$$\begin{aligned} &D_1(\otimes_1, \otimes_2) = \\ &\max\{\max_{i=1}^{n}\min_{j=1}^{m}(|a_i - c_j| + |b_i - d_j|), \\ &\max_{j=1}^{m}\min_{i=1}^{n}(|c_j - a_i| + |d_j - b_i|)\}; \end{aligned}$$

2) 当 $p = 2$ 时

$$\begin{aligned} &D_1(\otimes_1, \otimes_2) = \\ &\max\{\max_{i=1}^{n}\min_{j=1}^{m}\sqrt{|a_i - c_j|^2 + |b_i - d_j|^2}, \\ &\max_{j=1}^{m}\min_{i=1}^{n}\sqrt{|c_j - a_i|^2 + |d_j - b_i|^2}\}; \end{aligned}$$

3) 当 $p = \infty$ 时

$$\begin{aligned} &D_1(\otimes_1, \otimes_2) = \\ &\max\{\max_{i=1}^{n}\min_{j=1}^{m}\max\{|a_i - c_j|, |b_i - d_j|\}, \\ &\max_{j=1}^{m}\min_{i=1}^{n}\max\{|c_j - a_i|, |d_j - b_i|\}\}. \end{aligned}$$

当扩展灰数退化为区间灰数, 即 $m = n = 1$ 时, 式 (2) 变为 $D_1(\otimes_1, \otimes_2) = \sqrt[p]{|a - c|^p + |b - d|^p}$, 称为区间灰数的 Minkowski 距离. 上述 3 种情形分别变为

1) 当 $p = 1$ 时, $D_1(\otimes_1, \otimes_2) = |a - c| + |b - d|$, 它是区间灰数的 Hamming 距离;

2) 当 $p = 2$ 时, $D_1(\otimes_1, \otimes_2) = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$, 它是区间灰数的 Euclidean 距离;

3) 当 $p = \infty$ 时, $D_1(\otimes_1, \otimes_2) = \max\{|a - c|, |b - d|\}$.

定理 1 扩展灰数 $\otimes_1$ 与 $\otimes_2$ 之间的 Hausdorff 距离满足以下 3 个条件:

1) $\forall\otimes_1, \otimes_2 \in R(\otimes)$, $D_1(\otimes_1, \otimes_2) = D_1(\otimes_2, \otimes_1)$;

2) $\forall\otimes_1 \in R(\otimes)$, $D_1(\otimes_1, \otimes_1) = 0$;

3) $\forall\otimes_1, \otimes_2, \otimes_3 \in R(\otimes)$, $D_1(\otimes_1, \otimes_3) \leqslant D_1(\otimes_1,$

$\otimes_2) + D_1(\otimes_2, \otimes_3)$.

2　离散型扩展灰色随机变量及其期望

本节将对离散型扩展灰色随机变量及其期望和标准差进行定义, 以期在多准则决策领域得到应用.

定义 5　基于扩展灰数的离散型扩展灰色随机变量 (简称为扩展灰色随机变量) 是一组由扩展灰数 $\otimes$ 构成的有限个状态值的随机变量, 记为 $\xi(\otimes)$, 其概率分布如表 1 所示, 也可以用概率密度函数 $f(\xi(\otimes))$ 表示.

表 1　扩展灰数型灰色随机变量 $\xi(\otimes)$ 的概率分布

$\xi(\otimes)$	$\otimes_1$	$\otimes_2$	$\cdots$	$\otimes_i$	$\cdots$	$\otimes_n$
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n

表 1 中: $\otimes_i$ 为扩展灰色随机变量 $\xi(\otimes)$ 在第 i 个状态发生时的取值, $\otimes_i \in \bigcup_{i=1}^{n}[\underline{x}_i, \bar{x}_i]$, $\underline{x}_i \leqslant \bar{x}_i (1 \leqslant i \leqslant n)$; p_i 为第 i 个状态发生时的概率, 满足 $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$; n 为扩展灰色随机变量可能取值的个数. 概率密度函数 $f(\xi(\otimes))$ 为 $f(\xi(\otimes) = \otimes_i) = p_i$.

定义 6　设 $\xi(\otimes)$ 为一个扩展灰色随机变量, 则称 $\sum_{i=1}^{n} p_i \times \otimes_i$ 为扩展灰色随机变量的期望值, 记为

$$E(\xi(\otimes)) = \sum_{i=1}^{n} p_i \times \otimes_i.$$

根据扩展灰数的运算规则 (加法和数乘) 可知该期望值也为扩展灰数. 扩展灰色随机变量的标准差为 $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i \times D_1^2(\otimes_i, E(\xi(\otimes)))}$, 记为

$$\sigma(\xi(\otimes)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i \times D_1^2(\otimes_i, E(\xi(\otimes)))},$$

其中 $D_1(\otimes_i, E(\xi(\otimes)))$ 为扩展灰数 $\otimes_i$ 与期望值之间的 Hausdorff 距离. 扩展灰色随机变量的标准差衡量了其可能取值与期望值之间的偏差幅度.

3　基于扩展灰数 Hausdorff 距离的随机多准则决策方法

对于有扩展灰色信息的随机多准则决策问题, $A = \{A_1, A_2, \cdots, A_i, \cdots, A_m\}$ 为方案集, $B = \{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$ 为彼此独立的准则集, 准则权重向量为 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_j, \cdots, \omega_n)$, 满足 $\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1, \omega_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \cdots, n$. 由于环境的复杂性和不确定性, 存在 s 种可能的自然状态, 记第 $t (t \leqslant s)$ 个状态的概率为 $p_t \geqslant 0$, 状态集合记为 $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_t, \cdots, \theta_s)$. 方案 A_i 在准则 B_j 下的值为扩展灰色随机变量 u_{ij}, 其在第 t 种状态下的值为扩展灰数 $\otimes u_{ij}^t$, 记为 $\otimes u_{ij}^t = \bigcup_{k=1}^{l}[a_{ijk}^t, b_{ijk}^t]$, 满足 $a_{ij1}^t \leqslant b_{ij1}^t < a_{ij2}^t \leqslant b_{ij2}^t < \cdots < a_{ijl}^t \leqslant b_{ijl}^t$. 从而可得决策矩阵 $R^t = \{u_{ij}^t\}_{m\times n} (t = 1, 2, \cdots, s)$. 在各准则权重已知的情况下, 要确定方案集的最佳方案或排序, 其决策步骤如下.

Step 1　对决策矩阵 $R^t (t = 1, 2, \cdots, s)$ 进行规范化.

物理量纲或者数量级的不同会对决策结果产生影响, 因此需要消除这一影响, 有必要对决策矩阵 $R^t (t = 1, 2, \cdots, s)$ 进行规范化处理. 每一个准则都被分为两种类型: 一种是效益型准则 (越大越好), 另一种是成本型准则 (越小越好). 根据文献 [17], 准则值的规范化公式如下.

效益型准则值为

$$\otimes r_{ij}^t = \frac{\otimes u_{ij}^t}{b_{ijk}^{t\,(\max)}} = \bigcup_{k=1}^{l}\left[\frac{a_{ijk}^t}{b_{ijk}^{t\,(\max)}}, \frac{b_{ijk}^t}{b_{ijk}^{t\,(\max)}}\right]; \tag{3}$$

成本型准则值为

$$\otimes r_{ij}^t = \frac{a_{ijk}^{t\,(\min)}}{\otimes u_{ij}^t} = \bigcup_{k=1}^{l}\left[\frac{a_{ijk}^{t\,(\min)}}{b_{ijk}^t}, \frac{a_{ijk}^{t\,(\min)}}{a_{ijk}^t}\right]. \tag{4}$$

其中

$$b_{ijk}^{t\,(\max)} = \max_{1\leqslant k\leqslant l; 1\leqslant i\leqslant m} b_{ijk}^t,$$
$$a_{ijk}^{t\,(\min)} = \min_{1\leqslant k\leqslant l; 1\leqslant i\leqslant m} a_{ijk}^t.$$

记 $\otimes r_{ij}^t = \bigcup_{k=1}^{l}[\underline{r}_{ijk}^t, \bar{r}_{ijk}^t] (t = 1, 2, \cdots, s)$, 从而可以得到 s 个自然状态的标准化决策矩阵

$$G^t = \{\otimes r_{ij}^t\}_{m\times n} (t = 1, 2, \cdots, s).$$

Step 2　计算期望值.

利用灰色决策矩阵 G^t 及状态 t 的概率 $p_t (t = 1, 2, \cdots, s)$, 由定义 6 计算每个方案在各状态下的取值的期望值

$$E(\xi(\otimes r_{ij})) = \sum_{t=1}^{s} p_t \times \otimes r_{ij}^t, \tag{5}$$

从而得到期望值灰色决策矩阵 $G = \{\otimes r_{ij}\}_{m\times n}$, 记 $\otimes r_{ij} = \bigcup_{q=1}^{h}[\underline{r}_{ijq}, \bar{r}_{ijq}] (\underline{r}_{ij1} \leqslant \bar{r}_{ij1} < \underline{r}_{ij2} \leqslant \bar{r}_{ij2} < \cdots < \underline{r}_{ijh} \leqslant \bar{r}_{ijh})$.

Step 3　确定正理想方案和负理想方案.

正理想方案 A^+ 和负理想方案 A^- 分别为

$$\begin{cases} A^+ = (A_1^+, A_2^+, \cdots, A_n^+), \\ A_j^+ = [\max\limits_{i=1,2,\cdots,m} \underline{r}_{ij1}, \max\limits_{i=1,2,\cdots,m} \bar{r}_{ijh}]; \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} A^- = (A_1^-, A_2^-, \cdots, A_n^-), \\ A_j^- = [\min\limits_{i=1,2,\cdots,m} \underline{r}_{ij1}, \min\limits_{i=1,2,\cdots,m} \bar{r}_{ijh}]. \end{cases} \tag{7}$$

Step 4　计算每一个方案分别到正理想方案和负理想方案的距离.

由定义 4 中定义的两个扩展灰数的距离可以得

到方案分别到正负理想方案的距离.

A_i 与 A^+ 之间的距离为

$$d_i^+(A_i, A^+) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j D_1(\otimes r_{ij}, A_j^+); \tag{8}$$

A_i 与 A^- 之间的距离为

$$d_i^-(A_i, A^-) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j D_1(\otimes r_{ij}, A_j^-)). \tag{9}$$

其中 $D_1(\otimes r_{ij}, A_j^+)$ 和 $D_1(\otimes r_{ij}, A_j^-)$ 分别为 $\otimes r_{ij}$ 与 A_j^+ 和 $\otimes r_{ij}$ 与 A_j^- 的距离.

Step 5 计算相对贴近度并排序.

相对贴近度的计算公式为

$$K_i = \frac{d_i^+(A_i, A^+)}{d_i^+(A_i, A^+) + d_i^-(A_i, A^-)}, \tag{10}$$

其中 K_i 越小, 方案越优.

4 实例计算

某投资银行欲投资一个企业, 现有 3 家企业 A_1、A_2、A_3 可供选择. 评价其投资价值的准则分别为: 年产值 B_1, 社会效益 B_2, 环境污染程度 B_3. 年产值和社会效益单位均为千万元. 决策者给出的准则权重取值为 $\omega = (0.2, 0.3, 0.5)$. 专家对每个企业在每项准则下分别做出评价, 如表 2～表 4 所示, 每个准则对应 3 种可能的自然状态, 分别为好、中和差, 其相应概率为 $p = (0.3, 0.4, 0.3)$. 试确定投资银行的最佳投资方案.

表 2 状态好时的决策矩阵 R^1

	B_1	B_2	B_3
A_1	[2.7,2.8]⋃[3.0,3.2]	[3.3,4.0]	[0.2,0.5]⋃[0.6,1]
A_2	[2.5,2.6]⋃[2.7,3.0]	[3.5,3.9]⋃[4.4,4.5]	[0.3,0.4]⋃[0.6,0.75]
A_3	[2.9,3.2]⋃[3.4,3.7]	[2.6,3.5]⋃{3.7}	[0.4,0.5]⋃[0.6,0.75]

表 3 状态好时的决策矩阵 R^2

	B_1	B_2	B_3
A_1	[2.4,2.5]⋃[3.0,3.5]	[2.9,3.3]⋃[3.7,4.0]	[0.2,0.4]⋃[0.6,0.75]
A_2	[2.8,2.9]⋃[3.1,3.3]	[3.3,3.6]⋃[3.7,3.9]	[0.3,0.4]⋃[0.6,0.8]
A_3	[2.5,2.7]⋃[2.9,3.0]	[2.7,3.0]⋃[3.3,3.5]	[0.2,0.3]⋃[0.5,0.65]

表 4 状态好时的决策矩阵 R^3

	B_1	B_2	B_3
A_1	[2.8,3.0]⋃[3.2,3.3]	[3.3,3.5]⋃[4.0,4.5]	[0.2,0.35]⋃[0.5,0.7]
A_2	[2.3,2.5]⋃[2.6,2.9]	[2.5,2.6]⋃[3.3,4.0]	[0.3,0.45]⋃[0.5,0.65]
A_3	[2.4,2.7]⋃{3.1}	[2.3,2.4]⋃[3.0,3.4]	[0.2,0.4]⋃[0.5,0.7]

上述最佳投资方案的确定过程描述如下.

Step 1 对决策矩阵 $R^t(t = 1, 2, 3)$ 进行规范化处理.

年产值和社会效益为效益型准则, 环境污染程度为成本型准则. 由式 (3) 和 (4) 可得到标准化灰色决策矩阵 $G^t = \{\otimes r_{ij}^t\}_{m \times n}(t = 1, 2, 3)$, 如表 5～表 7 所示.

表 5 状态好时的标准化决策矩阵 G^1

	B_1	B_2	B_3
A_1	[0.73,0.757]⋃[0.811,0.865]	[0.733,0.889]	[0.2,0.333]⋃[0.4,1]
A_2	[0.676,0.703]⋃[0.73,0.811]	[0.778,0.867]⋃[0.978,1]	[0.267,0.333]⋃[0.5,0.667]
A_3	[0.784,0.865 5]⋃[0.919,1]	[0.578,0.778]⋃{0.822}	[0.267,0.333]⋃[0.4,0.5]

表 6 状态中等时的标准化决策矩阵 G^2

	B_1	B_2	B_3
A_1	[0.686,0.714]⋃[0.857,1]	[0.725,0.825]⋃[0.925,1]	[0.267,0.333]⋃[0.5,1]
A_2	[0.8,0.829]⋃[0.886,0.943]	[0.825,0.9]⋃[0.925,0.975]	[0.25,0.333]⋃[0.5,0.667]
A_3	[0.714,0.771]⋃[0.829,0.857]	[0.675,0.75]⋃[0.825,0.875]	[0.308,0.4]⋃[0.667,1]

表 7 状态中等时的标准化决策矩阵 G^3

	B_1	B_2	B_3
A_1	[0.848,0.909]⋃[0.97,1]	[0.733,0.778]⋃[0.889,1]	[0.286,0.4]⋃[0.571,1]
A_2	[0.697,0.758]⋃[0.788,0.879]	[0.556,0.578]⋃[0.733,0.889]	[0.308,0.4]⋃[0.444,0.667]
A_3	[0.727,0.818]⋃{0.939}	[0.511,0.533]⋃[0.667,0.756]	[0.286,0.4]⋃[0.5,1]

Step 2 计算期望值.

由自然状态概率 $p = (0.3, 0.4, 0.3)$ 以及扩展灰数的运算规则, 根据式 (3) 计算期望值, 从而得到期望值灰色决策矩阵 $G = \{\otimes r_{ij}\}_{3\times 3}$, 结果如表 8 所示.

表 8 期望值决策矩阵 G

	B_1	B_2	B_3
A_1	[0.747 8,0.959 5]	[0.729 8,0.966 7]	[0.252 6,1]
A_2	[0.731 9,0.884 2]	[0.730 2,0.956 7]	[0.272 5,0.667]
A_3	[0.738 9,0.924 5]	[0.596 7,0.823 4]	[0.289 1,0.85]

Step 3 确定正理想方案和负理想方案.

若式 (1) 中的范数为 L_2, 则由式 (4) 和 (5), 有

$$A^+ = ([0.747\,8, 0.959\,5], [0.730\,2, 0.966\,7], [0.252\,6, 0.667]),$$

$$A^- = ([0.731\,9, 0.884\,2], [0.596\,7, 0.823\,4], [0.289\,1, 1]).$$

Step 4 计算每一个方案分别到正理想方案和负理想方案的距离.

由式 (6), A_i 与 A^+ 的距离为

$d_1^+(A_1, A^+) = 0.166\,6,\ d_2^+(A_2, A^+) = 0.028\,3,$

$d_3^+(A_3, A^+) = 0.159\,3.$

由式 (9), A_i 与 A^- 的距离为

$d_1^-(A_1, A^-) = 0.092\,3,\ d_2^-(A_2, A^-) = 0.223\,3,$

$d_3^-(A_3, A^-) = 0.083\,2.$

Step 5　计算相对贴近度并排序.

根据式 (10) 计算相对贴近度. 结果为 $K_1 = 0.643\,5$, $K_2 = 0.112\,5$, $K_3 = 0.656\,9$, 从而得到 $K_2 < K_1 < K_3$, 所以 $A_2 \succ A_1 \succ A_3$. 因此最佳方案为 A_2.

5　结　论

本文对准则值为扩展灰数信息的随机多准则决策问题进行了研究. 通过给出扩展灰数 Hausdorff 距离的定义, 利用 TOPSIS 方法的思想, 提出一种基于扩展灰数 Hausdorff 距离的随机多准则决策方法. 实例计算结果表明, 所提出方法对于处理既具有扩展灰数又具有随机性的决策问题十分有效, 可以广泛地应用到产品选择、投资评价和供应链管理等各个领域.

参考文献(References)

[1] 刘思峰, 郭天榜, 党耀国. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1999: 3-4.
(Liu S F, Guo T B, Dang Y G. Grey system theory and application[M]. Beijing: Science Press, 1999: 3-4.)

[2] Yang Y J. Extended grey numbers and their operations[C]. Proc of IEEE Int Conf on Systems, Man and Cybernetics. Leicester, 2007: 2181-2186.

[3] Liu S F, Fang Z G. General grey numbers and their operations[J]. Grey Systems: Theory and Application, 2012, 2(3): 341-349.

[4] 王坚强, 任世昶, 陈晓红. 灰色随机多准则决策的优劣势排序法[J]. 控制与决策, 2009, 24(5): 701-705.
(Wang J Q, Ren S C, Chen X H. Superiority and inferiority ranking method for grey random multi-criteria decision-making[J]. Control and Decision, 2009, 24(5): 701-705.)

[5] 童玉娟, 王志国. 概率为区间灰数的多目标风险型决策方法[J]. 中国西部科技, 2008, 7(3): 37-38.
(Tong Y J, Wang Z G. A risk based multi-objective decision-making method when the probability is interval gray number[J]. Science and Technology of West China, 2008, 7(3): 37-38.)

[6] Luo D, Zhou L, Sheng S. Research on grey multi-attribute risk group decision-making method[C]. Proc of IEEE Int Conf on Grey Systems and Intelligent Services. Nanjing, 2007: 754-758.

[7] 罗党, 刘思峰. 灰色多指标风险型决策方法研究[J]. 系统工程与电子技术, 2004, 26(6): 1057-1060.
(Luo D, Liu S F. Research on grey multi-criteria risk decision-making method[J]. Systems Engineering and Electronics, 2004, 26(6): 1057-1060.)

[8] 罗党, 周玲, 罗迪新. 灰色风险型多属性群决策方法[J]. 系统工程与电子技术, 2008, 30(9): 1674-1678.
(Luo D, Zhou L, Luo D X. Grey multi-attribute risk group decision-making method[J]. Systems Engineering and Electronics, 2008, 30(9): 1674-1678.)

[9] 王坚强, 任世昶. 基于期望值的灰色随机多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2009, 24(1): 39-43.
(Wang J Q, Ren S C．Grey random multi-criteria decision-making approach based on expected value[J]．Control and Decision, 2009, 24(1): 39-43.)

[10] 王坚强, 周玲. 基于最大隶属度的区间概率灰色随机多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2010, 25(4): 493-496.
(Wang J Q, Zhou L. Grey random multi-criteria decision-making approach based on maximum membership degree[J]. Control and Decision, 2010, 25(4): 493-496.)

[11] 王坚强, 周玲. 基于前景理论的灰色随机多准则决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(9): 1658-1664.
(Wang J Q, Zhou L. Grey-stochastic multi-criteria decision-making approach based on prospect theory[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2010, 30(9): 1658-1664)

[12] Xu H F, Fang Z G. Grey number operation principle based on probability distribution[C]. Proc of IEEE Int Conf on Grey Systems and Intelligent Services. Nanjing, 2009: 335-339.

[13] Wang Z X, Chen B. A novel grey situation decision making model with grey numbers[C]. IEEE Int Conf on Grey Systems and Intelligent Services. Jinhua, 2011: 592-596.

[14] Lin Y H, Lee P C, Ting H I. Dynamic multi-attribute decision making model with grey number evaluations[J]. Expert Systems with Applications, 2008, 35(4): 1638-1644.

[15] Xie N M, Liu S F. A novel grey relational model based on grey number sequences[J]. Grey System: Theory and Application, 2011, 1(2): 117-128.

[16] Knauer C, Löffler M, Scherfenberg M, et al. The directed Hausdorff distance between imprecise point sets[J]. Theoretical Computer Science, 2011, 412(32): 4173-4186.

[17] Li G D, Yamaguchi D, Nagai M. A grey-based decision-making approach to the supplier selection problem[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2007, 46(3): 573-581.

(责任编辑: 齐　霁)