# 计算 π(x)的另一精确函数—Lihn(x)

李海南　　广西柳州

Lihn188@163.com

**摘要：** 本文通过对比的方法，推导出一个更简洁、更易于描述素数分布特征，同时精确度更高的求解小于或等于 x 的素数个数 π(x)的表达式 Lihn(x)，同时证明了两个结果：（1）$\pi(x) = Lihn(x)+ O(\sqrt{x}/\log x)$ . （2）$Li(x) > Lihn(x) + O(\sqrt{x}/\log x)$。结果（2）表明英国数学家 John- Littlewood 在 1904 年证明的 “Li(x)-π(x) 是一个在正与负之间震荡无穷多次的函数”的结论是错误的。

**关键词：** 连续转折线　　素数轴

## 前言

寻找素数的分布真相是人们长久以来至今不懈努力的目标，大家期盼能找到一个表达简洁、易于描述素数分布特征，同时精确度高的求解小于或等于 x 的素数个数 π(x)的精确表达式。在将要介绍新发现的关于求解小于或等于 x 的素数个数 π(x)的另一精确表达式 Lihn(x)之前，这里先简述前人的一些研究结果。

## 第一节　简述 Li(x)和 R(x)

稍对素数有兴趣的人都会知道数学家 Gauss 发现的素数分布的一个重要

公式一素数定理： $\pi(x) \sim x/\log x$ 或者更精确的

$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x)$ 其中：$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u}$

素数定理是简洁的，如果用语言来描述则是：小于或等于 x 的素数的分布密度接近相应 x 的对数函数的倒数。但它对于素数分布的描述仍然是比较粗略的，它给出的只是素数分布的一个渐近形式 — 也就是当 x 趋于无穷时的分布形式。从 附表 1 中我们可以看到： $\pi(x)$ 与 $\mathrm{Li}(x)$ 之间是有偏差的，而且这种偏差的绝对值随着 x 的增加有持续增加的趋势。

为了描述这种偏差的程度，人们采用了带误差余项的素数定理的形式：

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O$$

目前为止：在 Riemann 猜想成立的假定条件下 Von Koch 在 1901 年证明了素数定理带有误差余项的最好结果是下面公式：

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(\sqrt{x} \cdot \log x)$$

而一般认为，素数定理误差项的阶估计最理想可能不会低于 $O(\sqrt{x}/\log x)$。我们从附表 2 中的 $\pi(x)-\mathrm{Li}(x)$的数据可看出 $\mathrm{Li}(x)$是不可能让表达式：$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(\sqrt{x}/\log x)$ 总是成立。

那么有没有一个可以比素数定理更精确地表达素数个数的公式呢？

德国数学家 Riemann 另辟捷径，在通过研究 Riemamn$\zeta(s)$函数时引入 $J(x)$ 这个特殊的阶梯函数使其与素数的分布联系在一起，从而提出了求解素数个数的更精确表达式：

$$\pi(x) \sim R(x) = \mathrm{Li}(x) - \sum_{\rho} \mathrm{Li}(x^{\rho}) - \ln 2 + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\ln t}$$

附表 1 的数据表明：R(x)的精确度是很高的。但由于 R(x)仍然没有摆脱 R(x) =Li(x)+ O 的形式，所以其最好的误差项 O 肯定不能让表达式：π(x) ～R(x) = Li(x)+ $O(\sqrt{x}/\log x)$总是成立，同时人们还是不知道该如何用语言来表达 R(x)对素数分布的描述。

## 第二节 Lihn(x)的推导过程

总结表达式 Li(x)和 R(x)不难发现，这两个表达式虽各有优缺点，却都不能全部满足前面提到的人们所期盼的表达简洁、易于描述及精确度高这三点要求。那么到底存在不存在能满足这三个标准的表达形式呢？下面是这个表达式 Lihn(x)的推导过程：

新公式推出的前提条件是：素数定理必须成立，由于

π(x) ～ x/log x 及

π(x) ～ Li(x) 成立

如果找到一个函数 Lihn（x），并且能证明：

x/log(x) < Lihn(x) < Li(x) 在 x → +∞ 范围内成立

则 π(x) ～ Lihn（x） 也成立

下面先分析：π(x) ～ x/log x

由于 1/logx 是递减函数,所以当 x → +∞ 时，在$n^2 \sim (n+1)^2$的区间里显然：

$$\frac{(n+1)^2}{\log(n+1)^2}-\frac{n^2}{\log n^2} < \frac{(n+1)^2}{\log(n+1)^2}-\frac{n^2}{\log(n+1)^2}$$

$$\frac{(n+1)^2}{\log(n+1)^2}-\frac{n^2}{\log n^2} < \frac{2n+1}{\log(n+1)^2} \approx \frac{n}{\log(n+1)}$$

所以有 $\frac{(n+1)^2}{\log(n+1)^2}-\frac{n^2}{\log n^2} < \frac{n}{\log(n+1)}$ 成立

换句话说有：$\frac{x}{\log x} < \frac{n}{\log(n+1)}$ (1)式成立

再分析 $\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u}$ 同样由于$\frac{1}{\log x}$是递减函数，且当 $x \to +\infty$时，

在$n^2 \sim (n+1)^2$的区间里显然有下式成立：

$$\frac{(n+1)^2-n^2}{\log(n+1)^2} < \int \frac{1}{\log x}dx < \frac{(n+1)^2-n^2}{\log(n)^2}$$

从而有 $\frac{n}{\log(n+1)} < \frac{(n+1)^2-n^2}{\log(n+1)^2} < \int \frac{1}{\log x}dx$ 成立

也就是 $\frac{n}{\log(n+1)} < \int \frac{1}{\log x}dx$ (2)式成立

结合式（1）和式（2）可以得出结论：当 $x \to +\infty$时，在 $n^2 \sim (n+1)^2$ 的区间里：

有 $\frac{1}{\log x} < \frac{n}{\log(n+1)} < \int \frac{1}{\log x}dx$ 成立

同样道理在 $(n-1)^2 \sim n^2$ 的区间里:

有 $\frac{1}{\log x} < \frac{n-1}{\log(n)} < \int \frac{1}{\log x}dx$ 成立

…… ……

…… ……

在 $3^2 \sim 4^2$ 的区间里:

有 $\frac{1}{\log x} < \frac{3}{\log 4} < \int \frac{1}{\log x} dx$ 成立

在 $2^2 \sim 3^2$ 的区间里:

有 $\frac{1}{\log x} < \frac{2}{\log 3} < \int \frac{1}{\log x} dx$ 成立

以上可以看出这明显是由 $x \to +\infty$ 倒推的一个例子，接下来在区间:$1^2 \sim 2^2$ 里尽管在 1～e～4 时 $\log^{-1}(x)$ 的递增递减性出现转折，但已不影响表达式 Lihn（x）的推出了，至此显然，如果设：

$$\mathrm{Lihn}(x) = \frac{1}{\log 2} + \frac{2}{\log 3} + \frac{3}{\log 4} + \cdots + \frac{n}{\log(n+1)}$$

亦即 $\mathrm{Lihn}(x) = \sum_1^n \frac{n}{\log(n+1)}$

那么则当 $x \to (n+1)^2$ 时 ：

x/log(x) < Lihn(x) < Li(x) 是成立的

从而 π（x）～ Lihn（x） 也成立

所以 $\pi(x) \sim \mathrm{Lihn}(x) = \sum_1^n \frac{n}{\log(n+1)}$

Lihn（x）明显是一条连续的转折线，转折点在：$1^2$ $2^2$ $3^2$ $4^2$ …… $(n-1)^2$ $n^2$ $(n+1)^2$……

这容易让我们得出结论：**素数的分布接近一条连续转折线。**

而对于任何的 x，由于都存在一个整数 n，使得 $n^2 \leqq x \leqq (n+1)^2$ 成立，显然可以如下修正 Lihn（x）:

$$\mathrm{Lihn}(x) = \sum_1^n \frac{(n-1)}{\log n} + \frac{x-n^2}{2n+1} \times \frac{n}{\log(n+1)}$$

这也就是 Lihn（x）的最终表达式。

## 第三节 Lihn（x）的余项估计

通过计算 Lihn（x），附表 1 和附表 2 的数据显示，Lihn（x）的精确度是非常理想的，但它的精确程度是多少呢？就是说如果设：

$\pi(x)=\mathrm{Lihn}(x)+O$ 那么这个余项 O 应该怎么估计呢？

以下是一个推测：

表达式 Lihn（x）的形式很容易给人产生一个联想，假如我们把这条连续转折线当作一条轴线，并称之为**素数轴**，那么这条**素数轴**和正实数轴 x 相比之下会有什么相似和不同吗？

我们试按如下的性质作一比较：

1、 区间和间隔值

正实数轴 x 是从：$0\to1\to2\to3\to\cdots\to(n-1)\to n\to\cdots\to+\infty$

可以看出，它的每一个区间的间隔值都是 1，因此整数（点）是等距离出现在正实数轴 x 上的。

而 Lihn（x）则是从：$1^2\to2^2\to3^2\to\cdots\to(n-1)^2\to n^2\to\cdots\to+\infty$

它的各区间的间隔值却是：

$$\frac{1}{\log2}\to\frac{2}{\log3}\to\frac{3}{\log4}\cdots\frac{n-1}{\log n}\to\frac{n}{\log(n+1)}\cdots\to\infty$$

而素数（点）则是环绕出现在 Lihn（x）轴线上下。

2、 四舍五入

众所周知有一个四舍五入的概念。

如果纯粹从数学概念的取整角度出发，那么在正实数轴上，因为对于任何的 x,存在 n≦x≦n+1， 若设不大于 x 以内的整数(点)的个数为 Z（x)，则可得到求取整数（点）个数的公式 ：

$$Z(x) = \sum_1^n 1 \times n^0 + (x - n) + O(0.5 \times 1)$$

(0.5 则是半个区间的间隔值)

而对于 Lihn（x)，同样对于任何 x,存在 $n^2 \leqq x \leqq (n+1)^2$ 那么

$$Lihn(x) = \sum_1^n \frac{(n-1)}{\log n} + \frac{x - n^2}{2n+1} \times \frac{n}{\log(n+1)}$$

那么会不会有：π(x) = Lihn（x）+ O(0.5×n / log ( n+1 )) 成立?

（这里的 0.5×n / log ( n+1 )是 x 值所在区间的半个间隔值）

实际上当 x→+∞时 0.5×n / log ( n+1 ) ≈ 0.5×n / log n = $\sqrt{x}$/log x

所以能否推测 Lihn(x) 带余项 O 可用下式表达?

$$\pi(x) = Lihn(x) + O(\sqrt{x}/\log x)$$

如果这个结果成立，那么由于 **Li(x) ＞ Lihn(x) + O($\sqrt{x}$/log x)**

就可以质疑英国数学家 John Littlewood 在 1904 年证明的 “Li(x)-π(x) 是一个在正与负之间震荡无穷多次的函数”这一结论的正确性。

证明：**Li(x) ＞ Lihn(x) + O($\sqrt{x}$/log x)**

如前面所说对于 Li(x) = $\int_2^x \frac{du}{\log u}$ 由于$\frac{1}{\log x}$是递减函数，且当 x → +∞

时，在$n^2 \sim (n+1)^2$的区间里显然有下式成立：

$$\frac{(n+1)^2-n^2}{\log(n+1)^2} < \int \frac{1}{\log u}du < \frac{(n+1)^2-n^2}{\log n^2}$$

$$\frac{n}{\log(n+1)} + \frac{1}{\log(n+1)^2} < \int \frac{1}{\log u}du$$

同理在$(n-1)^2 \sim n^2$ 的区间里有下式成立：

$$\frac{n-1}{\log n} + \frac{1}{\log n^2} < \int \frac{1}{\log u}du$$

……

同理在 $3^2$～ $4^2$ 的区间里有下式成立：

$$\frac{3}{\log 4} + \frac{1}{\log 4^2} < \int \frac{1}{\log u}du$$

同理在 $2^2$～ $3^2$ 的区间里有下式成立：

$$\frac{2}{\log 3} + \frac{1}{\log 3^2} < \int \frac{1}{\log u}du$$

同理在 $1^2$～ $2^2$的区间里有下式成立：

$$\frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 2^2} < \int \frac{1}{\log u}du$$

当 X 从 $(n+1)^2 \to 1$ 时，显然有下式成立：

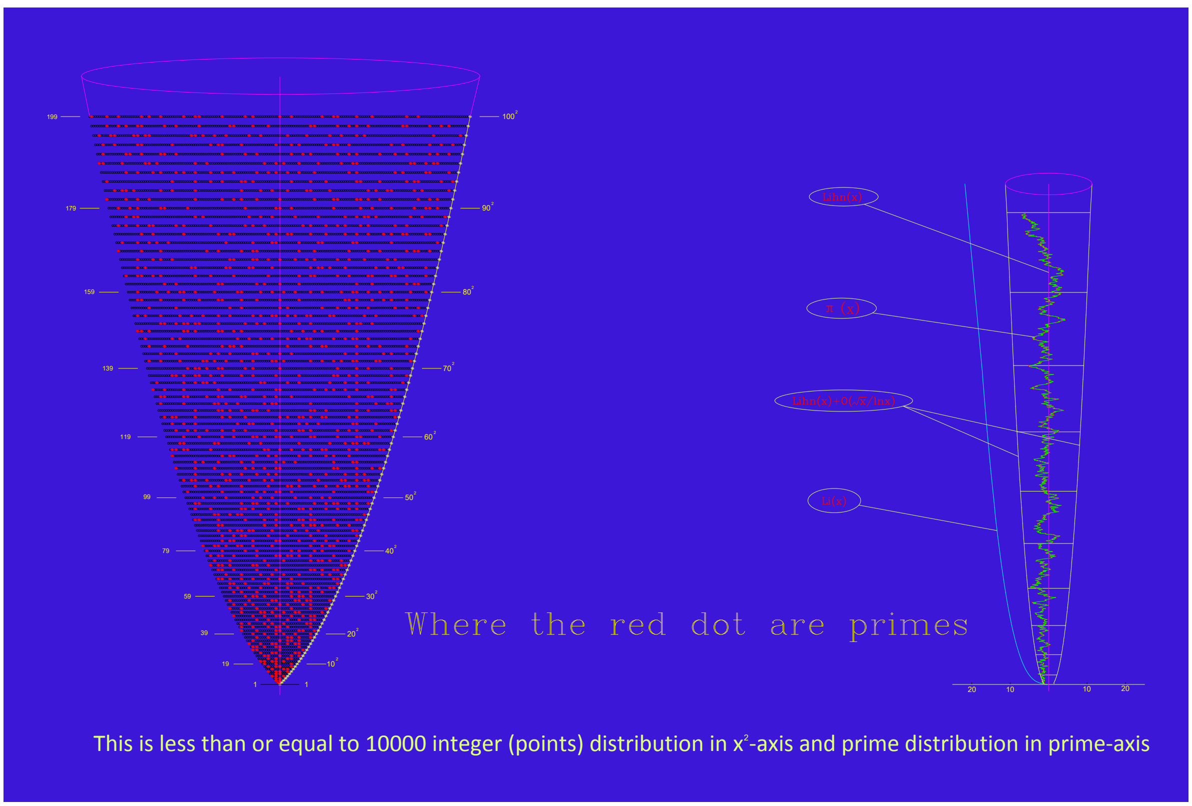
$$\left(\frac{n}{\log(n+1)}+\frac{n-1}{\log n}+\cdots+\frac{3}{\log 4}+\frac{2}{\log 3}+\frac{1}{\log 2}\right)+\left(\frac{1}{\log(n+1)^2}+\frac{1}{\log n^2}+\cdots+\frac{1}{\log 3^2}+\frac{1}{\log 2^2}\right)<\int\frac{1}{\log u}du$$

$$\sum_{1}^{n}\frac{n}{\log(n+1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log(n+1)}+\frac{1}{\log n}+\cdots+\frac{1}{\log 3}+\frac{1}{\log 2}\right)<\int\frac{1}{\log u}du$$

$$\mathrm{Lihn}(x)+\frac{1}{2}\times\frac{n}{\log(n+1)}<\int\frac{1}{\log u}du$$

$$\mathrm{Lihn}(x)+\frac{\sqrt{x}}{\log x}<\mathrm{Li}(x)$$

所以 $\mathrm{Li}(x) > \mathbf{Lihn(x) + O(\sqrt{x}/\log x)}$ 是成立




This is less than or equal to 10000 integer (points) distribution in $x^2$-axis and prime distribution in prime-axis

# 附表 1

| $10^n$ | π（x） | Lihn（x） | R（x） | Li（x） |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 3 | 3 | 6 |
| 2 | 25 | 24 | 24 | 30 |
| 3 | 168 | 167 | 168 | 178 |
| 4 | 1229 | 1225 | 1227 | 1246 |
| 5 | 9592 | 9584 | 9597 | 9630 |
| 6 | 78498 | 78521 | 78469 | 78620 |
| 7 | 664579 | 664650 | 664491 | 664918 |
| 8 | 5761455 | 5761504 | 5761358 | 5762209 |
| 9 | 50847534 | 50847325 | 50847613 | 50849235 |
| 10 | 455052511 | 455050326 | 455054339 | 455055615 |
| 11 | 4118054813 | 4118051513 | 4118057131 | 4118066401 |
| 12 | 37607912018 | 37607907843 | 37607913494 | 37607950281 |
| 13 | 346065536839 | 346065523619 | 346065542612 | 346065645810 |
| 14 | 3204941750802 | 3204941710983 | 3204941770002 | 3204942065692 |
| 15 | 29844570422669 | 29844570438534 | 29844570349451 | 29844571475288 |
| 16 | 279238341033925 | 279238341200675 | 279238340706873 | 279238344248557 |
| 17 | 2623557157654233 | 2623557156605724 | 2623557158252488 | 2623557165610022 |
| 18 | 24739954287740860 | 24739954282971400 | 24739954291242226 | 24739954309690415 |
| 19 | 234057667276344607 | 234057667296623000 | 234057667252460274 | 234057667376222382 |
| 20 | 2220819602560918840 | 2220819602545840000 | 2220819602565810665 | 2220819602783663484 |
| 21 | 21127269486018731928 | 21127269485895700000 | 21127269486105164132 | 21127269486616126182 |
| 22 | 201467286689315906290 | 201467286688539000000 | 201467286689443038955 | 201467286691248261498 |

说明：1、 由于计算是使用了 Visual Basic 程序设计语言软件，计算结果的精度只能限定在该语言的最好精度——双精度型范围里（在 VB 中规定了双精度型浮点数精度为 16 位）。所以 n 在 $10^{18}$～$10^{22}$ 的范围里的计算结果只能精确到 15 位，后面用 0 补齐，但实际误差数和相应的数据相比已经微不足道了。

2、 附表 1 除了 Lihn（x）是用 VB 软件计算外，其余的 π（x）、R（x）和 Li（x）的数据均来自网上下载，这是目前能找到的最大的素数表数据，期望能找到更大的数据来进行比较。

# 附表 2

| $10^n$ | π（x） | π（x）-Lihn（x） | π（x）-R（x） | π（x）-Li（x） | $\sqrt{x}$/logx |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 1 | 1 | -2 | 1 |
| 2 | 25 | 1 | 1 | -5 | 2 |
| 3 | 168 | 1 | 0 | -10 | 4 |
| 4 | 1229 | 4 | 2 | -17 | 10 |
| 5 | 9592 | 8 | -5 | -38 | 27 |
| 6 | 78498 | -23 | 29 | -130 | 72 |
| 7 | 664579 | -71 | 88 | -339 | 196 |
| 8 | 5761455 | -49 | 97 | -754 | 542 |
| 9 | 50847534 | 209 | -79 | -1701 | 1525 |
| 10 | 455052511 | 2185 | -1828 | -3104 | 4342 |
| 11 | 4118054813 | 3300 | -2318 | -11588 | 12485 |
| 12 | 37607912018 | 4175 | -1476 | -38263 | 36191 |
| 13 | 346065536839 | 13220 | -5773 | -108971 | 105643 |
| 14 | 3204941750802 | 39819 | -19200 | -314890 | 310210 |
| 15 | 29844570422669 | -15865 | 73218 | -1052619 | 915573 |
| 16 | 279238341033925 | -166750 | 327052 | -3214632 | 2714340 |
| 17 | 2623557157654233 | 1048509 | -598255 | -7956589 | 8078586 |
| 18 | 24739954287740860 | 4769400 | -3501366 | -21949555 | 24127471 |
| 19 | 234057667276344607 | -20278000 | 23884333 | -99877775 | 72282091 |
| 20 | 2220819602560918840 | 15070000 | -4891825 | -222744644 | 217147241 |
| 21 | 21127269486018731928 | 123000000 | -86432204 | -597394254 | 653980827 |
| 22 | 201467286689315906290 | 776000000 | -127132665 | -1932355208 | 1974065827 |

说明：1、同样的原因，π（x）- Lihn（x）在 $10^{18}$～$10^{22}$ 的范围里的结果在后几位数有误差的用 0 补齐，但实际误差数和相应的数据相比已经微不足道了。

2、表中也清楚表明了 Lihn（x）、R（x）和 Li（x）与π（x）相比较的误差是否满足 $\sqrt{x}$/logx。