# 2002 年全国硕士研究生入学统一考试（数学一）试题及答案解析

绝密★启用前

## 数学(试卷一)参考解答

一. 填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.)

(1) $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x} = \underline{\ 1\ }$.

(2) 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定,则 $y''(0)=\underline{\ -2\ }$.

(3) 微分方程 $yy''+y'^2=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1$, $y'\big|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 的特解是 $\underline{\ y=\sqrt{x+1}\ }$

$\underline{\ 或\ y^2=x+1\ }$.

(4) 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 可化成标准形 $f=6y_1^2$,则 $a=\underline{\ 2\ }$.

(5) 设随机变量 $X$ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$,且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为$\frac{1}{2}$,则 $\mu=\underline{\ 4\ }$.

二. 选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.)

(1) 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面 4 条性质:

①$f(x,y)$ 在点$(x_0,y_0)$ 处连续, ②$f(x,y)$ 在点$(x_0,y_0)$ 处的两个偏导数连续,

③$f(x,y)$ 在点$(x_0,y_0)$ 处可微, ④$f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处的两个偏导数存在.

若用“$P\Rightarrow Q$” 表示可由性质 $P$ 推出性质 $Q$,则有

(A) ②⇒③⇒①. (B) ③⇒②⇒①.

(C) ③⇒④⇒①. (D) ③⇒①⇒④. 【 A 】

(2) 设 $u_n\neq 0(n=1,2,3,\cdots)$,且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}})$

(A) 发散. (B) 绝对收敛.

(C) 条件收敛. (D) 收敛性根据所给条件不能判定. 【 C 】

(3) 设函数 $y=f(x)$ 在$(0,+\infty)$ 内有界且可导,则

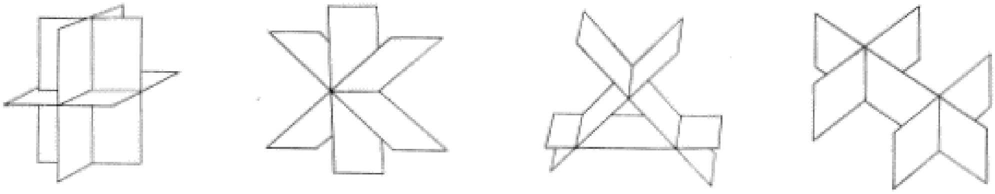
(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(C) 当$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$ 时,必有$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$.

(D) 当$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$ 存在时,必有$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$. 【 B 】

(4) 设有三张不同平面的方程 $a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = b_i, i = 1,2,3$，它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为 2，则这三张平面可能的位置关系为 【 B 】



(A) (B) (C) (D)

(5) 设 $X_1$ 和 $X_2$ 是任意两个相互独立的连续型随机变量，它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，则

(A) $f_1(x) + f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

(B) $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

(C) $F_1(x) + F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

(D) $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数. 【 D 】

**三.（本题满分 6 分）**

设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内具有一阶连续导数，且 $f(0) \neq 0, f'(0) \neq 0$，若 $af(h) + bf(2h) - f(0)$ 在 $h \to 0$ 时是比 $h$ 高阶的无穷小，试确定 $a, b$ 的值.

**解法 1** 由题设条件知

$$\lim_{h \to 0}[af(h) + bf(2h) - f(0)] = (a + b - 1)f(0) = 0.$$

由于 $f(0) \neq 0$，故必有 $a + b - 1 = 0$.

又由洛必达法则，有

$$0 = \lim_{h \to 0} \frac{af(h) + bf(2h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{af'(h) + 2bf'(2h)}{1} = (a + 2b)f'(0),$$

因 $f'(0) \neq 0$，故 $a + 2b = 0$.

于是得 $a = 2, b = -1$.

**解法 2** 由条件得

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + o(h),$$

$$f(2h) = f(0) + 2f'(0)h + o(h),$$

所以 $af(h)+bf(2h)-f(0)=(a+b-1)f(0)+(a+2b)f'(0)h+o(h)$.

因此当 $a=2$, $b=-1$ 时,有

$$af(h)+bf(2h)-f(0)=o(h).$$

**四.(本题满分 7 分)**

已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x} e^{-t^2}dt$ 在点$(0,0)$处的切线相同,写出此切线方程,并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nf(\frac{2}{n})$.

**解** 由已知条件得

$$f(0)=0,$$

$$f'(0)=\left.\frac{e^{-(\arctan x)^2}}{1+x^2}\right|_{x=0}=1,$$

故所求切线方程为 $y=x$.

$$\lim_{n\to\infty} nf(\frac{2}{n})=\lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}}$$

$$=2f'(0)=2.$$

**五.(本题满分 7 分)**

计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$,其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1\}$.

**解** 设 $D_1=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant x\}$,

$D_2=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant1,x\leqslant y\leqslant1\}$,

则 $$\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy=\iint\limits_{D_1}e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy+\iint\limits_{D_2}e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_1}e^{x^2}dxdy+\iint\limits_{D_2}e^{y^2}dxdy$$

$$=\int_0^1dx\int_0^x e^{x^2}dy+\int_0^1dy\int_0^y e^{y^2}dx$$

$$= \int_0^1 xe^{x^2}dx + \int_0^1 ye^{y^2}dy$$

$$= e - 1.$$

六.（本题满分 8 分）

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有一阶连续导数，$L$ 是上半平面（$y>0$）内的有向分段光滑曲线，其起点为 $(a,b)$，终点为 $(c,d)$. 记 $I = \int_L \frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]dx + \frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy$,

(1) 证明曲线积分 $I$ 与路径 $L$ 无关；

(2) 当 $ab = cd$ 时，求 $I$ 的值.

(1) **证** 因为

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\right\} = f(xy) - \frac{1}{y^2} + xyf'(xy) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\right\}$$

在上半平面内处处成立，所以在上半平面内曲线积分 $I$ 与路径无关.

(2) **解法 1** 由于 $I$ 与路径无关，故可取积分路径 $L$ 为由点 $(a,b)$ 到点 $(c,b)$ 再到点 $(c,d)$ 的折线段，所以

$$I = \int_a^c \frac{1}{b}[1+b^2f(bx)]dx + \int_b^d \frac{c}{y^2}[y^2f(cy)-1]dy$$

$$= \frac{c-a}{b} + \int_a^c bf(bx)dx + \int_b^d cf(cy)dy + \frac{c}{d} - \frac{c}{b}$$

$$= \frac{c}{d} - \frac{a}{b} + \int_{ab}^{bc} f(t)dt + \int_{bc}^{cd} f(t)dt$$

$$= \frac{c}{d} - \frac{a}{b} + \int_{ab}^{cd} f(t)dt.$$

当 $ab = cd$ 时，$\int_{ab}^{cd} f(t)dt = 0$，由此得 $I = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$.

(2) **解法 2** $I = \int_L \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} + \int_L yf(xy)dx + xf(xy)dy$,

$$\int_L \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}.$$

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int_L yf(xy)dx + xf(xy)dy = \int_L f(xy)d(xy) = F(cd) - F(ab).$$

所以当 $ab = cd$ 时，$F(cd) - F(ab) = 0$，由此得 $I = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$.

**七. （本题满分 7 分）**

（1）验证函数 $y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots\ (-\infty<x<+\infty)$ 满足微分方程 $y''+y'+y=e^x$；

（2）利用（1）的结果求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

**解** （1）因为

$$y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots,$$

$$y'(x)=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots+\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\cdots,$$

$$y''(x)=x+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\cdots,$$

所以

$$y''+y'+y=e^x.$$

（2）与 $y''+y'+y=e^x$ 相应的齐次微分方程为

$$y''+y'+y=0,$$

其特征方程为

$$\lambda^2+\lambda+1=0,$$

特征根为 $\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$. 因此齐次微分方程的通解为

$$Y=e^{-\frac{x}{2}}\left[C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right].$$

设非齐次微分方程的特解为

$$y^*=Ae^x,$$

将 $y^*$ 代入方程 $y''+y'+y=e^x$ 得 $A=\frac{1}{3}$，于是

$$y^*=\frac{1}{3}e^x,$$

方程通解为

$$y=Y+y^*=e^{-\frac{x}{2}}\left[C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]+\frac{1}{3}e^x.$$

当 $x=0$ 时，有

$$\begin{cases}y(0)=1=C_1+\frac{1}{3},\\ y'(0)=0=-\frac{1}{2}C_1+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2+\frac{1}{3};\end{cases}$$

由此，得 $C_1 = \frac{2}{3}$，$C_2 = 0$.

于是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数为

$$y(x) = \frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{3}e^{x} \qquad (-\infty < x < +\infty).$$

**八.（本题满分 7 分）**

设有一小山，取它的底面所在的平面为 $xOy$ 坐标面，其底部所占的区域为 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 - xy \leqslant 75\}$，小山的高度函数为 $h(x,y) = 75 - x^2 - y^2 + xy$.

（1）设 $M(x_0,y_0)$ 为区域 $D$ 上一点，问 $h(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大？若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$，试写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式.

（2）现欲利用此小山开展攀岩活动，为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点. 也就是说，要在 $D$ 的边界线 $x^2 + y^2 - xy = 75$ 上找出使（1）中的 $g(x,y)$ 达到最大值的点. 试确定攀登起点的位置.

**解** （1）由梯度的几何意义知，$h(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处沿梯度

$$\mathrm{grad}h(x,y)\big|_{(x_0,y_0)} = (y_0 - 2x_0)\boldsymbol{i} + (x_0 - 2y_0)\boldsymbol{j}$$

方向的方向导数最大，方向导数的最大值为该梯度的模，所以

$$g(x_0,y_0) = \sqrt{(y_0 - 2x_0)^2 + (x_0 - 2y_0)^2} = \sqrt{5x_0^2 + 5y_0^2 - 8x_0y_0}.$$

（2）令 $f(x,y) = g^2(x,y) = 5x^2 + 5y^2 - 8xy$，

由题意，只需求 $f(x,y)$ 在约束条件 $75 - x^2 - y^2 + xy = 0$ 下的最大值点.

令 $L(x,y,\lambda) = 5x^2 + 5y^2 - 8xy + \lambda(75 - x^2 - y^2 + xy)$，则

$$\begin{cases} L'_x = 10x - 8y + \lambda(y - 2x) = 0, & ① \\ L'_y = 10y - 8x + \lambda(x - 2y) = 0, & ② \\ L'_\lambda = 75 - x^2 - y^2 + xy = 0. & ③ \end{cases}$$

① 式与 ② 式相加可得 $(x + y)(2 - \lambda) = 0$，

从而得 $y = -x$ 或 $\lambda = 2$.

若 $\lambda = 2$，则由 ① 式得 $y = x$，再由 ③ 式得 $x = \pm 5\sqrt{3}$，$y = \pm 5\sqrt{3}$.

若 $y = -x$，则由 ③ 式得 $x = \pm 5$，$y = \mp 5$.

于是得到 4 个可能的极值点

$M_1(5,-5)$，$M_2(-5,5)$，$M_3(5\sqrt{3},5\sqrt{3})$，$M_4(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3})$.

由于 $f(M_1) = f(M_2) = 450$,

$f(M_3) = f(M_4) = 150$,

故 $M_1(5, -5)$ 或 $M_2(-5,5)$ 可作为攀登的起点.

**九.（本题满分 6 分）**

已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 4 维列向量,其中 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关, $\boldsymbol{\alpha}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3$. 如果 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4$,求线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解.

**解法 1** 令 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$,则由 $\boldsymbol{Ax} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\beta}$ 得

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 + x_4\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4,$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3$ 代入上式,整理后得

$$(2x_1 + x_2 - 3)\boldsymbol{\alpha}_2 + (-x_1 + x_3)\boldsymbol{\alpha}_3 + (x_4 - 1)\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{0}.$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,知

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3 = 0, \\ -x_1 + x_3 = 0, \\ x_4 - 1 = 0. \end{cases}$$

解此方程组得

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\text{其中 } k \text{ 为任意常数}.$$

**解法 2** 由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关和 $\boldsymbol{\alpha}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3 + 0\boldsymbol{\alpha}_4$,故 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3,因此 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系中只包含一个向量.

由

$$\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + 0\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{0}$$

知 $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个解,所以其通解为

$$\boldsymbol{x} = k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ k \text{ 为任意常数}.$$

再由

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

知$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解，于是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}，\text{其中 } k \text{ 为任意常数}.$$

十.（本题满分 8 分）

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵，

（1）如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似，试证 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征多项式相等.

（2）举一个二阶方阵的例子说明（1）的逆命题不成立.

（3）当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为实对称矩阵时，试证（1）的逆命题成立.

**证** （1）若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似，那么存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，故

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|&=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}|=|\boldsymbol{P}^{-1}\lambda\boldsymbol{EP}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}|\\&=|\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P}^{-1}||\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}|\\&=|\boldsymbol{P}^{-1}||\boldsymbol{P}||\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|.\end{aligned}$$

（2）令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，那么

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^2=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|,$$

但 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 不相似. 否则，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O},$$

从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{POP}^{-1}=\boldsymbol{O}$，矛盾.

（3）由 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为实对称矩阵知，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均相似于对角阵.

若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征多项式相等，记特征多项式的根为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，则有

$$\boldsymbol{A}\text{ 相似于}\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix},$$

$$B \text{ 也相似于} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

即存在可逆矩阵 $P, Q$ 使

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = Q^{-1}BQ.$$

于是

$$(PQ^{-1})^{-1}A(PQ^{-1}) = B.$$

由 $PQ^{-1}$ 为可逆矩阵知，$A$ 与 $B$ 相似.

**十一.（本题满分 7 分）**

设随机变量 $X$ 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0 \le x \le \pi, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

对 $X$ 独立地重复观察 4 次，用 $Y$ 表示观察值大于$\frac{\pi}{3}$的次数，求 $Y^2$ 的数学期望.

**解法 1** 由于

$$P\{X > \frac{\pi}{3}\} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2},$$

$$Y \sim B(4, \frac{1}{2}),$$

因此

$$EY = 4 \times \frac{1}{2} = 2,\ DY = 4 \times \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{2}) = 1,$$

所以 $\quad EY^2 = DY + (EY)^2 = 1 + 2^2 = 5.$

**解法 2** 由于

$$P\{X > \frac{\pi}{3}\} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2},$$

$$Y \sim B(4, \frac{1}{2}),$$

因此，$Y$ 的概率分布为

| $Y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{4}{16}$ | $\frac{6}{16}$ | $\frac{4}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

所以，$EY^2 = \frac{1}{16}(0\times 1 + 1\times 4 + 2^2\times 6 + 3^2\times 4 + 4^2\times 1) = 5.$

**十二.（本题满分 7 分）**

设总体 $X$ 的概率分布为

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\theta^2$ | $2\theta(1-\theta)$ | $\theta^2$ | $1-2\theta$ |

其中 $\theta(0<\theta<\frac{1}{2})$ 是未知参数，利用总体 $X$ 的如下样本值

3，1，3，0，3，1，2，3，

求 $\theta$ 的矩估计值和最大似然估计值.

**解** $EX = 0\times\theta^2 + 1\times 2\theta(1-\theta) + 2\times\theta^2 + 3\times(1-2\theta) = 3-4\theta,$

$$\bar{x} = \frac{1}{8}\times(3+1+3+0+3+1+2+3) = 2.$$

令 $EX=\bar{x}$，即 $3-4\theta=2$，

解得 $\theta$ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=\frac{1}{4}$.

对于给定的样本值，似然函数为

$$L(\theta) = 4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4.$$

$$\ln L(\theta) = \ln 4 + 6\ln\theta + 2\ln(1-\theta) + 4\ln(1-2\theta),$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = \frac{6}{\theta} - \frac{2}{1-\theta} - \frac{8}{1-2\theta} = \frac{6-28\theta+24\theta^2}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)},$$

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$，解得

$$\theta_{1,2} = \frac{7\pm\sqrt{13}}{12}.$$

因 $\frac{7+\sqrt{13}}{12} > \frac{1}{2}$ 不合题意，所以 $\theta$ 的最大似然估计值为

$$\hat{\theta} = \frac{7-\sqrt{13}}{12}.$$