金星对水星的牛顿轨道之摄动

汤克云 [1,2]

1 中国科学院地质与地球物理研究所

2 清华大学天体物理中心

摘要

行星对水星的摄动作用类似于日、月对地球上海水或地壳的潮汐作用。本文以金星对水星的摄动为例，考虑了金星在每一瞬间的摄动作用，计算了金星摄动力对水星轨道的影响。与 Le Verrier 和 Newcomb 将所有的行星轨道都看成质量均匀分布的同心圆环模型相比，本文的论证和计算方法更接近太阳系的实际情况。

关键词 太阳起潮力，地球固体潮，行星摄动，水星轨道进动

The Venus's perturbation to the orbit of Mercury

Keyun Tang [1, 2]

1 Institute of Geology and Geophysics, CAS

2 Center for Astrophysics, Tsinghua University

Abstract

The perturbations of planets to Mercury's orbit are similar to the tidal actions of the Sun and the Moon to seawater or crust of the Earth. By considering Venus's perturbation of every moment, for example, this paper calculates the total deviations of Mercury's orbit for a century due to Venus's perturbation. Comparing to Le Verrier and Newcomb's model, in which all orbits of planets were taken as concentric rings with uniform distribution of mass, our argumentation and calculation method are closer to the actual situations of the solar system.

Keywords: Tidal force of the Sun, the tide of the Earth, perturbation of planets, orbital precession of Mercury

如何求行星对水星的摄动？第一，在物理上，该摄动力类似于地球上海水或地壳受到的日、月潮汐力；第二，将上述行星对水星的摄动力投影到水星轨道平面；第三，再分解为沿瞬时径向（日心指向水星）的摄动力和沿瞬时的角向(水星绕日转动方向）摄动力，分别计算它们对轨道进动的影响。

首先，我们将太阳对地壳的潮汐作用分析清楚；然后，以金星为例，将行星对水星的摄动作用与太阳对地壳的潮汐作用作对比，导出行星对水星轨道的摄动方程。

潮汐作用与摄动作用的对比

	作用物体	被作用物体	基本引力	微扰引力
潮汐作用	太阳	台站附近的地壳	地球对地壳的引力	太阳对地壳及全地球的引力
摄动作用	金星	水星	太阳对水星的引力	金星对水星和太阳的引力

简而言之，日、月潮汐作用是：远程微小引力对由基本引力控制的基本形态的微扰作用；行星的摄动作用是：第三星体引力对由基本引力控制的基本轨道的微扰作用。

一、 引潮力方程（单位质量受到的引潮力，参考赵凯华 罗蔚茵《力学》）

$$\vec{T}_x = \frac{2GMR\cos\theta}{r^3}\vec{e}_x, \qquad \vec{T}_y = -\frac{2GMR\sin\theta}{r^3}\vec{e}_y \tag{1}$$

其中，M为引潮星体（太阳X）的质量，r为主控引力体（地球）中心O至引潮星体（太阳X）的距离--$r = OX$，R为地球中心O至受引潮力作用物体A（如置于台站的重力仪弹簧）的距离--$R = OA$；定义由地心O指向引潮星体（太阳X）中心的方向为X轴正方向，Y轴也在黄道面上，垂直于X轴，按右手螺旋法则定义Y轴的正方向，Z轴垂直于黄道面；θ为$\overline{OX}$与矢径$\overline{OA}$的夹角。

二、 摄动力方程

类似于潮汐力，在X轴和Y轴方向的摄动力为

$$\vec{P}_x = \frac{2G(M+m)R\cos\theta}{r^3}\vec{e}_x, \qquad \vec{P}_y = -\frac{2G(M+m)R\sin\theta}{r^3}\vec{e}_y \tag{2}$$

其中，M为摄动星体（金星X）的质量，r为主控引力体（太阳）中心O至摄动星体（金星X）的距离--$r = OX$，R为太阳中心O至受摄动星体A（水星）的距离--$R = OA$；定义由O指向X的方向为x轴正方向，y轴也在金星轨道面上，垂直于x轴，按右手螺旋法则定义y轴的正方向，Z轴垂直于金星轨道面（如忽略金星轨道倾角的影响，则金星轨道面与黄道重合）；θ为$\overline{OX}$与矢径$\overline{OA}$的夹角。

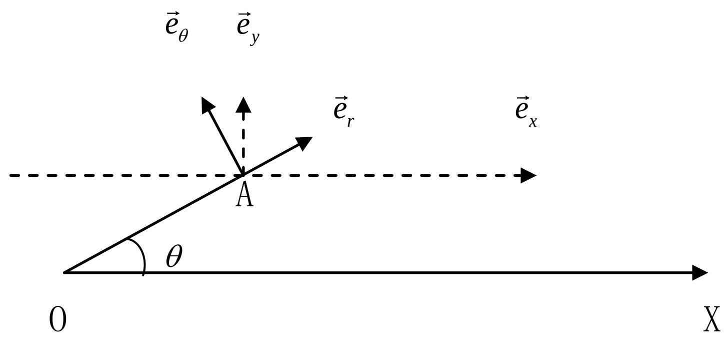

图 1 在金星轨道面中的摄动力

转换至径向（$\overrightarrow{OA}$方向）和角向（垂直于$\overrightarrow{OA}$方向），得

$$\begin{aligned}\vec{P}_r &= \vec{P}_x \cos\theta + \vec{P}_y \sin\theta, \\ \vec{P}_\theta &= -\vec{P}_x \sin\theta + \vec{P}_y \cos\theta\end{aligned} \tag{3}$$

其中，

$$\begin{aligned}\vec{P}_x &= \frac{2G(M+m)R\cos\theta}{r^3}\vec{e}_x, \\ \vec{P}_y &= -\frac{2G(M+m)R\sin\theta}{r^3}\vec{e}_y\end{aligned} \tag{2}$$

考虑到水星轨道相对于黄道面的倾角i，（3）式应修改为

$$\begin{aligned}\vec{P}_r &= (\vec{P}_x \cos\theta + \vec{P}_y \sin\theta)\cos i, \\ \vec{P}_\theta &= (-\vec{P}_x \sin\theta + \vec{P}_y \cos\theta)\cos i\end{aligned} \tag{3A}$$

由于金星轨道相对于黄道面的倾角只有$i_{ven} = 3.395^0$，其$\cos i_{ven} = 0.998 \approx 1$，所以，在计算金星对水星摄动力时，金星轨道倾角的影响可不予考虑。如一定要考虑，也有办法，会变得复杂许多，但与（3A）的差别很小。

现在，我们已获得金星对水星轨道的摄动力在水星轨道平面内的两个分量，水星的径向运动方程分别变为

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{G(M+m)}{2} + P_r \tag{4}$$

或

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{G(M+m)}{r^2}(1+\alpha) \tag{4A}$$

其中

$$\alpha = -\frac{P_r r^2}{G(M+m)} \tag{4B}$$

根据（4A），可知水星受金星摄动的轨道半径与牛顿轨道的关系为

$$r_{NT}=\frac{l^2}{G(M+m)(1+e\cos\theta)},\qquad r=\frac{l^2}{G(M+m)(1+\alpha)(1+e\cos\theta)} \tag{4C}$$

即

$$r=\frac{r_{NT}}{1+\alpha} \tag{4D}$$

其中，r_{NT} 为不计摄动时的牛顿轨道半径。由此径向运动方程和角动量守恒，可得出角速度增量（与牛顿轨道角动量之差）的第一部分：

$$r^2\omega_1=r_{NT}^2\omega_{NT},$$
$$\omega_1=\frac{r_{NT}^2}{r^2}\omega_{NT}=(1+\alpha)^2\omega_{NT}\approx(1+2\alpha)\omega_{NT}$$

即

$$\Delta\omega_1=\omega_1-\omega_{NT}\approx 2\alpha\omega_{NT} \tag{5}$$

同时，水星的角向运动方程变为

$$2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}=P_\theta \tag{6}$$

此运动方程可写成微分形式

$$\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt}=rP_\theta \tag{6A}$$

或

$$\frac{d(r^2\omega_{NT}+r^2\Delta\omega_2)}{dt}=rP_\theta \tag{6A}$$

即

$$\frac{d(r^2\Delta\omega_2)}{dt}=rP_\theta \tag{6B}$$

或写成积分形式

$$r^2\Delta\omega_2=\int rP_\theta dt \tag{6C}$$

这里，r 是水星至太阳的瞬时距离，可按椭圆轨道方程

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi}$$

计算，其中a, e, φ根据依次为半长轴，偏心率和极角。由（6C），可求出水星角速度的第二个增量$\Delta\omega_2$

$$\Delta\omega_2 = \frac{1}{r^2}\int rP_\theta dt \qquad (6D)$$

总的角速度增量为

$$\Delta\omega = \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2 \qquad (7)$$

作 100 年的时间积分，可得出由金星摄动引起的水星轨道的百年进动值为

$$\Delta\theta = \int_0^{100yr} \Delta\omega dt \qquad (8)$$

其它所有行星对水星的摄动作均可按此方法计算。与 Le Verrier 和 Newcomb 将所有的行星轨道都看成质量均匀分布的同心圆环模型相比，本文的论证和计算方法更接近太阳系的实际。

（20150120 初稿， 20150312 修改）