

仿射切换系统的有限时间鲁棒 H_∞ 跟踪控制

韩璐¹, 肖建¹, 邱存勇²

(1. 西南交通大学 电气工程学院, 成都 610031; 2. 西南石油大学 电气信息学院, 成都 637001)

摘要: 针对一类含分段常数项的仿射切换系统, 在平均滞留时间分析方法的基础上研究此类系统的有限时间有界性(FTB)和干扰抑制问题. 给出了仿射切换系统的FTB概念以及有限时间鲁棒 H_∞ 性能的定义, 并在此基础上提出使得系统有限时间内有界的充分条件以及 H_∞ 控制器的设计方法, 所得结论均以线性矩阵不等式(LMI)的形式给出. 最后通过算例验证了所提出方法的正确性和有效性.

关键词: 仿射切换系统; 有限时间有界; H_∞ 控制; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Robust H_∞ finite-time tracking control for affine switched system

HAN Lu¹, XIAO Jian¹, QIU Cun-yong²

(1. School of Electrical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China; 2. School of Electrical Engineering and Information, Southwest Petroleum University, Chengdu 637001, China. Correspondent: HAN Lu, E-mail: Lu.han@my.swjtu.edu.cn)

Abstract: The finite-time boundness(FTB) analysis and finite-time H_∞ controller design for the affine switched system are discussed based on the average dwell-time method. Several definitions about FTB and robust H_∞ controllers are presented, based on which, the sufficient conditions and the designed method of the H_∞ controller ensuring the FTB for the affine switched system are proposed. The obtained results are in the form of the linear matrix inequality(LMI). Finally a numerical example illustrates the correctness and effectiveness of the proposed method.

Keywords: affine switched system; finite-time boundness; H_∞ control; LMI

0 引言

有限时间稳定性(FTS)和有限时间有界性(FTB)^[1]是独立于渐近稳定性的概念, 侧重于系统的暂态分析, 使得状态量的数值在有限时间段内不超过一个给定界限, 进而避免在实际系统中饱和、击穿等危害性现象的发生, 具有重要的实际意义. 文献[2-5]分别给出了针对连续线性系统、离散线性系统和脉冲系统的有限时间稳定性和有限时间有界性条件. 近年来, FTS和FTB的结论已被推广到切换系统中. 针对一般的切换系统, 文献[6-7]给出了其有限时间稳定性和有限时间有界性条件, 并在不同的切换规则下对比了条件的保守性; 文献[8-9]考虑了外部扰动, 提出了使得切换系统在有限时间内稳定或有界的鲁棒 H_∞ 控制器的设计方法.

不同于一般的切换系统(平衡点唯一且为原点), 仿射切换系统的平衡点不唯一, 传统的稳定性分析方

法无法直接用于此类系统. 文献[10]指出, 仿射切换系统具有广泛的应用前景. 在适当的切换规则控制下, 状态量也会稳定在某一个特定的平衡点上, 所以关于一般切换系统的稳定性分析方法也可以扩展到仿射切换系统. 目前, 人们已经给出了仿射切换系统的渐近稳定性分析方法^[11-14], 并在此基础上提出了控制器的设计算法. 然而, 现有研究仅限于其渐近稳定性, 对于仿射切换系统的有限时间稳定性分析的研究目前尚属空白. 尤其对于时间依赖型切换系统, 由于仿射切换系统的切换平衡点不同于每个子系统的平衡点, 通过时间依赖型切换规则后, 系统的状态无法稳定在切换平衡点, 研究仿射切换系统的FTB较FTS更具实际意义.

根据以上分析, 本文将主要研究仿射切换系统的FTB及鲁棒 H_∞ 控制问题. 首先, 以带有干扰项的仿射切换系统为研究对象, 给出其有限时间有界性的定

收稿日期: 2014-04-03; 修回日期: 2014-07-02.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61134001, 51177137); 西南石油大学科研启航计划项目(2014QHZZ027).

作者简介: 韩璐(1984—), 女, 博士生, 从事切换系统、最优控制的研究; 肖建(1950—), 男, 教授, 博士生导师, 从事切换理论及控制理论等研究.

义;然后,基于该定义提出使得系统有限时间内有界的充分条件以及鲁棒 H_∞ 控制器的设计方法;最后通过仿真算例验证了所得结论的有效性.

1 预备知识与问题描述

考虑带外界扰动的仿射切换系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{i(t)}x(t) + B_{i(t)}u(t) + G_{i(t)}\omega(t) + b_{i(t)}, \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 为系统状态量; $u(t) \in \mathbf{R}^m$ 为控制输入量; $b_{i(t)}$ 为分段仿射常数项; $\omega(t) \in \mathbf{R}^r$ 为外界扰动量,且满足 l_2 范数条件 $\int_0^T \omega^\top(t)\omega(t)dt \leq d^2, d > 0$; 下标 $i(t): \mathbf{R}^+ \rightarrow I \triangleq \{1, 2, \dots, m\}$ 为分段常量函数,表示系统的切换序列, m 为切换子系统的个数. 为简单起见,本文以下内容均以 i 代替 $i(t)$.

由于分段仿射常数项 b_i 的存在,每个仿射切换子系统的平衡点不尽相同.不失一般性,令指令参考值 x_r 为系统的切换平衡点,并假设其不同于所有子系统的平衡点.此时,仿射切换系统(1)的误差跟踪切换方程可以写成

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= A_i e(t) + B_i u(t) + G_i \omega(t) + k_i, \quad x(0) = x_0; \\ z(t) &= C_i e(t) + D_{1i} u(t) + D_{2i} \omega(t). \end{aligned} \quad (2)$$

其中: $e(t) = x(t) - x_r, k_i = A_i x_r + b_i, z(t)$ 为控制输出.切换平衡点由 x_r 转移至原点.

本文的主要研究目的是通过设计时间依赖型切换规则使得仿射切换系统(1)的状态量 $x(t)$ 收敛于切换平衡点 x_r ,即实现误差状态 $e(t)$ 在有限时间区间内相对于原点有界.基于该目的,本文首先给出仿射切换系统有限时间有界性的定义.

定义 1 (FTB) 对于 $\forall t \in [0, T]$, 当 $e_0^\top R_e e_0 \leq \delta_e^2$ 且 $[\omega_0^\top \quad k_{\max}^\top] R_\omega \begin{bmatrix} \omega_0 \\ k_{\max} \end{bmatrix} \leq \delta_\omega^2$ 时,误差状态量满足 $e(t)^\top R_e e(t) \leq \varepsilon^2$, 则称仿射切换系统(1)关于 $(\delta_e, \delta_\omega, \varepsilon, R_e, R_\omega, T)$ 是有限时间有界的.其中

$$k_{\max} = \{k_i \mid \max_{i=1,2,\dots,m} k_i^\top R_\omega k_i\},$$

$$k_i = A_i x_r + b_i, \delta_\omega \geq 0, 0 \leq \delta_e < \varepsilon,$$

$[0, T]$ 为有限时间区间, R_e 和 R_ω 为正定对称矩阵.

传统 FTB 概念的前提条件只与初始状态量 x_0 相关^[6],而对于仿射切换系统,其稳定性要同时受到初始状态量 x_0 、切换平衡点 x_r 以及仿射常数项 b_i 有界性的影响,因此其 FTB 概念也将前提条件扩展到 e_0 和 k_i .其中 $e_0 = x_0 - x_r, k_i$ 又与切换平衡点 x_r 和仿射常数项 b_i 相关.

更进一步,假设系统的状态反馈控制器 $u(t) = K_i e(t)$, 则其闭环误差跟踪切换系统可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \bar{A}_i e(t) + G_i \omega(t) + k_i, \quad x(0) = x_0; \\ z(t) &= \bar{C}_i e(t) + D_{2i} \omega(t). \end{aligned} \quad (3)$$

其中: $\bar{A}_i = A_i + B_i K_i, \bar{C}_i = C_i + D_{1i} K_i$. 由于系统中存在的外界干扰信号 $\omega(t)$ 会对系统控制器的设计增加保守性,本文将着重讨论仿射切换系统的鲁棒 H_∞ 控制器的设计.下面给出有限时间 H_∞ 控制器的定义.

定义 2 对于仿射切换系统(2),若存在状态反馈控制器 $u(t) = K_i e(t)$ 使得: 1) 对应的闭环仿射切换系统(3)为有限时间有界; 2) 在零初始条件下,控制输出 $z(t)$ 满足

$$\int_0^T z^\top(t)z(t)dt < \gamma^2 \int_0^T \tilde{\omega}^\top(t)\tilde{\omega}(t)dt. \quad (4)$$

其中: $\tilde{\omega}(t) = [\omega^\top(t) \quad k_i^\top]^\top, k_i = A_i x_r + b_i$. 则称状态反馈控制器为有限时间 H_∞ 控制器, $\gamma > 0$ 为仿射切换系统的有限时间 H_∞ 性能.

基于以上定义,本文将给出仿射切换系统的 FTB 条件以及有限时间 H_∞ 控制器的设计方法.

2 主要结果

根据定义 1 的描述,仿射切换系统(1)的有限时间有界性可以通过判断其对应误差跟踪切换系统的 FTB 实现,所以本文的主要结论均以误差切换系统为研究对象.

为了更清晰和简便,首先假设 $u(t) = 0, \omega(t) = 0$, 仿射误差切换系统(2)可以简化为

$$\dot{e}(t) = A_i e(t) + k_i, \quad x(0) = x_0. \quad (5)$$

基于平均滞留时间方法^[15],仿射切换系统(5)的有限时间有界性条件由以下定理给出.

定理 1 对于仿射切换系统(5),如果存在一组正定矩阵 $P_i, i \in I$, 标量 $\alpha > 0, \beta > 0$ 和 $\xi \geq 0$, 使得

$$\alpha R_e < P_i < \beta R_e, \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} A_i^\top P_i + P_i A_i & P_i \\ P_i & 0 \end{bmatrix} < \xi \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_\omega \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\tau_a \geq \tau_a^* = \frac{T \ln \frac{\beta}{\alpha}}{\ln \frac{\alpha \varepsilon^2}{\beta \delta_e^2 + T \xi \delta_\omega^2} - \frac{\xi}{\alpha} T} \quad (8)$$

成立,则系统关于 $(\delta_e, \delta_\omega, \varepsilon, R_e, R_\omega, T)$ 有限时间有界.

证明 令 $R = \text{diag}(R_e, R_\omega), \eta_i = [e^\top(t) \quad k_i^\top]^\top, i \in I$, 且假设系统(5)的分段 Lyapunov 函数为 $V_i(t) = e^\top(t)P_i e(t)$, 则由条件(6)~(8)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) &= \dot{e}^\top(t)P_i e(t) + e^\top(t)P_i \dot{e}(t) = \\ & [e^\top(t) \quad k_i^\top] \begin{bmatrix} A_i^\top P_i + P_i A_i & P_i \\ P_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ k_i \end{bmatrix} < \\ & \xi \eta_i^\top R \eta_i \leq \frac{\xi}{\alpha} V_i + \xi k_{\max}^\top R_\omega k_{\max}. \end{aligned} \quad (9)$$

考虑 $\forall t > 0, t_0 < t_1 < \dots < t_k$ 为 $[t_0, t]$ 上的切换时刻, 令 $V(t) = \sum_{i \in I} \theta_i V_i(t), \theta_i \in \{0, 1\}$, 对式(9)两边积分得

$$V(t) < \varphi(t, t_k) V(t_k^+) +$$

$$\begin{aligned} & \xi k_{\max}^T R_{\omega} k_{\max} \int_{t_k}^t \varphi(t, \tau) d\tau \Rightarrow \\ V(t_{k+1}) & < \varphi(t_{k+1}, t_k) \frac{V(t_k^+)}{V(t_k^-)} V(t_k^-) + \\ & \xi k_{\max}^T R_{\omega} k_{\max} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi(t_{k+1}, \tau) d\tau. \quad (10) \end{aligned}$$

其中: $\varphi(t, \tau) = \exp\left(\frac{\xi}{\alpha}(t - \tau)\right) < \exp\left(\frac{\xi}{\alpha}T\right)$, T 为系统的有限时间间隔. 由条件(6)可知

$$\begin{aligned} \frac{V(t_k^+)}{V(t_k^-)} &= \frac{V_j(t_k)}{V_i(t_k)} = \\ \frac{e^T(t_k)P_j e(t_k)}{e^T(t_k)P_i e(t_k)} &< \frac{\beta e^T(t_k)R_e e(t_k)}{\alpha e^T(t_k)R_e e(t_k)} = \frac{\beta}{\alpha}, \end{aligned}$$

则通过式(10)的迭代过程可得

$$\begin{aligned} V(t) &< \\ & \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k_{[0,T]}} e^{\frac{\xi}{\alpha}T} V(t_0) + \\ & \sum_{n=1}^k \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k_{[0,T]}-n} \xi k_{\max}^T R_{\omega} k_{\max} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \varphi(t, \tau) d\tau + \\ & \xi k_{\max}^T R_{\omega} k_{\max} e^{\frac{\xi}{\alpha}T} (t - t_k) < \\ & \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k_{[0,T]}} e^{\frac{\xi}{\alpha}T} V(t_0) + \\ & \xi k_{\max}^T R_{\omega} k_{\max} e^{\frac{\xi}{\alpha}T} \left[\sum_{n=1}^k \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k_{[0,T]}} (t_n - t_{n-1}) + \right. \\ & \left. (t - t_k) \right] < \\ & \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k_{[0,T]}} e^{\frac{\xi}{\alpha}T} V(t_0) + T \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k_{[0,T]}} \xi k_{\max}^T R_{\omega} k_{\max} e^{\frac{\xi}{\alpha}T}, \quad (11) \end{aligned}$$

其中 $k_{[0,T]}$ 表示有限时间区间 $[0, T]$ 内的切换次数.

另一方面, 条件(6)暗示

$$\begin{aligned} V(t) &= e^T(t)P_i e(t) > \alpha e^T(t)R_e e(t), \\ V(t_0) &= e_0^T P_i e_0 < \beta e_0^T R_e e_0 \leq \beta \delta_e^2, \quad (12) \end{aligned}$$

且 $k_{\max}^T R_{\omega} k_{\max} \leq \delta_{\omega}^2$. 由式(11)和(12)可知, 为了保证仿射切换系统(5)的有限时间有界性, 即满足 $e^T(t)R_e e(t) \leq \varepsilon^2$, 切换规则必须满足以下条件:

$$\begin{aligned} & \alpha e^T(t)R_e e(t) < \\ & \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k_{[0,T]}} e^{\frac{\xi}{\alpha}T} \beta \delta_e^2 + T \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k_{[0,T]}} \xi \delta_{\omega}^2 e^{\frac{\xi}{\alpha}T} < \alpha \varepsilon^2. \quad (13) \end{aligned}$$

令 $\tau_a^* = T/k_{[0,T]}$, 则式(13)可写成条件(8)的形式. 因此, 条件(6)~(8)保证了系统的FTB, 定理1成立. \square

基于定理1, 将关于仿射切换系统的FTB结论推广到 $u(t) \neq 0, \omega(t) \neq 0$ 的鲁棒仿射切换系统(2)中, 并设计其鲁棒 H_{∞} 控制器以保证对应的闭环系统有限时间内有界. 由于仿射误差跟踪切换系统的切换平衡点为原点, 可将仿射项 k_i 看作干扰信号已被扩展到外界干扰 $\omega(t)$ 中. 本文定义了新的干扰信号, 记为 $\tilde{\omega}(t) = \begin{bmatrix} \omega(t) \\ k_i \end{bmatrix}$, 则闭环误差仿射切换系统(3)可以改写成

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \bar{A}_i e(t) + \tilde{G}_i \tilde{\omega}(t), \quad x(0) = x_0; \\ z(t) &= \bar{C}_i e(t) + \tilde{D}_{2i} \tilde{\omega}(t). \quad (14) \end{aligned}$$

其中: $\tilde{G}_i = [G_i, I]$, $\tilde{D}_{2i} = [D_{2i}, 0]$. 对比式(3)与(14), 二者具有相同的结构, 且由于外界干扰为 l_2 有界的, 可通过式(14)设计鲁棒 H_{∞} 控制器, 进而保证闭环仿射切换系统(3)的有限时间有界性是可行的.

下面给出有限时间 H_{∞} 控制器的设计方法.

定理 2 对于误差仿射切换系统(2), 如果存在状态反馈控制器 $u(t) = K_i e(t)$, 正定矩阵 $Q_i, P_{i,2}$, 矩阵 $W_i, i \in I$ 以及标量 $\theta \geq 1$ 和 $\xi \geq 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} -Q_i & Q_i \\ * & -R_e^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} -\theta R_e & I \\ * & -Q_i \end{bmatrix} < 0, \quad (15)$$

$$R_{\omega} < P_{i,2} < \theta R_{\omega}, \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} A_i Q_i + Q_i A_i^T + B_i W_i + W_i^T B_i^T - \xi Q_i \\ \tilde{G}_i^T \\ C_i Q_i + D_{1i} W_i \\ \tilde{G}_i & Q_i C_i^T + W_i^T D_{1i}^T \\ \leftarrow -\gamma^2 I - \xi P_{i,2} & \tilde{D}_{2i}^T \\ \tilde{D}_{2i} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \tau_a \geq \tau_a^* = & \\ & \frac{T \ln \theta}{\varepsilon^2} \quad (18) \\ & \frac{\ln \theta (\delta_e^2 + \delta_{\omega}^2) + \gamma^2 (d^2 + k_{\max}^T k_{\max} T) - \xi T}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

成立, 则其闭环系统(14)关于 $(\delta_e, \delta_{\omega}, \varepsilon, R_e, R_{\omega}, T)$ 有限时间有界, 且满足鲁棒性能 γ . 其中 $K_i = W_i Q_i^{-1}$.

证明 令 $R = \text{diag}(R_e, R_{\omega}), \eta_i = [e^T(t) \quad \tilde{\omega}^T(t)]^T, i \in I$, 并且假设系统(14)的Lyapunov函数为 $V_i(t) = \eta_i^T(t)P_i \eta_i(t), P_i = \text{diag}(P_{i,1}, P_{i,2}), P_{i,1} = Q_i^{-1}$, 则

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) &= \dot{\eta}_i^T(t)P_i \eta_i(t) + \eta_i^T(t)P_i \dot{\eta}_i(t) = \\ & [e^T(t) \quad \tilde{\omega}^T(t)] \begin{bmatrix} \bar{A}_i^T P_{i,1} + P_{i,1} \bar{A}_i & P_{i,1} \tilde{G}_i \\ * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \tilde{\omega}(t) \end{bmatrix}. \quad (19) \end{aligned}$$

另一方面, 将式(17)左右同乘 $\text{diag}(P_{i,1}, I, I)$, 有

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i^T P_{i,1} + P_{i,1} \bar{A}_i - \xi P_{i,1} & P_{i,1} \tilde{G}_i & \bar{C}_i^T \\ \tilde{G}_i^T P_{i,1} & -\xi P_{i,2} - \gamma^2 I & \tilde{D}_{2i}^T \\ \bar{C}_i & \tilde{D}_{2i} & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (20)$$

利用 Schur 引理^[8], 有

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i^T P_{i,1} + P_{i,1} \bar{A}_i - \xi P_{i,1} + \bar{C}_i^T \bar{C}_i \\ \tilde{G}_i^T P_{i,1} + \tilde{D}_{2i}^T \bar{C}_i \\ P_{i,1} \tilde{G}_i + \bar{C}_i^T \tilde{D}_{2i} \\ \leftarrow -\xi P_{i,2} - \gamma^2 I + \tilde{D}_{2i}^T \tilde{D}_{2i} \end{bmatrix} < 0. \quad (21)$$

由于 $\begin{bmatrix} \bar{C}_i^T \bar{C}_i & \bar{C}_i^T \tilde{D}_{2i} \\ * & \tilde{D}_{2i}^T \tilde{D}_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_i^T \\ \tilde{D}_{2i}^T \end{bmatrix} [\bar{C}_i \quad \tilde{D}_{2i}] \geq 0$, 式

(21) 可以分解为

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i^T P_{i,1} + P_{i,1} \bar{A}_i & P_{i,1} \tilde{G}_i \\ \tilde{G}_i^T P_{i,1} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < \xi \begin{bmatrix} P_{i,1} & 0 \\ * & P_{i,2} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

由式(19)和(22), 进一步可得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) < \xi \eta^T(t) P_i \eta(t) + \gamma^2 \tilde{\omega}^T(t) \tilde{\omega}(t) = \\ \xi V_i + \gamma^2 \tilde{\omega}^T(t) \tilde{\omega}(t). \end{aligned} \quad (23)$$

通过 Schur 引理, 式(15) 可表示成

$$\begin{bmatrix} -Q_i & Q_i \\ * & -R_e^{-1} \end{bmatrix} < 0 \Rightarrow R_e < P_{i,1},$$

$$\begin{bmatrix} -\theta R_e & I \\ * & -Q_i \end{bmatrix} < 0 \Rightarrow P_{i,1} < \theta R_e.$$

类似于定理1的证明, 通过积分和迭代过程得到

$$\begin{aligned} V(t) < \\ & \theta^{k_{[0,T]}} \left\{ \varphi(t, t_0) V(t_0) + \right. \\ & \left. \sum_{n=1}^k \theta^{-n} \varphi(t, t_n) \int_{t_{n-1}}^{t_n} \varphi(t_n, \tau) \gamma^2 \tilde{\omega}^T(\tau) \tilde{\omega}(\tau) d\tau \right\} + \\ & \int_{t_k}^t \varphi(t, \tau) \gamma^2 \tilde{\omega}^T(\tau) \tilde{\omega}(\tau) d\tau < \\ & \theta^{k_{[0,T]}} e^{\xi T} V(t_0) + \\ & \sum_{n=1}^k \theta^{k_{[0,T]}-n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \varphi(t, \tau) \gamma^2 \tilde{\omega}^T(\tau) \tilde{\omega}(\tau) d\tau + \\ & e^{\xi T} \int_{t_k}^t \gamma^2 \tilde{\omega}^T(\tau) \tilde{\omega}(\tau) d\tau < \\ & \theta^{k_{[0,T]}} e^{\xi T} V(t_0) + \theta^{k_{[0,T]}} e^{\xi T} \left[\gamma^2 \int_{t_0}^t \tilde{\omega}^T(\tau) \tilde{\omega}(\tau) d\tau \right] < \\ & \theta^{k_{[0,T]}} e^{\xi T} V(t_0) + \theta^{k_{[0,T]}} e^{\xi T} \gamma^2 (d^2 + k_{\max}^T k_{\max} T), \end{aligned}$$

其中 $\varphi(t, \tau) = \exp(\xi(t-\tau)) < \exp(\xi T)$. 然后结合初始条件 $[\omega_0^T \quad k_{\max}^T] R_\omega \begin{bmatrix} \omega_0 \\ k_{\max} \end{bmatrix} \leq \delta_\omega^2$, 可得到系统的FTB条件(18). 这里主要证明系统在零初始条件下的有限时间 H_∞ 性能.

由条件(17), 可得

$$z^T(t)z(t) - \gamma^2 \tilde{\omega}^T(t) \tilde{\omega}(t) + \dot{V}(t) < \xi V(t).$$

通过积分和迭代过程, Lyapunov 函数在零初始值条件 $V(t_0) = 0$ 下满足以下不等式:

$$0 \leq V(t) < \theta^{k_{[0,T]}} e^{\xi T} \int_{t_0}^t \gamma^2 \tilde{\omega}^T(\tau) \tilde{\omega}(\tau) - z^T(\tau)z(\tau) d\tau. \quad (24)$$

令 $t = T, t_0 = 0$, 可得到

$$\begin{aligned} \int_0^T \gamma^2 \tilde{\omega}^T(\tau) \tilde{\omega}(\tau) - z^T(\tau)z(\tau) d\tau = \\ \int_0^T \gamma^2 (\omega^T(\tau)\omega(\tau) + k_{\max}^T k_{\max}) - \\ z^T(\tau)z(\tau) d\tau > 0. \end{aligned} \quad (25)$$

根据定义2, 系统为有限时间内鲁棒 H_∞ 有界. \square

3 数值仿真

考虑含两个子系统的切换系统(1), 系统参数为

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.01 & -2 \\ 1 & 0.02 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} -3.98 \\ -1.16 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -1 \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.01 \end{bmatrix};$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.1 & -1 \\ 3 & -0.1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} -1.8 \\ -6.4 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.2 \end{bmatrix};$$

$$\omega(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t \leq 5; \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

假设系统切换平衡点为 $x_r = [2, -2]^T$, 则其误差跟踪仿射切换系统(2) 可表示为

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.01 & -2 \\ 1 & 0.02 \end{bmatrix}, k_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.8 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -1 \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.01 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [0.10 \quad 0.33], D_{11} = 0.13, D_{21} = 0.05;$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.1 & -1 \\ 3 & -0.1 \end{bmatrix}, k_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.2 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.2 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = [0.3 \quad 0.01], D_{12} = 0.2, D_{22} = 0.028.$$

其中 $k_{\max} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.8 \end{bmatrix}$.

令FTB分析参数分别为 $\delta_e = 1, \delta_\omega = 2.2, \theta = 1.2, \varepsilon = 5.885, R_e = R_\omega = I, \gamma = 0.8, \xi = 0.3$, 并且 $T = 5$ s. 为了保证系统在有限时间内关于 ε 有界, 由FTB条件(18) 可得系统的平均滞留时间 $\tau_a^* = 1.5$ s, 故本例选择切换规则为周期 = 1.5 s 的周期切换, 记为 S. 根据定理2, 解线性矩阵不等式(17), 可得

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1.4665 & 0.0957 \\ 0.0957 & 1.3408 \end{bmatrix}, W_1 = [-1.2110 \quad 0.4831];$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1.1617 & -0.2958 \\ -0.2958 & 1.7466 \end{bmatrix}, W_2 = [3.0403 \quad 0.9730].$$

则 H_∞ 控制增益为 $K_1 = W_1 Q_1^{-1} = [-0.8533, 0.4212], K_2 = W_2 Q_2^{-1} = [2.8834, 1.0454]$. 将其代入闭环仿射切换系统(3), 并假设初始值 $e(0) = [0.5, 0.8]^T$, 则FTB的前提条件 $e_0^T R_e e_0 \leq \delta_e^2$ 和 $[\omega_0^T \quad k_{\max}^T] R_\omega \begin{bmatrix} \omega_0 \\ k_{\max} \end{bmatrix} \leq \delta_\omega^2$ 被分别满足. 此时, 在切换规则 S 的作用下, 闭环系统(3) 的误差状态轨迹和控制输出 $z(t)$ 随时间的变化曲线如图1和图2所示.

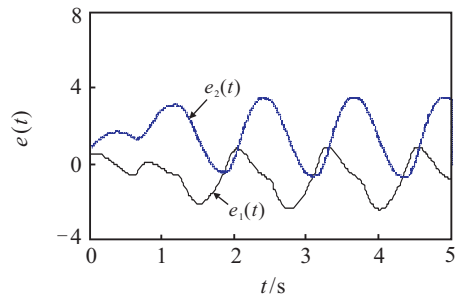
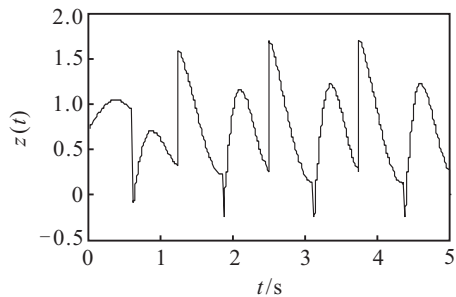


图1 系统误差状态轨迹

图2 控制输出 $z(t)$ 的运动轨迹

由图1和图2可以看出, 闭环仿射切换系统(3)为关于 ε 有限时间有界的, 且 H_∞ 满足

$$\left(\int_0^T z^T(t)z(t)dt\right)^{1/2} \approx 1.8731 <$$

$$\gamma\left(\int_0^T \omega^T(t)\omega(t) + k_{\max}^T k_{\max} dt\right)^{1/2} \approx 3.853.$$

因此, 根据定义2, 系统为有限时间内 H_∞ 有界.

4 结论

本文研究了仿射切换系统的FTB问题以及有限时间鲁棒 H_∞ 控制器的设计方法. 在平均滞留时间方法的基础上, 分别给出了外界扰动 $\omega(t) = 0$ 和 $\omega(t) \neq 0$ 两种情况下的仿射切换系统的FTB条件, 并针对第2种情况设计了对应的鲁棒 H_∞ 控制器以保证系统在有限时间内的抗干扰能力. 最后通过数值算例验证了本文所提出方法的有效性.

参考文献(References)

- [1] Weiss L, Infante E F. Finite time stability under perturbing forces and on product spaces [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1967, 12(1): 54-59.
- [2] Garcia G, Tarbouriech S, Bernussou J. Finite-time stabilization of linear time-varying continuous systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(2): 364-369.
- [3] 林相泽, 都海波, 李世华. 离散线性切换系统的一致有限时间稳定分析和反馈控制及其在网络控制系统中的应用[J]. 控制与决策, 2011, 26(6): 841-846.
(Lin X Z, Du H B, Li S H. Uniform finite-time stability and feedback stabilization for discrete-time switched linear systems and its application to networked control systems[J]. Control and Decision, 2011, 26(6): 841-846.)
- [4] Amato F, Ambrosino R, Ariola M, et al. Finite-time stability of linear time-varying systems with jumps[J]. Automatica, 2009, 45(5): 1354-1358.
- [5] 何舒平, 刘飞. Markov跳变系统的有限时间状态反馈镇定[J]. 控制与决策, 2009, 24(1): 91-95.
(He S P, Liu F. Finite-time stabilization for Markov jump systems via state feedback[J]. Control and Decision, 2009, 24(1): 91-95.)
- [6] Xiang W M, Xiao J. Finite-time stability and stabilization for switched linear systems[J]. Int J of System Science, 2013, 44(2): 384-400.
- [7] Orlov Y. Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems[J]. SIAM J on Control and Optimization, 2004, 43(4): 1263-1271.
- [8] Chen G X, Xiang Z R. Robust H_∞ finite-time control of switched stochastic systems with time delay[C]. Proc of the 31 st Chinese Control Conf. Hefei, 2012: 1596-1601.
- [9] Muhammad Naveed Iqbal, Jian Xiao, Weiming Xiang. Finite time H_∞ filtering for uncertain discrete time switching systems[J]. Trans of the Institute of Measurement and Control, 2013, 35(6): 851-862.
- [10] Cardim R, Teixeira M C M, Assuncao E, et al. Variable-structure control design of switched systems with an application to a DC-DC power converter[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2009, 56(9): 3505-3513.
- [11] 高亚辉, 刘志远, 陈虹. 基于异步观测器的离散分段仿射系统控制: LMI方法[J]. 自动化学报, 2009, 35(10): 1341-1346.
(Gao Y H, Liu Z Y, Chen H. Non-synchronized observer-based control of discrete-time piecewise affine systems: An LMI approach[J]. Acta Automatica Sinica, 2009, 35(10): 1341-1346.)
- [12] 刘志林, 裴润, 慕香永, 等. 输入受限的参数摄动分段仿射系统鲁棒控制[J]. 系统仿真学报, 2007, 19(22): 5234-5242.
(Liu Z L, Pei R, Mu X Y, et al. Robust control of piecewise affine system with constrained input and parameter perturbation[J]. J of System Simulation, 2007, 19(22): 5234-5242.)
- [13] Ferrari-Trecate G, Cuzzola F A, Mignone D, et al. Analysis and control with performance of piecewise affine and hybrid systems[C]. Proc of the American Control Conf. Arlington, 2001: 200-205.
- [14] Johansson M, Rantzer A. Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1998, 43(4): 555-559.
- [15] Zhai G, Hu B, Yasuda K. Stability analysis of switched systems with stable and unstable subsystems: An average dwell time approach[J]. Int J of Systems Science, 2001, 32(8): 1055-1061.

(责任编辑: 曹洪武)