

上海师范大学 2004 年硕士研究生入学考试试题

专业名称 基础数学、应用数学、计算数学、计算机软件与理论

考试科目 数学分析 (337)

(注意: 答案必须写在统一印制的答题纸上, 否则不给分)

一、计算 (8分×6=48分)

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{3x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \left[\frac{1}{x} \right]$$

(3) 设 $f(x)$ 是定义在 $(-1, 1)$ 上的奇函数, $f'(0) = 2$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(-x)}{e^x - 1}$

$$(4) \text{ 求 } \int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$$

$$(5) \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

(6) 设 $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$, $z = uv$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$

二、(10分) 用数列极限的定义 (“ $\varepsilon - N$ ”语言) 证明:

$$\text{若 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a.$$

三、(10分) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} [f(x) - f(\frac{x}{2})] = 0$, 证明: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

四、(8分) 是否存在 $(-\infty, +\infty)$ 上的可导函数 f , 使得

$$\forall x \in (-\infty, +\infty), \text{ 有 } f(f(x)) = x^2 - 3x + 3?$$

五、(18分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内具有二阶导数, 且

$$f(0) = f(1) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

(1) 证明: $\exists \zeta_1 \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使 $f(\zeta_1) = \zeta_1$; $\exists \zeta_2 \in (0, \zeta_1)$, 使 $f'(\zeta_2) = 1$.

(2) 证明: $\exists \zeta_3 \in (0, \zeta_2)$, 使 $f'(\zeta_3) + \zeta_3 f''(\zeta_3) = 1$.

(3) 若 $f(x)$ 在 $x = \zeta_3$ 处取到极值, 问: $f(\zeta_3)$ 是极大值还是极小值?

085

六、(12分) 设非空数集 E 的上确界为 β , $\beta < +\infty$ 且存在 $x_0 \in E$, 使得 $x_0 > 0$.

令 $F = \left\{ \frac{2n}{n+1}x \mid n \in \mathbb{N}, x \in E \right\}$, 证明: $\sup F = 2\beta$

七、(12分) 计算积分 $I = \int_0^1 \left[\int_0^{\frac{1}{y^3}} y^{-\frac{2}{3}} \cos \frac{\pi(x^2 - 2x + 1)}{2} dx \right] dy$

八、(10分) 设函数 f 具有连续导数, $f(0) = a$, 讨论下列极限的存在性:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi t^4} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) dx dy dz$$

九、(12分) 设函数 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有连续的导数, 计算

$$I = \int_L \frac{1+y^2 f(xy)}{y} dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy, \text{ 其中 } L \text{ 是从点 } A(3, \frac{2}{3}) \text{ 到点}$$

$B(1, 2)$ 的直线段。

十、(10分) 试确定 α 的取值范围, 使函数列 $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx^2}$ 在区间 $[0, 1]$ 上一致收敛。