第 29 卷 第 9 期
Vol. 29 No. 9

控 制 与 决 策
Control and Decision

2014 年 9 月
Sep. 2014

文章编号: 1001-0920 (2014) 09-1611-06
DOI: 10.13195/j.kzyjc.2013.0359

序决策信息系统中区间决策规则的获取

管延勇，王洪凯，徐法升

(济南大学 数学科学学院，济南 250022)

摘 要: 在序决策信息系统中, 定义区间为支配一个特定的对象同时又被另一个特定的对象所支配的所有对象的集合. 以区间为基本知识颗粒, 建立新的优势关系粗糙集模型, 并由此获取决策值为特定区间范围的区间决策规则. 提出区间的约简的概念, 构造区分函数计算区间的约简, 并由此计算优化区间决策规则. 该方法比初始的优势关系粗糙集方法适应性更强, 且所得区间决策规则可直接应用于序信息系统的分类问题.

关键词: 粗糙集；优势关系；决策规则；约简；区分函数

中图分类号: TP18 **文献标志码:** A

Interval decision rules acquisition in ordered decision information systems

GUAN Yan-yong, *WANG Hong-kai*, *XU Fa-sheng*

(School of Mathematical Sciences，University of Jinan，Ji'nan 250022，China．Correspondent：GUAN Yan-yong, E-mail：ss_guanyy@ujn.edu.cn)

Abstract: In ordered decision information systems, an interval is defined as a set of objects which are dominated by a specific object and meanwhile dominate another specific object. The intervals are taken as basic knowledge granules, and used to develop a new dominance-based rough set approach. With this model, the interval decision rule whose decision values fall into a specific interval can be induced. The reduct of an interval is defined, and the discernibility function is constructed to compute the reducts of the interval. By reducts of an interval, corresponding optimal interval decision rules can be obtained. The proposed approach is more flexible than the original dominance-based rough set approach, and the induced decision rules can be directly used in classification of ordinal data.

Key words: rough set；dominance relation；decision rule；reduct；discernibility function

0 引 言

Pawlak 粗糙集理论[1-3]及其扩展模型, 是处理不同类型的决策信息系统的不协调性与不完备性, 并由此揭示其数据规律的有力工具. 信息系统知识发现的重要任务是, 揭示条件属性与决策属性之间的依赖关系. 对两者之间的依赖关系的研究主要体现在两个方面, 一是通过属性约简评估条件属性相对于决策属性的重要性, 二是计算“if-then”决策规则.

在信息系统中, 如果一个对象关于某属性的属性值仅表示该对象关于属性所在的类, 则属性值确定对象间的不可分辨关系, 从而可建立以等价类为基本知识颗粒的 Pawlak 粗糙集模型; 如果属性值表达对象之间的相似程度 (接近程度), 则可以通过定义相容关系, 以相容类或最大相容类为基本知识颗粒, 建立相容关系粗糙集模型[4-9]; 如果对象的属性值表达对象之间的优势关系 (偏序关系), 则该系统被称为序信息系统. 在序决策信息系统中, 对象的条件属性值确定对象之间的优势关系 (支配关系), 而决策属性所确定的决策类之间也被赋予优劣关系. 以支配集和被支配集为基本知识颗粒, 文献 [10-13] 提出了基于优势关系的粗糙集方法 (DRSA).

DRSA 以对象的支配集和被支配集为基本知识颗粒, 定义决策类的并的上、下近似, 并由此获取优势决策规则 (“at least”决策规则和“at most”决策规则). 针对各类序决策信息系统, 如不完备序决策信息系统[14-16]、集值序决策信息系统[17]、区间值序决策信息系统[18-19]以及模糊序决策信息系统[20-22]等, 提出 DRSA 的多种扩展模型, 并在属性约简与决策规则获

收稿日期: 2013-03-29；**修回日期:** 2013-08-30.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61070241)；山东省自然科学基金项目 (ZR2010FM035, ZR2011AQ015, ZR2011F003).

作者简介: 管延勇 (1964−), 男, 教授, 博士, 从事粗糙集与模糊集理论及其应用、信息系统知识发现等研究；王洪凯 (1978−), 男, 副教授, 博士, 从事粗糙集理论及其应用的研究.

取方面取得丰硕成果. 这些扩展模型也是以对象的支配集和被支配集为基本知识颗粒, 然而, DRSA 存在以下 3 个方面的问题.

1) 某些情况下, 支配集和被支配集作为基本知识颗粒显得太粗. 举一个特殊的例子: 当信息系统中的对象集关于条件属性集存在最大(小)元而该最大(小)元被指派至最劣(优)的决策类时, 利用 DRSA 得不到任何“at least”(“at most”) 决策规则, 即 DRSA 无法处理这类不协调性.

2) DRSA 所得到的“at least”(“at most”) 决策规则, 其决策值大(小)于某特定值, 而不是落于一个有限区间. 它们能将满足条件的对象指派到不劣(优)于某个特定决策类的那些决策类中, 但不能指派对象到优于一个特定决策类同时又劣于另外一个特定决策类的那些决策类中; 特别地, 不能把对象指派于一个指定的决策类; 因此, “at least”(“at most”) 决策规则不能直接应用于序信息系统中对象的分类[12-13, 23-24].

3) DRSA 基于这样一种假设: 序决策信息系统本应满足优势关系原理(亦称系统是协调的), 即条件属性和决策属性之间满足单调性, 亦即, 依条件属性值为优的对象其决策值亦为优, 只不过由于数据获取手段的局限性或专家在赋予对象决策值时的踌躇, 导致数据出现不协调性, 使某些条件属性值为优的对象其决策值反而为劣[12]. 然而, 可以想象, 在很多实际问题中, 条件属性和决策属性之间不一定满足单调性, 而往往满足分区域的单调性. 例如, 在评估国民经济运行状态时, 作为指标之一, 经济增长率并不是越高越好, 而是要控制其在一个合理的范围之内; 在评估身体健康状态时, 血压并不是越高越好或越低越好, 而是处于一个恰当的范围为好. DRSA 不能处理这种条件属性和决策属性之间满足分区域单调性的序决策信息系统.

为了解决上述问题, 本文以“区间”为基本知识颗粒, 建立一种新的基于优势关系的粗糙集模型. 这里, “区间”是一个对象的支配集和另外一个对象的被支配集的交集.

1 基本知识

1.1 序决策信息系统

一个信息系统是一个四元组 $S = (U, \mathrm{AT}, V, f)$, 其中: $U = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 为对象的有限集; AT 为属性的有限集; $V = \bigcup\limits_{a\in \mathrm{AT}} V_a$, 这里 V_a 为属性 a 的值域; $f : U \times \mathrm{AT} \to V$ 为信息函数, 满足 $f(x, a) \in V_a$, $\forall x \in U, \forall a \in \mathrm{AT}$. 为了方便起见, 记 $f(x, a) = a(x)$. 当属性集分为条件属性集 $C = \{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$ 和决策属性集 $D = \{d\}$ 时, 称 S 为决策信息系统. 记 $V_d = \{1, 2, \cdots, r\}$. 由 $R_d = \{(x, y) \mid (x, y) \in U \times U, d(x) = d(y)\}$ 所确定的决策类集合为 $U/R_d = \{D_1, D_2, \cdots, D_r\}$. $\forall X \subseteq U$, 记 $d(X) = \{d(y) \mid y \in X\}$; $\forall s, t \in V_d, 1 \leqslant s \leqslant t \leqslant r$, 记 $[s, t] = \{k \mid k \in V_d, s \leqslant k \leqslant t\}$.

如果决策信息系统 $S = (U, C \bigcup \{d\}, V, f)$ 中每个条件属性的属性值按照升序或降序表达对象间的优先次序, 并且其决策属性的属性值也表达对象的优劣, 即对于 $s > t$, D_s 中的对象优于 D_t 中的对象, 则称 S 为序决策信息系统.

在序决策信息系统中, $\forall a \in C$, 若 $f(x, a) \geqslant f(y, a)$, 则记 $x \succsim_a y$, 它意味着 x 关于属性 a 至少不差于 y. $\forall B \subseteq C$, 记 $R_B^{\succsim} = \{(x, y) \mid x \succsim_a y, \forall a \in B\}$, 当 $(x, y) \in R_B^{\succsim}$ 时, 记为 $x \succsim_B y$ 或 $y \precsim_B x$. 显然有 $R_C^{\succsim} \subseteq R_B^{\succsim}$ 成立.

在表 1 中, 定义 $(x_j, x_i) \in R_C^{\succsim}$, 当且仅当 $\forall k, 1 \leqslant k \leqslant 4$, $c_k(x_j) \geqslant c_k(x_i)$, 且假设决策值大的决策类优于决策值小的决策类, 则表 1 为一个序决策信息系统.

表 1 序决策信息系统

U	c_1	c_2	c_3	c_4	d
x_1	0.85	0.70	0.65	0.40	2
x_2	0.90	0.80	0.90	0.85	3
x_3	0.80	0.65	0.75	0.80	3
x_4	0.70	0.55	0.60	0.70	2
x_5	0.60	0.65	0.70	0.80	3
x_6	0.50	0.55	0.50	0.60	2
x_7	0.20	0.45	0.30	0.45	1
x_8	0.45	0.40	0.45	0.55	2
x_9	0.40	0.50	0.35	0.50	1
x_{10}	0.65	0.85	0.75	0.80	1
x_{11}	0.95	0.80	0.95	0.90	4
x_{12}	0.90	0.85	0.85	0.40	4

1.2 基于优势关系的粗糙集方法 (DRSA)

在序决策信息系统 $S = (U, C \bigcup \{d\}, V, f)$ 中, 如果 $(x, y) \in R_B^{\succsim}$, 则称 x 关于属性集 B 支配 y, 或 y 关于属性集 B 被 x 支配. 记

$$[x]_B^{\succsim} = \{y \mid y \in U, y \succsim_B x\},$$

$$[x]_B^{\precsim} = \{y \mid y \in U, y \precsim_B x\},$$

则称 $[x]_B^{\succsim}$ 为 x 关于属性集 B 的支配集, 而称 $[x]_B^{\precsim}$ 为 x 关于属性集 B 的被支配集.

显然, $U/R_B^{\succsim} = \{[x]_B^{\succsim} \mid x \in U\}$ 和 $U/R_B^{\precsim} = \{[x]_B^{\precsim} \mid x \in U\}$ 都是 U 的覆盖.

在基于优势关系的粗糙集方法中, 将 $[x]_B^{\succsim}$ 和 $[x]_B^{\precsim}$ $(x \in U)$ 作为基本知识颗粒来定义上、下近似.

定义 1 在序决策信息系统 $S = (U, C \bigcup \{d\}, V, f)$ 中, 对于 $X \subseteq U$ 和 $B \subseteq C$, 令

$$\underline{R_B^{\succsim}}(X) = \{x \mid x \in U, [x]_B^{\succsim} \subseteq X\},$$

$$\overline{R_B^{\succsim}}(X) = \{x \mid x \in U, [x]_B^{\precsim} \bigcap X \neq \varnothing\},$$

则分别称 $\underline{R_B^{\succsim}}(X)$ 和 $\overline{R_B^{\succsim}}(X)$ 为 X 关于 B 的下近似和

上近似.

同样, 可定义另一类下近似和上近似, 即

$$\underline{R_B^{\preceq}}(X)=\{x\mid x\in U,[x]_B^{\preceq}\subseteq X\},$$

$$\overline{R_B^{\preceq}}(X)=\{x\mid x\in U,[x]_B^{\succeq}\bigcap X\neq\varnothing\}.$$

通过决策类的上并 $Cl_s^{\geqslant}=\bigcup_{k\geqslant s}D_k$ 的下近似(上近似) 中的对象 x, 可导出确定性 (可能性)"at least"决策规则为 $\bigwedge_{b\in B}(b,\geqslant b(x))\rightarrow(d,\geqslant s)$.

同样, 通过决策类的下并 $Cl_t^{\leqslant}=\bigcup_{k\leqslant t}D_k$ 的下近似(上近似) 中的对象 x, 可导出确定性(可能性)"at most"决策规则为 $\bigwedge_{b\in B}(b,\leqslant b(x))\rightarrow(d,\leqslant t)$.

2 I-下近似、I-上近似和区间决策规则

2.1 区间知识颗粒

定义 2 在序决策信息系统 $S=(U,C\bigcup\{d\},V,f)$ 中, 对于 $B\subseteq C$ 和 $(x_j,x_i)\in R_B^{\succeq}$, 令

$$[x_i,x_j]_B=[x_i]_B^{\succeq}\bigcap[x_j]_B^{\preceq}=$$
$$\{y\mid y\in U,x_i\prec_B y\prec_B x_j\},$$

称 $[x_i,x_j]_B$ 为 $(x_j,x_i)\in R_B^{\succeq}$ 所确定的一个区间. 当 $(x_j,x_i)\notin R_B^{\succeq}$ 时, $[x_i,x_j]_B=\varnothing$.

例如, 对于表 1 所示的序决策信息系统, 有

$$[x_8,x_4]_C=\{x_4,x_6,x_8\},\ [x_5,x_2]_C=\{x_2,x_3,x_5\}.$$

$U/R_B^{\preceq\succ}=\{[x_i,x_j]_B\mid(x_j,x_i)\in R_B^{\succeq}\}$ 显然是 U 的一个覆盖, 而 $(U/R_B^{\preceq\succ},\subseteq)$ 是一个偏序集.

命题 1 对于 $B\subseteq C$, 有以下结论成立:

1) 对于 $\forall[x_i,x_j]_B\in U/R_B^{\preceq\succ}$, 有

$$[x_i,x_j]_B\subseteq[x_i]_B^{\succeq}\text{ 且 }[x_i,x_j]_B\subseteq[x_j]_B^{\preceq}.$$

2) 对于 $\forall[x_i]_B^{\succeq}\in U/R_B^{\succeq}$, 有

$$[x_i]_B^{\succeq}=\bigcup_{y\in[x_i]_B^{\succeq}}[x_i,y]_B;$$

对于 $\forall[x_j]_B^{\preceq}\in U/R_B^{\preceq}$, 有

$$[x_j]_B^{\preceq}=\bigcup_{x\in[x_j]_B^{\preceq}}[x,x_j]_B.$$

命题 2 对于 $B\subseteq C$, 有以下结论成立:

1) 对于 $\forall[x_i,x_j]_C\in U/R_C^{\preceq\succ}$, 有

$$[x_i,x_j]_B\in U/R_B^{\preceq\succ}\text{ 且 }[x_i,x_j]_C\subseteq[x_i,x_j]_B.$$

2) 对于 $[x_i,x_j]_B\in U/R_B^{\preceq\succ}$, 若 $(x_j,x_i)\in R_C^{\succeq}$, 则有 $[x_i,x_j]_C\subseteq[x_i,x_j]_B$, 否则 $[x_i,x_j]_C=\varnothing$.

3) 对于 $\forall[x_i,x_j]_C\in U/R_C^{\preceq\succ},\forall[y_s,y_t]_C\in U/R_C^{\preceq\succ}$, 若 $[x_i,x_j]_C\subseteq[y_s,y_t]_C$, 则 $[x_i,x_j]_B\subseteq[y_s,y_t]_B$.

证明 1) 对于 $\forall[x_i,x_j]_C\in U/R_C^{\preceq\succ}$, 有 $(x_j,x_i)\in R_C^{\succeq}$, 且 $R_C^{\succeq}\subseteq R_B^{\succeq}$, 故有 $(x_j,x_i)\in R_B^{\succeq}$. 根据定义 2, $[x_i,x_j]_B\in U/R_B^{\preceq\succ}$.

对于 $\forall z\in[x_i,x_j]_C$, 有 $x_i\prec_C z\prec_C x_j$, 从而 $x_i\prec_a z\prec_a x_j$, $\forall a\in C$, 故 $x_i\prec_B z\prec_B x_j$ 成立, 即 $z\in[x_i,x_j]_B$. 因此有 $[x_i,x_j]_C\subseteq[x_i,x_j]_B$.

2) 对于 $[x_i,x_j]_B\in U/R_B^{\preceq\succ}$, 若 $(x_j,x_i)\in R_C^{\succeq}$, 则 $[x_i,x_j]_C\in U/R_C^{\preceq\succ}$. 由证明 1) 可得 $[x_i,x_j]_C\subseteq[x_i,x_j]_B$. 另一方面, 如果 $(x_i,x_j)\notin R_C^{\succeq}$, 则由定义 2 可知 $[x_i,x_j]_C=\varnothing$.

3) 若 $[x_i,x_j]_C\subseteq[y_s,y_t]_C$, 则 $y_s\prec_C x_i\prec_C x_j\prec_C y_t$, 故 $y_s\prec_B x_i\prec_B x_j\prec_B y_t$; 从而, 对于 $\forall z\in[x_i,x_j]_B$, 有 $x_i\prec_B z\prec_B x_j$, 这意味着 $y_s\prec_B z\prec_B y_t$, 即 $z\in[y_s,y_t]_B$; 因此 $[x_i,x_j]_B\subseteq[y_s,y_t]_B$ 成立. □

$(x_j,x_i)\in R_B^{\succeq}$ 和 $[x_i,x_j]_B\in U/R_B^{\preceq\succ}$ 是相互确定的, 为了方便起见, 将在下文中交替使用 (x_j,x_i) 和 $[x_i,x_j]_B$.

2.2 I-下近似、I-上近似

定义 3 设 $S=(U,C\bigcup\{d\},V,f)$ 为序决策信息系统, $X\subseteq U$, $B\subseteq C$. 令

$$\underline{R_B^{\preceq\succ}}(X)=$$
$$\{(x_j,x_i)\mid(x_j,x_i)\in R_B^{\succeq},\ [x_i,x_j]_B\subseteq X\},$$
$$\overline{R_B^{\preceq\succ}}(X)=$$
$$\{(x_j,x_i)\mid(x_j,x_i)\in R_B^{\succeq},\ [x_i,x_j]_B\bigcap X\neq\varnothing\},$$
$$Bn_B^{\preceq\succ}=\overline{R_B^{\preceq\succ}}(X)-\underline{R_B^{\preceq\succ}}(X),$$

则分别称 $\underline{R_B^{\preceq\succ}}(X)$, $\overline{R_B^{\preceq\succ}}(X)$ 和 $Bn_B^{\preceq\succ}$ 分别为 X 关于 B 的 I-下近似、I-上近似和 I-边界.

在表 1 所示的序信息系统中, $Cl_2^3=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_8\}$, $[x_8,x_2]_C=\{x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_8\}$, $[x_1,x_2]_C=\{x_1,x_2\}$, 于是有 $[x_8,x_2]_C\subseteq Cl_2^3$, $[x_1,x_2]_C\subseteq Cl_2^3$. 由定义 3 可得, $(x_2,x_8)\in\underline{R_C^{\preceq\succ}}(Cl_2^3)$, $(x_2,x_1)\in\underline{R_C^{\preceq\succ}}(Cl_2^3)$; 另一方面, 由 $[x_8,x_{10}]_C=\{x_5,x_6,x_8,x_{10}\}$ 可知, $[x_8,x_{10}]_C\subseteq Cl_2^3$ 不成立, 故有 $(x_{10},x_8)\notin\underline{R_C^{\preceq\succ}}(Cl_2^3)$.

命题 3 在序决策信息系统 $S=(U,C\bigcup\{d\},V,f)$ 中, 对于 $\forall B\subseteq C,\forall X\subseteq U$, 有:

1) $\underline{R_B^{\preceq\succ}}(U)=\overline{R_B^{\preceq\succ}}(U)=R_B^{\succeq}$,

2) $\underline{R_B^{\preceq\succ}}(X)\subseteq(X\times X)\bigcap R_B^{\succeq}\subseteq\overline{R_B^{\preceq\succ}}(X)\subseteq R_B^{\succeq}$,

3) $\underline{R_B^{\preceq\succ}}(X)\bigcap R_C^{\succeq}\subseteq\underline{R_C^{\preceq\succ}}(X)$, $\overline{R_C^{\preceq\succ}}(X)\subseteq\overline{R_B^{\preceq\succ}}(X)$.

证明 1) 和 2) 可由定义 3 直接得到.

3) $\forall(x_j,x_i)\in(\underline{R_B^{\preceq\succ}}(X)\bigcap R_C^{\succeq})$, 由定义 3 可得 $[x_i,x_j]_B\subseteq X$, 由命题 2 可得 $[x_i,x_j]_C\subseteq[x_i,x_j]_B$, 故 $[x_i,x_j]_C\subseteq X$, $(x_j,x_i)\in\underline{R_C^{\preceq\succ}}(X)$, 从而可得

$$\underline{R_B^{\preceq\succ}}(X)\bigcap R_C^{\succeq}\subseteq\underline{R_C^{\preceq\succ}}(X).$$

对于 $\forall(x_j,x_i)\in\overline{R_C^{\preceq\succ}}(X)$, 有 $(x_j,x_i)\in R_C^{\succeq}$ 且 $[x_i,x_j]_C\bigcap X\neq\varnothing$. 由 $(x_j,x_i)\in R_C^{\succeq}$ 可得 $(x_j,x_i)\in$

$R_B^{\succ}$. 另一方面, 由命题2中结论1)可得$[x_i,x_j]_C \subseteq [x_i,x_j]_B$, 从而有$[x_i,x_j]_B \bigcap X \neq \varnothing$, 故$(x_j,x_i) \in \overline{R_B^{\prec\succ}}(X)$. 由此可证$\overline{R_C^{\prec\succ}}(X) \subseteq \overline{R_B^{\prec\succ}}(X)$. □

命题3中的结论2)表达了集合X与其I-下近似、I-上近似之间的关系, 而命题3中的结论3)表达了I-下近似与I-上近似关于属性集的单调性.

2.3 区间决策规则

由决策类的并$Cl_s^t = \bigcup_{s \leqslant k \leqslant t} D_k (1 \leqslant s \leqslant t \leqslant r)$的I-下近似和I-上近似可得区间决策规则(又称为"at least and at most"决策规则).

设$B \subseteq C$, 则$(x_j,x_i) \in \underline{R_B^{\prec\succ}}(Cl_s^t)$(或$(x_j,x_i) \in \overline{R_B^{\prec\succ}}(Cl_s^t)$)诱导的确定性(可能性)区间决策规则为

$$\bigwedge_{b \in B}(b(x_i) \leqslant, b, \leqslant b(x_j)) \to (s \leqslant, d, \leqslant t).$$

特别地, 由$(x_j,x_i) \in \underline{R_B^{\prec\succ}}(D_k)$可得具有单一决策值的区间决策规则

$$\bigwedge_{b \in B}(b(x_i) \leqslant, b, \leqslant b(x_j)) \to (d, = k).$$

在表1所示的序决策信息系统中, $(x_2,x_8) \in \underline{R_C^{\prec\succ}}(Cl_2^3)$诱导的确定性区间决策规则为

$$(0.45 \leqslant, c_1, \leqslant 0.90) \bigwedge (0.40 \leqslant, c_2, \leqslant 0.80) \bigwedge$$
$$(0.45 \leqslant, c_3, \leqslant 0.90) \bigwedge (0.55 \leqslant, c_4, \leqslant 0.85) \to$$
$$(2 \leqslant, d, \leqslant 3);$$

$(x_2,x_5) \in \underline{R_C^{\prec\succ}}(Cl_3^3)$诱导的确定性区间决策规则为

$$(0.60 \leqslant, c_1, \leqslant 0.90) \bigwedge (0.65 \leqslant, c_2, \leqslant 0.80) \bigwedge$$
$$(0.70 \leqslant, c_3, \leqslant 0.90) \bigwedge (0.80 \leqslant, c_4, \leqslant 0.85) \to$$
$$(d, = 3).$$

本文将利用基于区间知识颗粒的优势关系粗糙集模型处理序信息系统的方法简记为I-DRSA. 下面对该方法作如下说明.

1) I-DRSA具有更强的适应性, 可计算DRSA所不能得到的决策规则. 举一个简单的例子: 假设在一个序信息系统中$S = (U, C \bigcup \{d\}, V, f)$, 其中$U = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$, $x_1 \prec_C x_2 \prec_C x_3 \prec_C x_4 \prec_C x_5 \prec_C x_6$, $d(x_1) = 4$, $d(x_2) = 2$, $d(x_3) = d(x_4) = 3$, $d(x_5) = 4$, $d(x_6) = 1$, 则有

$$\underline{R_C^{\succ}}(Cl_2^{\succ}) = \underline{R_C^{\succ}}(Cl_3^{\succ}) = \underline{R_C^{\succ}}(Cl_4^{\succ}) = \varnothing,$$
$$\underline{R_C^{\prec}}(Cl_1^{\prec}) = \underline{R_C^{\prec}}(Cl_2^{\prec}) = \underline{R_C^{\prec}}(Cl_3^{\prec}) = \varnothing.$$

由此可见, 利用DRSA无法得到任何规则. 然而, 由$(x_4,x_2) \in \underline{R_C^{\prec\succ}}(Cl_2^3)$和$(x_5,x_2) \in \underline{R_C^{\prec\succ}}(Cl_2^4)$, 并利用I-DRSA可得以下区间决策规则:

$$(x_2 \leqslant_C x \leqslant_C x_4) \to (2 \leqslant d(x) \leqslant 3),$$
$$(x_2 \leqslant_C x \leqslant_C x_5) \to (2 \leqslant d(x) \leqslant 4),$$

它们是数据规律的客观反映.

2) DRSA所得到的"at least"决策规则和"at most"决策规则不能直接应用于序信息系统中对象的分类[12-13, 23-24], 而I-DRSA可以获取具有单一决策值的区间决策规则, 可方便地直接应用于对象的分类.

3 区间的约简、优化区间决策规则

为了优化由$[x_i,x_j]_C \in \underline{R_C^{\prec\succ}}(Cl_s^t)$诱导的决策规则

$$\bigwedge_{b \in B}(b(x_i) \leqslant, b, \leqslant b(x_j)) \to (s \leqslant, d, \leqslant t),$$

需要在保证该规则的决策部分不变的前提下, 尽可能多地去删除该规则的条件部分中的合取项, 得到

$$\bigwedge_{b \in C}(b(x_i) \leqslant, b, \leqslant b(x_j))$$

的一个子公式

$$\bigwedge_{b \in B}(b(x_i) \leqslant, b, \leqslant b(x_j)).$$

显然, 该子公式是由区间$[x_i,x_j]_B$确定的. 由此可见, 要优化区间决策规则, 只需求出满足$d([x_i,x_j]_B) = d([x_i,x_j]_C)$的极小属性子集$B$即可. 考虑到$[x_i,x_j]_C \subseteq [x_i,x_j]_B$, 只要$B$满足$d([x_i,x_j]_B) \subseteq d([x_i,x_j]_C)$即可.

定义 4 设$(x_j,x_i) \in \underline{R_C^{\prec\succ}}(Cl_s^t)$, $B \subseteq C$. 如果B满足$d([x_i,x_j]_B) \subseteq [s,t]$, 则称$B$为$[x_i,x_j]_C$关于$[s,t]$的超约简; 如果$B$为满足$d([x_i,x_j]_B) \subseteq [s,t]$的极小属性子集, 则称$B$为$[x_i,x_j]_C$关于$[s,t]$的约简.

在表1所示的序信息系统中, 有$(x_2,x_8) \in \underline{R_C^{\prec\succ}}(Cl_2^3)$. 对于$B = \{c_1,c_2\}$, 有$[x_8,x_2]_B = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_8\}$, $d([x_8,x_2]_B) \subseteq [2,3]$; 而另一方面, 由于

$$[x_8,x_2]_{\{c_1\}} = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_8,x_{10},x_{12}\},$$
$$[x_8,x_2]_{\{c_2\}} = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{11}\},$$

而$d([x_8,x_2]_{\{c_1\}}) = \{1,2,3,4\}$, $d([x_8,x_2]_{\{c_2\}}) = \{1,2,3,4\}$, 有$d([x_8,x_2]_{\{c_1\}}) \subseteq [2,3]$和$d([x_8,x_2]_{\{c_2\}}) \subseteq [2,3]$都不成立, 故$\{c_1,c_2\}$是$[x_8,x_2]_C$关于$[2,3]$的约简.

定义 5 设$(x_j,x_i) \in \underline{R_C^{\prec\succ}}(Cl_s^t)$, 如果$B$为$[x_i,x_j]_C$关于$[s,t]$的约简, 则

$$\bigwedge_{b \in B}(b(x_i) \leqslant, b, \leqslant b(x_j)) \to (s \leqslant, d, \leqslant t)$$

称为$\bigwedge_{b \in C}(b(x_i) \leqslant, b, \leqslant b(x_j)) \to (s \leqslant, d, \leqslant t)$的优化区间决策规则.

下面将利用区分函数计算区间的约简, 并由此获取优化区间决策规则.

对于$x,y \in U$, 记$\alpha^{\succ}(x,y) = \{b \mid b \in C, b(x) < b(y)\}$, 则$\alpha^{\succ}(x,y)$是能够区分$x$于$y$的支配集的所有属性的集合, 即区分$y$于$x$的被支配集的所有属性的

集合.

定理 1　设 $(x_j, x_i) \in \underline{R_C^{\prec\succ}}(Cl_s^t)$, $B \subseteq C$, 则有: $d([x_i, x_j]_B) \subseteq [s,t] \Leftrightarrow$ 对于满足 $d(y) \notin [s,t]$ 的 y, 有 $\alpha^{\succ}(y, x_i) \bigcap B \neq \varnothing$ 或 $\alpha^{\succ}(x_j, y) \bigcap B \neq \varnothing$.

证明　假设存在 $y_0 \in U$ 满足条件 $d(y_0) \notin [s,t]$, 而有 $\alpha^{\succ}(y_0, x_i) \bigcap B = \varnothing$ 且 $\alpha^{\succ}(x_j, y_0) \bigcap B = \varnothing$, 则对于 $\forall b \in B$, 有 $b \notin \alpha^{\succ}(y_0, x_i)$ 且 $b \notin \alpha^{\succ}(x_j, y_0)$, 从而对于 $\forall b \in B$, 有 $b(y_0) \geqslant b(x_i)$ 且 $b(x_j) \geqslant b(y_0)$, 即 $y_0 \in [x_i, x_j]_B$. 由 $d(y_0) \notin [s,t]$ 可知, $d([x_i, x_j]_B) \subseteq [s,t]$ 不成立, 得到矛盾, 因此定理的必要性成立.

假设 $d([x_i, x_j]_B) \subseteq [s,t]$ 不成立, 则至少存在一个对象 $y_0 \in [x_i, x_j]_B$ 满足 $d(y_0) \notin [s,t]$. 由 $y_0 \in [x_i, x_j]_B$ 可得 $y_0 \in [x_i]_B^{\succ}$ 且 $y_0 \in [x_j]_B^{\prec}$, 从而有 $\forall b \in B$, $b(x_i) \leqslant b(y_0) \leqslant b(x_j)$, 即 $\alpha^{\succ}(y_0, x_i) \bigcap B = \varnothing$ 且 $\alpha^{\succ}(x_j, y_0) \bigcap B = \varnothing$. 注意到 $d(y_0) \notin [s,t]$, 得到矛盾, 因此定理的充分性成立. □

由定理 1, 根据区间约简的定义可得以下命题.

命题 4　B 为区间 $[x_i, x_j]_C$ 关于 $[s,t]$ 的约简, 当且仅当 B 为满足下列条件的极小属性子集: 对于任意满足 $d(y) \notin [s,t]$ 的 y, 有

$$\{\alpha^{\succ}(y, x_i) \bigcup \alpha^{\succ}(x_j, y)\} \bigcap B \neq \varnothing.$$

根据命题 4, 构造以下区分函数来计算区间的约简.

定义 6　对于 $(x_j, x_i) \in \underline{R_C^{\prec\succ}}(Cl_s^t)$, 令

$$\varDelta_s^t([x_i, x_j]_C) = \bigwedge_{d(y) \notin [s,t]} \{[\bigvee \alpha^{\succ}(y, x_i)] \bigvee [\bigvee \alpha^{\succ}(x_j, y)]\}.$$

其中: $\bigwedge$ 为逻辑合取运算, $\bigvee$ 为逻辑析取运算, $\bigvee \alpha^{\succ}(x, y)$ 为 $\alpha^{\succ}(x, y)$ 中所有属性的析取. 本文称 $\varDelta_s^t([x_i, x_j]_C)$ 为 $[x_i, x_j]_C$ 关于 $[s,t]$ 的区分函数.

命题 5　对于 $(x_j, x_i) \in \underline{R_C^{\prec\succ}}(Cl_s^t)$, $B \subseteq C$, B 为区间 $[x_i, x_j]_C$ 关于 $[s,t]$ 的约简, 当且仅当 $\bigwedge_{b \in B} b$ 为 $\varDelta_s^t([x_i, x_j]_C)$ 的极小析取范式中的一个合取项.

例 1　在表 1 所示的序信息系统中, $(x_2, x_8) \in \underline{R_C^{\prec\succ}}(Cl_2^3)$, $(x_2, x_5) \in \underline{R_C^{\prec\succ}}(D_3)$. 由 $[x_8, x_2]_C = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_8\}$ 和 $\{y \mid d(y) \notin [2,3]\} = \{x_7, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}\}$ 可得

$$\begin{aligned}
&\varDelta_2^3([x_8, x_2]_C) = \\
&[(\bigvee \alpha^{\succ}(x_7, x_8)) \bigvee (\bigvee \alpha^{\succ}(x_2, x_7))] \bigwedge \\
&[(\bigvee \alpha^{\succ}(x_9, x_8)) \bigvee (\bigvee \alpha^{\succ}(x_2, x_9))] \bigwedge \\
&[(\bigvee \alpha^{\succ}(x_{10}, x_8)) \bigvee (\bigvee \alpha^{\succ}(x_2, x_{10}))] \bigwedge \\
&[(\bigvee \alpha^{\succ}(x_{11}, x_8)) \bigvee (\bigvee \alpha^{\succ}(x_2, x_{11}))] \bigwedge \\
&[(\bigvee \alpha^{\succ}(x_{12}, x_8)) \bigvee (\bigvee \alpha^{\succ}(x_2, x_{12}))] = \\
&[(c_1 \bigvee c_3 \bigvee c_4) \bigvee \varnothing] \bigwedge [(c_1 \bigvee c_3 \bigvee c_4) \bigvee \varnothing] \bigwedge \\
&[\varnothing \bigvee c_2] \bigwedge [\varnothing \bigvee (c_1 \bigvee c_3 \bigvee c_4)] \bigwedge (c_2 \bigvee c_4) = \\
&(c_1 \bigwedge c_2) \bigvee (c_2 \bigwedge c_3) \bigvee (c_2 \bigwedge c_4).
\end{aligned}$$

由命题 5 可知, $\{c_1, c_2\}$, $\{c_2, c_3\}$ 和 $\{c_2, c_4\}$ 为 $[x_8, x_2]_C$ 关于 $[2,3]$ 的约简. 对应于 3 个约简的优化区间决策规则分别为

$$\begin{aligned}
&(0.45 \leqslant, c_1, \leqslant 0.90) \bigwedge (0.40 \leqslant, c_2, \leqslant 0.80) \rightarrow \\
&(2 \leqslant, d, \leqslant 3), \\
&(0.40 \leqslant, c_2, \leqslant 0.80) \bigwedge (0.45 \leqslant, c_3, \leqslant 0.90) \rightarrow \\
&(2 \leqslant, d, \leqslant 3), \\
&(0.40 \leqslant, c_2, \leqslant 0.80) \bigwedge (0.55 \leqslant, c_4, \leqslant 0.85) \rightarrow \\
&(2 \leqslant, d, \leqslant 3).
\end{aligned}$$

对于 $(x_2, x_5) \in \underline{R_C^{\prec\succ}}(D_3)$, 由 $\{y \mid d(y) \notin [3,3]\} = \{x_1, x_4, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}\}$ 可得

$$\varDelta_3^3([x_5, x_2]_C) = c_2 \bigwedge (c_3 \bigvee c_4) = (c_2 \bigwedge c_3) \bigvee (c_2 \bigwedge c_4).$$

可见 $[x_5, x_2]_C$ 关于 $[3,3]$ 有两个约简: $\{c_2, c_3\}$ 和 $\{c_2, c_4\}$. 由此得到的优化区间决策规则分别为

$$(0.65 \leqslant, c_2, \leqslant 0.80) \bigwedge (0.70 \leqslant, c_3, \leqslant 0.90) \rightarrow (d, = 3),$$

$$(0.65 \leqslant, c_2, \leqslant 0.80) \bigwedge (0.80 \leqslant, c_4, \leqslant 0.85) \rightarrow (d, = 3).$$

4　结　论

本文在序决策信息系统中, 利用“区间”作为基本知识颗粒, 提出了一种新的基于优势关系的粗糙集方法 (I-DRSA). 该方法相比较于 DRSA, I-DRSA 不仅可以处理条件属性与决策属性具有单调性的序决策信息系统, 还可以处理条件属性与决策属性依条件属性的不同取值范围而满足单调性的序决策信息系统. 另外, 从知识颗粒的角度看, “区间”比支配集和被支配集要细, 所以, I-DRSA 能够获得 DRSA 所不能获得的决策规则. 特别地, I-DRSA 能够计算具有单一决策值的序决策规则, 这有助于分类问题的解决.

本文初步给出了基于区间知识颗粒的优势关系粗糙集方法, 并讨论了区间决策规则的优化问题. 需要说明的是, 不同于 Pawlak 粗糙集模型在符号型决策信息系统中所定义的优化决策规则, 优化区间决策规则并不一定是极小区间决策规则, 因此, 下一步的研究工作要在所求出的优化区间决策规则的基础上, 探讨计算极小区间决策规则的方法, 并由此研究序数据的分类问题.

参考文献(References)

[1] Pawlak Z. Rough sets[J]. Int J of Computer and Information Sciences, 1982, 11: 341-356.

[2] Pawlak Z. Rough sets: Theoretical aspects of reasoning about data[M]. London: Kluwer Academic Publishers,

1991.
[3] Pawlak Z, Skowron A. Rough sets and Boolean reasoning[J]. Information Sciences, 2007, 177: 41-73.
[4] Kryszkiewicz M. Rough set approach to incomplete information systems[J]. Information Sciences, 1998, 112: 39-49.
[5] Leung Y, Li D Y. Maximal consistent block technique for rule acquisition in incomplete information system[J]. Information Sciences, 2003, 153: 85-106.
[6] Guan Y Y, Wang H K. Set-valued information systems[J]. Information Sciences, 2006, 176: 2507-2525.
[7] Guan Y Y, Wang H K, Wang Y, et al. Attribute reduction and optimal decision rules acquisition for continuous valued information systems[J]. Information Sciences, 2009, 179: 2974-2984.
[8] Du Y, Hu Q H, Zhu P F, et al. Rule learning for classification based on neighborhood covering reduction[J]. Information Sciences, 2011, 181: 5457-5467.
[9] Hu Q H, Yu D, Xie Z X. Neighborhood classifiers[J]. Expert Systems with Applications, 2008, 34: 866-876.
[10] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. A new rough set approach to evaluation of bankruptcy risk[C]. Operational Tools in the Management of Financial Risks. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998: 121-136.
[11] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. Rough sets theory for multicriteria decision analysis[J]. European J of Operational Research, 2001, 129: 1-47.
[12] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. Rough approximation by dominance relation[J]. Int J of Intelligent Systems, 2002, 17: 153-171.
[13] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. Rough sets methodology for sorting problems in presence of multiple attributes and criteria [J]. European J of Operational Research, 2002, 138: 247-259.
[14] Shao M W, Zhang W X. Dominance relation and rules in an incomplete ordered information system[J]. Int J of Intelligent Systems, 2005, 20: 13-27.
[15] Yang X B, Yang J Y, Wu C, et al. Dominance-based rough set approach and knowledge reduct in incomplete ordered information system [J]. Information Sciences, 2008, 178: 1219-1234.
[16] Yang X B, Xie J, Song X N, et al. Credible rules in incomplete decision system based on descriptors[J]. Knowledge-Based Systems, 2009, 22: 8-17.
[17] Qian Y H, Dang C Y, Liang J Y, et al. Set-valued ordered information systems[J]. Information Sciences, 2009, 179: 2809-2832.
[18] Qian Y H, Liang J Y, Dang C Y. Interval ordered information systems [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2008, 56: 1994-2009.
[19] Yang X B, Yu D J, Yang J T, et al. Dominance-based rough set approach to incomplete interval-valued information system[J]. Data & Knowledge Engineering, 2009, 68(11): 1331-1347.
[20] Huang B. Graded dominance interval-based fuzzy objective information systems[J]. Knowledge-Based Systems, 2011, 24: 1004-1012.
[21] Huang B, Li H X, Wei D K. Dominance-based rough set model in intuitionistic fuzzy information systems[J]. Knowledge-Based Systems, 2012, 28: 115-123.
[22] Huang B, Wei D K, Li H X, et al. Using a rough set model to extract rules in dominance-based interval-valued intuitionistic fuzzy information systems[J]. Information Sciences, 2013, 221: 215-229.
[23] Błaszczynski J, Greco S, Słowinski R. Multi-criteria classification-A new scheme for application of dominance-based decision rules [J]. European J of Operational Research, 2007, 181: 1030-1044.
[24] Błaszczynski J, Greco S, Słowinski R. Inductive discovery of laws using monotonic rules [J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2012, 25: 284-294.

(责任编辑：滕 蓉)