

基于模型依赖平均驻留时间的线性切换系统 有限时间 H_∞ 控制

王通^{1a}, 王青^{1a}, 李玮², 董朝阳^{1b}

(1. 北京航空航天大学, a. 自动化科学与电气工程学院, b. 航空科学与工程学院, 北京 100191; 2. 中国舰船研究院, 北京 100192)

摘要: 针对一类具有有界干扰的线性切换系统研究其有限时间鲁棒控制问题. 基于模型依赖平均驻留时间, 提出了系统有限时间有界且具有 H_∞ 性能指标的充分条件, 与传统方法中系统具有单一平均驻留时间不同, 各切换子系统具有各自的平均驻留时间, 因而降低了设计的保守性. 进一步, 将切换系统的有限时间状态反馈控制器设计转化为具有线性矩阵不等式约束的优化问题. 数值算例和仿真对比表明, 所提出的方法增加了切换律设计的自由度.

关键词: 鲁棒控制; 线性切换系统; 有限时间有界; 模型依赖平均驻留时间

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Finite-time H_∞ control for switched linear systems based on mode-dependent average dwell time

WANG Tong^{1a}, WANG Qing^{1a}, LI Wei², DONG Chao-yang^{1b}

(1a. School of Automation Science and Electrical Engineering, 1b. School of Aeronautic Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China; 2. China Ship Research and Development Academy, Beijing 100192, China. Correspondent: LI Wei, E-mail: liwei@asee.buaa.edu.cn)

Abstract: Considering switched linear systems with norm-bounded disturbances, the finite-time robust control problem is studied. Based on mode-dependent average dwell time, the sufficient condition is provided to guarantee the finite-time boundedness and H_∞ performance of the switched system. Compared with the single average dwell time scheme, the presented condition reduces the conservatism as each subsystem has its own average dwell time. The design algorithm of finite-time robust state feedback controllers is proposed in the form of an optimal problem involving linear matrix inequalities. A numerical example and contrastive simulations show that the freedom degree of switching signal design is increased by using the proposed method.

Keywords: robust control; switched linear system; finite-time boundedness; mode-dependent average dwell time

0 引言

切换系统模型可以用于描述大量实际工程问题, 如电力系统、动力控制系统和飞行控制系统等, 近年来, 其稳定性分析和控制器设计研究吸引了大批学者^[1-5]. 在进行切换系统的稳定性分析时, 传统方法通常以 Lyapunov 渐近稳定理论为基础. 但是, 渐近稳定只适于描述系统在无限长时间内的动态性能, 而工程实际通常要求系统状态在一定时间内满足指标要求. 在许多实际应用中, 往往因为系统在一段时间上具有较差的暂态性能 (如超调过大、控制饱和等) 而在工程上无法应用^[6].

有限时间稳定的提出为研究系统在给定时间区间上的暂态性能提供了一条途径, 近年来受到了广泛关注. 在线性系统的有限时间稳定理论研究方面, 国内外学者完成了大量工作^[5-9]. 文献 [7-8] 分别针对连续时间和离散时间线性时变系统分析了有限时间稳定条件, 并给出了有限时间镇定输出反馈控制器设计方法. 文献 [9] 进一步研究了连续线性系统在有界干扰情况下满足有限时间有界和 H_∞ 性能指标的条件.

针对线性切换系统的有限时间控制问题, 文献 [10] 针对一类非线性离散时间切换系统, 研究了系统在任意切换下有限时间有界的充分条件, 设计了有限

收稿日期: 2014-04-14; 修回日期: 2014-08-29.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61273083).

作者简介: 王通(1987-), 男, 博士生, 从事切换控制的研究; 王青(1968-), 女, 教授, 博士生导师, 从事网络控制等研究.

时间 H_∞ 镇定控制器. 文献[11]针对切换时滞系统研究了系统有限时间有界且具有加权 L_2 增益的充分条件. 文献[12]考虑子系统和控制器异步切换的情况, 研究了异步切换系统的有限时间稳定条件.

上述研究在分析切换系统的有限时间有界条件时大多采用平均驻留时间 (ADT) 方法, 相比于公共类 Lyapunov 函数方法保守性更小. 但是, 要求整个系统具有单一的平均驻留时间也给切换信号的设计带来了不便, 当系统在多个子系统之间反复切换时, 各系统中类 Lyapunov 函数的衰减速率不同, 这时要求系统保持同一个平均驻留时间也是不必要的.

如果针对各个子系统设计各自的平均驻留时间, 则有可能进一步降低设计的保守性. 文献[13-14]提出了模型依赖平均驻留时间 (MDADT) 的概念, 并将其应用于切换系统的稳定性分析. 本文以此为基础, 进一步研究基于模型依赖平均驻留时间方法的切换系统有限时间有界分析和控制器设计问题.

1 问题提出

考虑如下连续线性切换系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{\sigma(t)}x(t) + G_{\sigma(t)}w(t), \\ z(t) &= C_{\sigma(t)}x(t) + H_{\sigma(t)}w(t). \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 为系统状态向量; $z(t) \in \mathbf{R}^m$ 为被调输出向量; $w(t) \in \mathbf{R}^l$ 为外部干扰向量且满足

$$\int_0^T w^\top(\tau)w(\tau)d\tau < d^2; \quad (2)$$

$\sigma(t): [0, +\infty) \rightarrow \Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ 为切换律, 有限集合 Ω 为系统模型指标集; $T > 0$ 为考虑的有限时间段; $d > 0$ 为一正常数.

定义 1 对于线性切换系统 (1), 给定正数 c_1 、 c_2 、 T , 且 $c_2 > c_1$, 以及正定矩阵 R , 在切换信号 $\sigma(t)$ 作用下, 若有

$$x^\top(0)Rx(0) \leq c_1 \Rightarrow x^\top(t)Rx(t) < c_2, \quad \forall t \in [0, T], \quad (3)$$

则称切换系统 (1) 关于 $(c_1, c_2, T, R, d, \sigma)$ 有限时间有界.

进一步, 考虑如下的连续线性切换系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t) + G_{\sigma(t)}w(t), \\ z(t) &= C_{\sigma(t)}x(t) + D_{\sigma(t)}u(t) + H_{\sigma(t)}w(t). \end{aligned} \quad (4)$$

本文考虑的有限时间 H_∞ 控制问题可以归纳为寻找如下形式的切换状态反馈控制器:

$$u(t) = K_{\sigma(t)}x(t), \quad (5)$$

使得: 1) 闭环切换系统有限时间有界; 2) 在零初始条件下, 对于满足式 (2) 的任意非零干扰 $w(t)$, 系统被调输出均满足

$$\int_0^t z^\top(\tau)z(\tau)d\tau < \gamma^2 \int_0^t w^\top(\tau)w(\tau)d\tau, \quad \forall t \in [0, T], \quad (6)$$

其中 $\gamma > 0$ 为系统的 H_∞ 性能指标.

下面给出模型依赖平均驻留时间的定义.

定义 2^[13] 对于切换律 $\sigma(t)$ 及任意的 $T > t \geq 0$, 令 $N_{\sigma_i}(t, T)$ 表示在区间 (t, T) 上第 i 个子系统被激活的次数, 令 $T_i(t, T)$ 表示在区间 (t, T) 上第 i 个子系统被激活的总时间, 其中 $i \in \Omega$. 如果存在非负整数 N_{0i} 和正数 τ_{ai} , 使得

$$N_{\sigma_i}(t, T) \leq N_{0i} + \frac{T_i(t, T)}{\tau_{ai}}, \quad \forall T > t \geq 0, \quad (7)$$

则称 $\sigma(t)$ 具有模型依赖平均驻留时间 τ_{ai} .

2 主要结果

定理 1 针对系统 (1), 如果对于 $\forall (i, j) \in \Omega \times \Omega$, $i \neq j$, 以及给定的常数 $\alpha_i \geq 0$, $\mu_i > 1$, 存在 $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, 以及适维正定对称矩阵 \tilde{Q}_i , 使得

$$\begin{bmatrix} A_i\tilde{Q}_i + \tilde{Q}_iA_i^\top - \alpha_i\tilde{Q}_i & G_i \\ G_i^\top & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (8)$$

$$\tilde{Q}_i < \mu_j\tilde{Q}_j, \quad (9)$$

$$\lambda_1 I < Q_i < \lambda_2 I, \quad (10)$$

且系统在任意切换信号 $\sigma(t)$ 下的模型依赖平均驻留时间均满足

$$\tau_{ai} > \tau_{ai}^* = \frac{T \ln \mu_i}{\ln c_2 - \ln \xi - \alpha_i T}. \quad (11)$$

其中: $\tilde{Q}_i = R^{-1/2}Q_iR^{-1/2}$, $\xi = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}c_1 + \lambda_2d^2$. 则系统关于 $(c_1, c_2, T, R, d, \sigma)$ 有限时间有界.

证明 针对切换系统 (1) 的各个子系统及其对应时间段 $[t_k, t_{k+1})$, 选取如下分段 Lyapunov-like 函数:

$$V(x(t)) = x^\top(t)\tilde{Q}_{\sigma(t_k)}^{-1}x(t), \quad (12)$$

同时设 t_k 时刻第 s 个子系统被激活, 则有

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) - \alpha_s V(x(t)) - w^\top(t)w(t) = \\ \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Pi_1 & \tilde{Q}_{\sigma(t_k)}^{-1}G_{\sigma(t_k)} \\ G_{\sigma(t_k)}^\top \tilde{Q}_{\sigma(t_k)}^{-1} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $\Pi_1 = A_{\sigma(t_k)}^\top \tilde{Q}_{\sigma(t_k)}^{-1} + \tilde{Q}_{\sigma(t_k)}^{-1}A_{\sigma(t_k)} - \alpha_s \tilde{Q}_{\sigma(t_k)}^{-1}$.

用 $\text{diag}(\tilde{Q}_i^{-1}, I)$ 对不等式 (8) 作全等变换, 可得

$$\begin{bmatrix} A_i^\top \tilde{Q}_i^{-1} + \tilde{Q}_i^{-1}A_i - \alpha_i \tilde{Q}_i^{-1} & \tilde{Q}_i^{-1}G_i \\ G_i^\top \tilde{Q}_i^{-1} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (14)$$

因此

$$\dot{V}(x(t)) - \alpha_s V(x(t)) < w^\top(t)w(t), \quad (15)$$

即

$$\frac{d}{dt}(e^{-\alpha_s t}V(x(t))) < e^{-\alpha_s t}w^\top(t)w(t). \quad (16)$$

对式 (16) 两边从 t_k 到 t 积分, 有

$$\begin{aligned}
 & e^{-\alpha_s t} V(x(t)) - e^{-\alpha_s t_k} V(x(t_k)) < \\
 & \int_{t_k}^t e^{-\alpha_s \tau} w^T(\tau) w(\tau) d\tau < \\
 & e^{-\alpha_s t_k} \int_{t_k}^t w^T(\tau) w(\tau) d\tau, \tag{17}
 \end{aligned}$$

即

$$V(x(t)) < e^{\alpha_s(t-t_k)} \left(V(x(t_k)) + \int_{t_k}^t w^T(\tau) w(\tau) d\tau \right). \tag{18}$$

由式(9)易知, 在切换时刻 t_k , 有

$$V(x(t_k)) < \mu_{\sigma(t_k)} V(x(t_k^-)) = \mu_s V(x(t_k^-)), \tag{19}$$

其中 $V(x(t_k^-))$ 表示在 t_k 时刻系统切换之前的 Lyapunov-like 函数, 因此可得

$$V(x(t)) < e^{\alpha_s(t-t_k)} \left(\mu_s V(x(t_k^-)) + \int_{t_k}^t w^T(\tau) w(\tau) d\tau \right). \tag{20}$$

对于时间段 $[0, T]$ 内的任意时刻 t , 令 $N_{\sigma_i}(0, t)$ 表示 $[0, t]$ 内第 i 个子系统被激活的次数, 且不失一般性, 令 $N_{0i} = 0$, 在 $[0, t]$ 内反复应用式(20), 可得

$$\begin{aligned}
 & V(x(t)) < \\
 & \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i T_i(0, t) \right\} \prod_{i=1}^n \mu_i^{N_{\sigma_i}(0, t)} \left(V(x(0)) + \right. \\
 & \left. \int_0^t w^T(\tau) w(\tau) d\tau \right) < \\
 & \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i T_i(0, t) + \sum_{i=1}^n \ln \mu_i \frac{T_i(0, t)}{\tau_{ai}} \right\} \left(V(x(0)) + \right. \\
 & \left. \int_0^t w^T(\tau) w(\tau) d\tau \right) < \\
 & \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\alpha_i + \frac{\ln \mu_i}{\tau_{ai}} \right) T_i(0, t) \right\} (V(x(0)) + d^2). \tag{21}
 \end{aligned}$$

又由 Lyapunov-like 函数定义可知

$$\begin{aligned}
 & V(x(0)) = x^T(0) \tilde{Q}_{\sigma(0)}^{-1} x(0) = \\
 & x^T(0) R^{1/2} Q_{\sigma(0)}^{-1} R^{1/2} x(0) < \frac{1}{\lambda_1} x^T(0) R x(0), \tag{22}
 \end{aligned}$$

同理可得

$$V(x(t)) > \frac{1}{\lambda_2} x^T(t) R x(t). \tag{23}$$

综合式(11)、(21)~(23), 则有

$$\begin{aligned}
 & x^T(t) R x(t) < \\
 & \lambda_2 \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\alpha_i + \frac{\ln \mu_i}{\tau_{ai}} \right) T_i(0, t) \right\} \times \\
 & \left(\frac{1}{\lambda_1} x^T(0) R x(0) + d^2 \right) < \\
 & \lambda_2 \exp \left\{ \sum_{i=1}^n T_i(0, t) \frac{\ln c_2 - \ln \xi}{T} \right\} \times \\
 & \left(\frac{1}{\lambda_1} x^T(0) R x(0) + d^2 \right) < \\
 & \lambda_2 \frac{c_2}{\xi} \left(\frac{1}{\lambda_1} c_1 + d^2 \right) = c_2. \tag{24}
 \end{aligned}$$

由此定理得证. \square

定理2 针对系统(1), 如果对于 $\forall(i, j) \in \Omega \times \Omega$,

$i \neq j$, 以及给定的常数 $\alpha_i \geq 0, \mu_i > 1$, 存在 $\lambda_2 > 0, \gamma \in (0, 1)$, 以及适维正定对称矩阵 Q_i 使得

$$\begin{bmatrix} \Pi_2 & G_i + \tilde{Q}_i C_i^T H_i \\ G_i^T + H_i^T C_i \tilde{Q}_i & -\gamma^2 I + H_i^T H_i \end{bmatrix} < 0, \tag{25}$$

$$\tilde{Q}_i < \mu_j \tilde{Q}_j, \tag{26}$$

$$0 < Q_i < \lambda_2 I, \tag{27}$$

且系统在任意切换信号 $\sigma(t)$ 下的模型依赖平均驻留时间均满足

$$\tau_{ai} > \tau_{ai}^* = \frac{T \ln \mu_i}{\ln c_2 - \ln \lambda_2 - 2 \ln d - \alpha_i T}. \tag{28}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \Pi_2 &= A_i \tilde{Q}_i + \tilde{Q}_i A_i^T - \alpha_i \tilde{Q}_i + \tilde{Q}_i C_i^T C_i \tilde{Q}_i, \\
 \tilde{Q}_i &= R^{-1/2} Q_i R^{-1/2}.
 \end{aligned}$$

则系统关于 $(0, c_2, T, R, d, \sigma)$ 有限时间有界, 且具有 H_∞ 性能指标 $\gamma^2 = \frac{c_2}{\lambda_2 d^2} \gamma^2$.

证明 注意到

$$\begin{bmatrix} \tilde{Q}_i C_i^T C_i \tilde{Q}_i & \tilde{Q}_i C_i^T H_i \\ H_i^T C_i \tilde{Q}_i & H_i^T H_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_i C_i^T \\ H_i^T \end{bmatrix} [C_i \tilde{Q}_i \quad H_i] \geq 0, \tag{29}$$

因此式(25)蕴含着

$$\begin{bmatrix} A_i \tilde{Q}_i + \tilde{Q}_i A_i^T - \alpha_i \tilde{Q}_i & G_i \\ G_i^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \tag{30}$$

在定理1中令 $c_1 = 0$, 可知式(25)~(28)可以保证系统关于 $(0, c_2, T, R, d, \sigma)$ 有限时间有界. 以下只需证明式(6)成立. 仿照定理1的证明, 选取如式(12)的 Lyapunov-like 函数, 设 t_k 时刻第 s 个子系统被激活, 则在与其对应的时间段 $[t_k, t_{k+1})$ 内, 可以证得

$$\begin{aligned}
 & V(x(t)) < \\
 & \mu_s e^{\alpha_s(t-t_k)} V(x(t_k^-)) + \\
 & e^{\alpha_s t} \int_{t_k}^t e^{-\alpha_s \tau} (\gamma^2 w^T(\tau) w(\tau) - z^T(\tau) z(\tau)) d\tau, \tag{31}
 \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}
 & V(x(t)) < \\
 & \mu_s e^{\alpha_s(t-t_k)} V(x(t_k^-)) + \\
 & e^{\alpha_s(t-t_k)} \int_{t_k}^t \gamma^2 w^T(\tau) w(\tau) d\tau - \\
 & \int_{t_k}^t z^T(\tau) z(\tau) d\tau < \dots < \\
 & \prod_{i=1}^n \mu_i^{N_{\sigma_i}(0, t)} \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i T_i(0, t) \right\} V(x(0)) + \\
 & \prod_{i=1}^n \mu_i^{N_{\sigma_i}(0, t)} \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i T_i(0, t) \right\} \Xi_1 - \Xi_2. \tag{32}
 \end{aligned}$$

其中

$$\Xi_1 = \int_0^t \gamma^2 w^T(\tau)w(\tau)d\tau, \quad \Xi_2 = \int_0^t z^T(\tau)z(\tau)d\tau.$$

考虑到系统初始状态为零, 即 $V(x(0)) = 0$, 且 $V(x(t)) > 0$, 同时综合式 (28) 可得

$$\begin{aligned} & \int_0^t z^T(\tau)z(\tau)d\tau < \\ & \prod_{i=1}^n \mu_i^{N_{\sigma_i}(0,t)} \exp\left\{\sum_{i=1}^n \alpha_i T_i(0,t)\right\} \Xi_1 < \\ & \prod_{i=1}^n \mu_i^{T_i(0,t)/\tau_{ai}} \exp\left\{\sum_{i=1}^n \alpha_i T_i(0,t)\right\} \Xi_1 < \\ & \exp\left\{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\ln c_2 - \ln \lambda_2 - 2 \ln d}{T}\right) T_i(0,t)\right\} \Xi_1 = \\ & \bar{\gamma}^2 \int_0^t w^T(\tau)w(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (33)$$

由此定理得证. \square

在定理 2 的基础上, 考虑系统 (4) 的状态反馈控制问题, 可以得到如下的系统有限时间控制设计结论.

定理 3 针对系统 (4), 如果对于 $\forall(i, j) \in \Omega \times \Omega$, $i \neq j$, 以及给定的常数 $\alpha_i \geq 0$, $\mu_i > 1$, 存在 $\lambda_2 > 0$, $\gamma \in (0, 1)$, 以及适维正定对称矩阵 Q_i 和适维矩阵 L_i , 使得

$$\begin{bmatrix} \Pi_3 & G_i & \tilde{Q}_i C_i^T + L_i^T D_i^T \\ G_i^T & -\gamma^2 I & H_i^T \\ C_i \tilde{Q}_i + D_i L_i & H_i & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (34)$$

$$\tilde{Q}_i < \mu_j \tilde{Q}_j, \quad (35)$$

$$0 < Q_i < \lambda_2 I, \quad (36)$$

且系统在任意切换信号 $\sigma(t)$ 下的模型依赖平均驻留时间均满足

$$\tau_{ai} > \tau_{ai}^* = \frac{T \ln \mu_i}{\ln c_2 - \ln \lambda_2 - 2 \ln d - \alpha_i T}. \quad (37)$$

其中

$$\Pi_3 = A_i \tilde{Q}_i + \tilde{Q}_i A_i^T - \alpha_i \tilde{Q}_i + B_i L_i + L_i^T B_i^T,$$

$$\tilde{Q}_i = R^{-1/2} Q_i R^{-1/2}.$$

则切换状态反馈控制器 $u(t) = K_i x(t) = L_i \tilde{Q}_i^{-1} x(t)$ 使得闭环切换系统关于 $(0, c_2, T, R, d, \sigma)$ 有限时间有界, 且具有 H_∞ 性能指标 $\bar{\gamma}^2 = \frac{c_2}{\lambda_2 d^2} \gamma^2$.

证明 在切换状态反馈控制器 $u(t) = K_{\sigma(t)} x(t)$ 作用下, 闭环切换系统可写为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A_{\sigma(t)} + B_{\sigma(t)} K_{\sigma(t)})x(t) + G_{\sigma(t)} w(t), \\ z(t) &= (C_{\sigma(t)} + D_{\sigma(t)} K_{\sigma(t)})x(t) + H_{\sigma(t)} w(t). \end{aligned} \quad (38)$$

根据定理 2 以及 Schur 补引理易得定理 3 结论. \square

注 1 为保证有限时间概念和驻留时间不矛盾, 模型依赖平均驻留时间 τ_{ai}^* 需满足 $0 < \tau_{ai}^* < T$, 该条件可由

$$c_2 > \mu_i \lambda_2 d^2 e^{\alpha_i T} \quad (39)$$

保证. 条件 (39) 是关于 λ_2 的线性矩阵不等式, 可以作

为求解控制器时的约束条件.

注 2 在具体的求解计算中, 利用定理 3 条件所得的可行解并不能保证满足 γ 和 τ_{ai}^* 的要求, 因此, 需将其转化为具有线性矩阵不等式组约束的优化问题. 考虑到 τ_{ai}^* 无法作为线性矩阵不等式的决策变量, 且 τ_{ai}^* 随 λ_2 的减小而减小, 故该优化问题可转化为

$$\begin{aligned} & \min \quad \gamma^2 + \lambda_2, \\ & \text{s.t. 式 (34) } \sim \text{(36) and (39)}. \end{aligned} \quad (40)$$

注 3 对于待定参数 α_i 和 μ_i , 可以通过遗传算法进行参数寻优, 相应的适应度函数可选为

$$J_{\text{fit}} = \sum_{i=1}^n \tau_{ai}^* + \bar{\gamma}^2. \quad (41)$$

3 仿真实验

考虑一个具有 3 个子系统的连续线性切换系统, 其子系统矩阵如下:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.2 & 2.6 & -3.7 \\ -1.4 & -2.1 & 4.6 \\ 15.3 & 0.4 & -2.2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -3.3 & 2.5 & -3.1 \\ 2.9 & -0.5 & 0 \\ 1.3 & 7.3 & 4.6 \end{bmatrix};$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1.7 & 2.9 & -0.7 \\ -9.7 & 2.6 & 1.8 \\ 5.3 & 0 & -0.2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -4.1 & 1.1 & -3.4 \\ 3.5 & -2.7 & 0 \\ 0.8 & 1.3 & 2.5 \end{bmatrix};$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.9 & -3.6 \\ 8.7 & -1.1 & 0.2 \\ 3.1 & 1.2 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} -0.2 & 1.9 & -6.1 \\ -7.6 & -4.9 & 0.4 \\ 0.3 & 3.2 & 7.7 \end{bmatrix};$$

$$C_i = D_i = I_{3 \times 3}, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$G_i = H_i = 0.1 \times I_{3 \times 3}, \quad i = 1, 2, 3.$$

取 $R = I_{3 \times 3}$, $d = 1$, $c_2 = 30$, $T = 10$. 利用注 2 和注 3 中的方法求解上述算例, 所得计算结果如下:

$$\alpha_1 = 0.0108, \quad \alpha_2 = 0.0125, \quad \alpha_3 = 0.0251,$$

$$\mu_1 = 1.0268, \quad \mu_2 = 1.0102, \quad \mu_3 = 1.0219,$$

$$\lambda_2 = 19.0791, \quad \gamma = 0.1337,$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -149.93 & -284.96 & -180.35 \\ -391.21 & -726.31 & -460.84 \\ -115.26 & -223.14 & -142.43 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -139.38 & -267.49 & -169.09 \\ -0.6531 & 1.2628 & 1.1098 \\ 28.620 & -61.879 & -39.971 \end{bmatrix},$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 388.99 & 735.56 & 465.95 \\ 30.371 & 62.4279 & 39.5430 \\ -155.05 & -305.20 & -194.21 \end{bmatrix}.$$

进一步计算可得系统的模型依赖平均驻留时间分别为 $\tau_{a1}^* = 0.7661$, $\tau_{a2}^* = 0.3085$, $\tau_{a3}^* = 1.0742$, H_∞ 性能指标为 $\bar{\gamma}^2 = 0.0281$. 为验证本文方法的优

势,应用平均驻留时间方法设计状态反馈控制器和切换律条件,两种方法的设计结果对比如表1所示.

表1 两种方法的设计结果

切换方案	ADT	MDADT
λ_2	11.9890	19.0791
γ	0.1335	0.1337
H_∞ 性能指标 $\bar{\gamma}^2$	0.0446	0.0281
平均驻留时间/s	$\tau_a^* = 1.1232$	$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{a1}^* = 0.7661 \\ \tau_{a2}^* = 0.3085 \\ \tau_{a3}^* = 1.0742 \end{array} \right.$

采用这两种方法的控制器,对各个子系统分别进行状态调节过程仿真,各状态量的仿真初值均为1. 仿真结果如图1所示.可以看出,各子系统在两种控制器作用下的响应趋势大体一致,模型依赖平均驻留时间方法对应的过渡过程更快.各子系统之间相比,子系统2的调节过程振幅更大,性能更差.

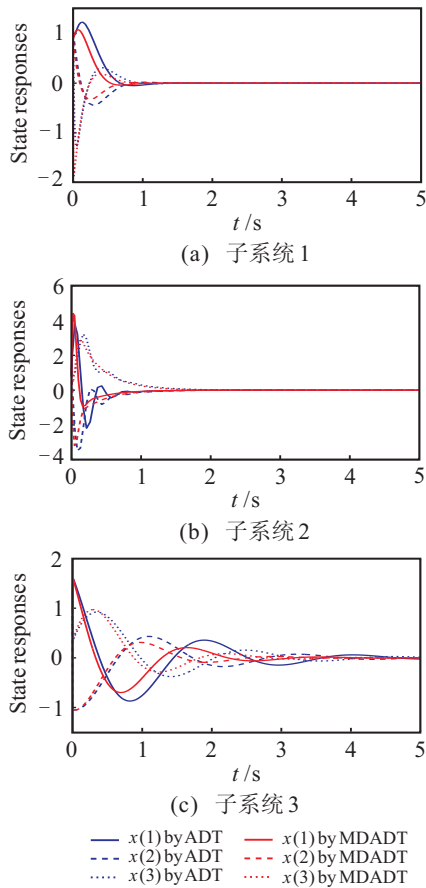


图1 子系统在不同控制器下的状态响应

在此基础上,针对表1所示的两种驻留时间条件设计切换律 $\sigma_A(t)$ 和 $\sigma_M(t)$,分别对应ADT方法和MDADT方法,并分别进行闭环切换系统仿真.系统的有界外部干扰向量均取为 $w(t) = [0.5 \sin t, 0.5 \cos t, 0.5(\sin t + \cos t)]^T$. 如图2(a)所示,针对ADT方法,切换律 $\sigma_A(t)$ 在10s内切换8次,即 $\tau_a = 1.25$ s. 各状态量的初值分别取为5和0,系统状态响应分别如图2(b)和图2(c)所示.

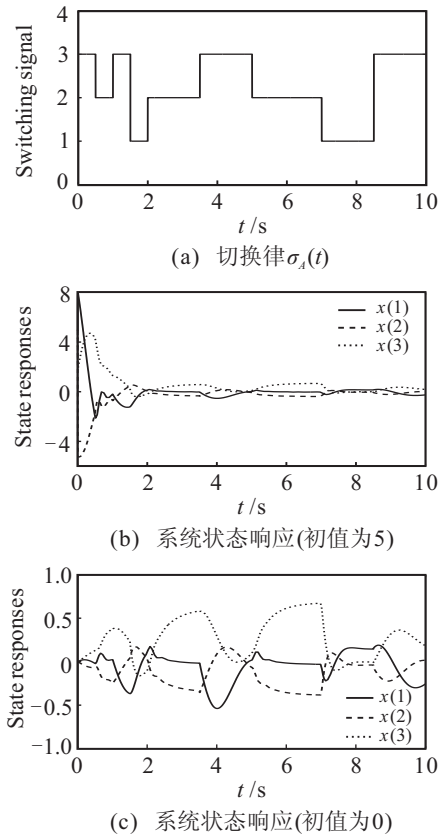


图2 平均驻留时间方法对应的仿真结果

如图3(a)所示,针对MDADT方法,切换律 $\sigma_M(t)$ 在10s内切换12次.其中:子系统1被激活3次,共持续2.5s,即 $\tau_{a1} = 0.83$ s;子系统2被激活4次,共持续

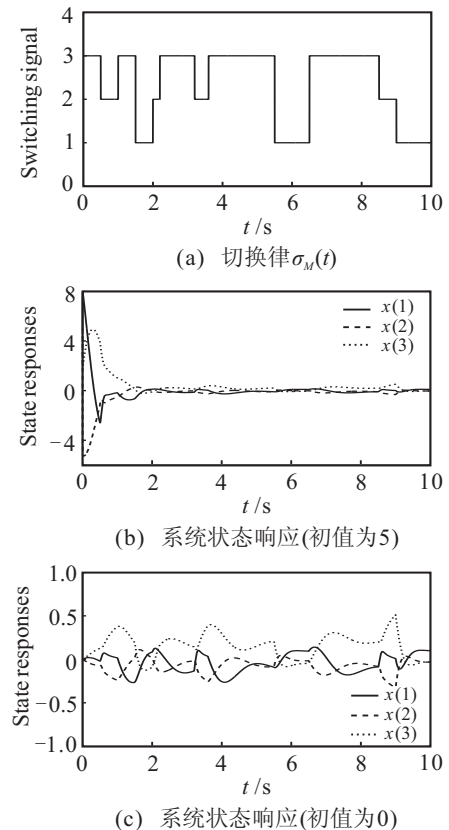


图3 模型依赖平均驻留时间方法对应的仿真结果

1.6 s, 即 $\tau_{a2} = 0.4$ s; 子系统 3 被激活 5 次, 共持续 5.9 s, 即 $\tau_{a3} = 1.18$ s. 各状态量的初值分别取为 5 和 0, 系统状态响应分别如图 3(b) 和图 3(c) 所示.

对比图 2(a) 和图 3(a) 可知, 两种切换律在前 2 s 内完全相同, 且各切换 4 次, 平均驻留时间为 0.5 s, 明显小于 $\tau_a^* = 1.1232$ s 的要求. 因此当 $t > 2$ s 时, 对于 ADT 方法, $\sigma_A(t)$ 必须通过慢切换来平衡之前的快速切换, 且这种要求对各子系统是一致的. 而对于 MDADT 方法, 由于各子系统只需满足各自的平均驻留时间, $\sigma_M(t)$ 具有了更大的自由度. 具体而言, 在前 2 s 的快速切换后, 系统仍能进行频繁的切换, 原因在于子系统 2 的平均驻留时间仅为 $\tau_{a2}^* = 0.3085$, 在其随后的 3 次激活中, 持续时间分别为 0.2 s、0.4 s 和 0.5 s; 子系统 1 和子系统 3 的平均驻留时间也都小于 ADT 方法对应的 $\tau_a^* = 1.1232$, 因此, 系统可切换的总次数多于 ADT 方法.

通过分析系统的状态调节过程可知, 对于两种初值情况, MDADT 方法对应的系统响应性能均优于 ADT 方法. 其原因一方面在于前者对应的各个闭环子系统控制性能更好; 另一方面在于 $\sigma_M(t)$ 中子系统 2 的持续时间较短, 从而避免了大幅振荡. 上述分析说明, 模型依赖平均驻留时间 τ_{ai}^* 的引入增加了切换律设计的自由度, 从而降低了切换系统设计的保守性, 为改善系统的控制性能提供了新的途径.

4 结 论

本文基于模型依赖平均驻留时间的概念, 提出了线性切换系统有限时间有界且满足 H_∞ 性能指标的充分条件, 并进一步给出了切换系统有限时间 H_∞ 状态反馈控制器的设计方法. 所提出方法通过模型依赖平均驻留时间的引入为切换律的设计带来了更大的自由度, 在降低系统设计保守性和改善系统控制性能方面具有一定优势.

参考文献(References)

- [1] Liberzon D, Morse A S. Basic problem in stability and design of switched systems[J]. IEEE Control Systems Magazine, 1999, 19(5): 59-70.
- [2] Daafouz J, Riedinger P, Iung C. Stability analysis and control synthesis for switched systems: A switched Lyapunov function approach[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(11): 1883-1887.
- [3] Sun Z, Ge S S. Analysis and synthesis of switched linear

control systems[J]. Automatica, 2005, 41(2): 181-195.

- [4] Zhao J, Hill D J. On stability, L_2 -gain and H_∞ control for switched systems[J]. Automatica, 2008, 44(5): 1220-1232.
- [5] Hou Y Z, Dong C Y, Wang Q. Stability analysis of switched linear systems with locally overlapped switching law[J]. J of Guidance, Control and Dynamics, 2010, 33(2): 396-403.
- [6] 林相泽, 都海波, 李世华. 离散线性切换系统的一致有限时间稳定分析和反馈控制及其在网络控制系统中的应用[J]. 控制与决策, 2011, 26(6): 841-846.
(Lin X Z, Du H B, Li S H. Uniform finite-time stability and feedback stabilization for discrete-time switched linear systems and its application to networked control systems[J]. Control and Decision, 2011, 26(6): 841-846.)
- [7] Amato F, Merola A, Cosentino C. Finite-time stability of linear time-varying systems: Analysis and controller design[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2010, 55(4): 1003-1008.
- [8] Amato F, Merola A, Cosentino C. Finite-time control of discrete-time linear systems: Analysis and design conditions[J]. Automatica, 2010, 46(5): 919-924.
- [9] Meng Q Y, Shen Y J. Finite-time H_∞ control for linear continuous system with norm-bounded disturbance[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009, 14(4): 1043-1049.
- [10] Xiang W M, Xiao J. H_∞ finite-time control for switched nonlinear discrete-time systems with norm-bounded disturbance[J]. J of the Franklin Institute, 2011, 348(2): 331-352.
- [11] Lin X Z, Du H B, Li S H. Finite-time boundedness and L_2 -gain analysis for switched delay systems with norm-bounded disturbance[J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 217(12): 5982-5993.
- [12] Liu H, Shen Y. Asynchronous finite-time stabilisation of switched systems with average dwell time[J]. IET Control Theory and Applications, 2012, 6(9): 1213-1219.
- [13] Zhao X D, Zhang L X, Shi P, et al. Stability and stabilization of switched linear systems with mode-dependent average dwell time[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2012, 57(7): 1809-1815.
- [14] Lu Q G, Zhang L X, Karimi H R, et al. H_∞ control for asynchronously switched linear parameter-varying systems with mode-dependent average dwell time[J]. IET Control Theory and Applications, 2013, 7(5): 673-683.

(责任编辑: 李君玲)