第 30 卷 第 6 期
Vol. 30 No. 6

控 制 与 决 策
Control and Decision

2015 年 6 月
Jun. 2015

文章编号: 1001-0920 (2015) 06-1139-04 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2014.0467

基于多值中智集的TODIM方法

王坚强, 李新娥

(中南大学 商学院，长沙 410083)

摘 要: 定义了多值中智集、多值中智数及其期望值以及多值中智数的Hamming距离, 并给出了其比较方法. 针对准则值为多值中智数的多准则决策问题, 将传统的交互式多准则决策 (TODIM) 方法扩展到多值中智环境中, 提出一种基于多值中智集的多准则决策方法. 该方法首先选定参考准则; 然后以多值中智集的距离为基础构建方案间的价值函数, 以得到方案间的优势矩阵, 进而计算得到方案的综合排序值; 最后通过实例分析表明了该方法的有效性和可行性.

关键词: 多准则决策；多值中智数；交互式多准则决策方法

中图分类号: C934 **文献标志码:** A

TODIM method with multi-valued neutrosophic sets

WANG Jian-qiang, LI Xin-e

(School of Business，Central South University，Changsha 410083，China. Correspondent：WANG Jian-qiang，E-mail: jqwang@csu.edu.cn)

Abstract: The multi-valued neutrosophic set, the multi-valued neutrosophic number and its expected value as well as the Hamming distance between two multi-valued neutrosophic numbers are defined. Besides, the comparison rules between two multi-valued neutrosophic numbers are also given. For the multi-criteria decision making with multi-valued neutrosophic sets, the traditional TODIM method is extended, and an approach is given. In this method, a reference criterion is selected and then a value function is built based on the Hamming distance between multi-valued neutrosophic numbers. This value function is used to get the ranking order of all alternatives. Finally, a numerical example is given to show the effectiveness and feasibility of the proposed method.

Keywords: multi-criteria decision making；multi-valued neutrosophic number；TODIM method

0 引 言

自Zadeh提出模糊集概念后, 模糊多准则决策问题得到了广泛研究. 在传统的模糊集中, 元素的隶属度是一个 $0\sim1$ 间的值. Atanassov[1]在模糊集的基础上增加了一个新的参数——非隶属度, 定义了直觉模糊集. Torra[2]定义的犹豫模糊集允许元素的隶属度是 $0\sim1$ 之间值的有限集合. 其后, Qian 等[3]和 Zhu 等[4]分别定义了广义犹豫模糊集和双重犹豫模糊集. 虽然模糊集能较好地处理决策问题中的模糊信息, 但在现实生活中仍然存在其无法处理的不确定信息. 为此, Smarandache[5] 提出了中智集概念, 指出中智集是元素的真实程度、不确定程度以及失真程度都存在于非标准单位区间 $]0^-,1^+[$ 的集合. 为简化中智集以应用到相关实际问题中, Wang 等[6]和 Ye[7] 定义了单值中智集及其集结算子, 提出了相应的多准则决策方法. Majumdar 等[8]定义了两个单值中智数的距离、相似度和熵. Ye[9-10]定义了单值中智集的交叉熵及其相关系数, 并提出了相应的多准则决策方法. 在现实决策中, 单个数值并不能准确地刻画某一事物的真实程度、不确定程度和失真程度, 于是 Wang 等[11]定义了区间值中智集及其逻辑运算. Ye[12]定义了区间值中智集的距离和相似度, 并将其应用到多准则决策问题中. Broumi 等[13]定义了区间值中智集相关系数. Chi 等[14]将TOPSIS方法拓展到准则权重未知且准则值为区间值中智数的多准则决策问题中. 如果中智集中的真实程度、不确定程度和失真程度均无法给出某一

收稿日期: 2014-04-02；**修回日期:** 2014-06-29.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71271218)；国家创新研究群体科学基金项目(71221061)；湖南省自然科学基金项目(14JJ2009).

作者简介: 王坚强(1963–), 男, 教授, 博士生导师, 从事决策理论与应用、风险管理与控制、物流管理、信息管理等研究；李新娥(1991–), 女, 硕士生, 从事决策理论与应用、信息管理的研究.

个确定的值或区间, 而是离散值的有限集合时, 则将这类中智集称为多值中智集. 目前, 尚未见到多值中智集研究的相关报道.

TODIM (Tomada de decisao interativa e multicritévio) 方法[15]作为多准则决策问题的一种有效方法, 自被提出后, 相继有学者对其进行了扩展. 如 Krohling 等[16]和 Zhang 等[17]分别提出了基于直觉模糊数和犹豫模糊数的 TODIM 方法. 作为基于前景理论的一种多准则决策方法, TODIM 方法以人们的经验所提供的描述为基础, 旨在帮助人们在面对风险时如何有效地做出决策. 它可根据决策者的风险偏好来调整计算过程中的参数, 得到符合决策者偏好的决策结果. 为此, 本文将定义多值中智数的期望值和 Hamming 距离, 并提出基于多值中智集的 TODIM 方法.

1 多值中智集及其相关定义

定义 1 设 X 为对象集, X 的一个多值中智集 A 由 3 个从 X 到单位区间 $[0,1]$ 的有限离散子集的函数 $\tilde{T}_A(x)$、$\tilde{T}_A(x)$ 和 $\tilde{T}_A(x)$ 组成. A 可以表示为

$$A=\{\langle x,\tilde{T}_A(x),\tilde{I}_A(x),\tilde{F}_A(x)\rangle|x\in X\}. \tag{1}$$

其中: $\tilde{T}_A(x)$、$\tilde{I}_A(x)$ 和 $\tilde{F}_A(x)$ 是 3 个属于 $[0,1]$ 的有限离散值的集合, 分别表示真实程度、不确定程度以及失真程度, 并满足: $0\leqslant\gamma,\eta,\xi\leqslant 1$, $0\leqslant\gamma^++\eta^++\xi^+\leqslant 3$, $\gamma\in\tilde{T}_A(x)$, $\eta\in\tilde{I}_A(x)$, $\xi\in\tilde{F}_A(x)$, $\gamma^+=\sup\tilde{T}_A(x)$, $\eta^+=\sup\tilde{I}_A(x)$, $\xi^+=\sup\tilde{F}_A(x)$. 为了简便, 称 $A=\langle\tilde{T}_A,\tilde{I}_A,\tilde{F}_A\rangle$ 为多值中智数.

如果 $\tilde{T}_A$、$\tilde{I}_A$ 和 $\tilde{F}_A$ 都只有一个值, 则多值中智集成为单值中智集[6-7]; 如果 $\tilde{T}_A=\varnothing$, 则多值中智集成为双重犹豫模糊集[4]; 如果 $\tilde{T}_A=\tilde{F}_A=\varnothing$, 则多值中智集成为犹豫模糊集[2].

定义 2 设 $A=\langle\tilde{T}_A,\tilde{I}_A,\tilde{F}_A\rangle$ 为多值中智数, 则 A 的补集 A^C 定义如下:

$$A^C=\Big\langle\bigcup_{\gamma\in\tilde{T}_A}\{1-\gamma\},\ \bigcup_{\eta\in\tilde{I}_A}\{1-\eta\},\ \bigcup_{\xi\in\tilde{F}_A}\{1-\xi\}\Big\rangle. \tag{2}$$

定义 3 设 $A=\langle\tilde{T}_A,\tilde{I}_A,\tilde{F}_A\rangle, B=\langle\tilde{T}_B,\tilde{I}_B,\tilde{F}_B\rangle$ 为两个多值中智数, 若 $\forall\tilde{T}_A^a\in\tilde{T}_A$, $\tilde{T}_B^b\in\tilde{T}_B$, $\tilde{I}_A^a\in\tilde{I}_A$, $\tilde{I}_B^b\in\tilde{I}_B$, $\tilde{F}_A^a\in\tilde{F}_A$, $\tilde{F}_B^b\in\tilde{F}_B$, 满足 $\tilde{I}_A^a>\tilde{I}_B^b$, $\tilde{F}_A^a>\tilde{F}_B^b$, $\tilde{T}_A^a<\tilde{T}_B^b$, 则称 B 优于 A, 记为 $A\prec B$.

定义 4 设 $A=\langle\tilde{T}_A,\tilde{I}_A,\tilde{F}_A\rangle$ 为多值中智数, 则称

$$\mathrm{E}(A)=\frac{1}{l_{\tilde{T}_A}\cdot l_{\tilde{I}_A}\cdot l_{\tilde{F}_A}}\sum_{\gamma_i\in\tilde{T}_A,\eta_j\in\tilde{I}_A,\xi_k\in\tilde{F}_A}\frac{(\gamma_i+1-\eta_j+1-\xi_k)}{3} \tag{3}$$

为 A 的期望值. 其中: $l_{\tilde{T}_A}$、$l_{\tilde{I}_A}$、$l_{\tilde{F}_A}$ 分别代表 $\tilde{T}_A$、$\tilde{I}_A$、$\tilde{F}_A$ 中元素的个数.

定义 5 设 $A=\langle\tilde{T}_A,\tilde{I}_A,\tilde{F}_A\rangle$, $B=\langle\tilde{T}_B,\tilde{I}_B,\tilde{F}_B\rangle$ 为两个多值中智数, 则 A 与 B 之间的 Hamming 距离定义为

$$\begin{aligned}d(A,B)=\frac{1}{2}\Big[&\frac{1}{|\tilde{T}_A|}\sum_{\tilde{T}_A^a\in\tilde{T}_A}\min_{\tilde{T}_B^b\in\tilde{T}_B}|\tilde{T}_A^a-\tilde{T}_B^b|+\\&\frac{1}{|\tilde{T}_B|}\sum_{\tilde{T}_B^b\in\tilde{T}_B}\min_{\tilde{T}_A^a\in\tilde{T}_A}|\tilde{T}_B^b-\tilde{T}_A^a|+\\&\frac{1}{|\tilde{I}_A|}\sum_{\tilde{I}_A^a\in\tilde{I}_A}\min_{\tilde{I}_B^b\in\tilde{I}_B}|\tilde{I}_A^a-\tilde{I}_B^b|+\\&\frac{1}{|\tilde{I}_B|}\sum_{\tilde{I}_B^b\in\tilde{I}_B}\min_{\tilde{I}_A^a\in\tilde{I}_A}|\tilde{I}_B^b-\tilde{I}_A^a|+\\&\frac{1}{|\tilde{F}_A|}\sum_{\tilde{F}_A^a\in\tilde{F}_A}\min_{\tilde{F}_B^b\in\tilde{F}_B}|\tilde{F}_A^a-\tilde{F}_B^b|+\\&\frac{1}{|\tilde{F}_B|}\sum_{\tilde{F}_B^b\in\tilde{F}_B}\min_{\tilde{F}_A^a\in\tilde{F}_A}|\tilde{F}_B^b-\tilde{F}_A^a|\Big].\end{aligned} \tag{4}$$

定理 1 设 $A=\langle\tilde{T}_A,\tilde{I}_A,\tilde{F}_A\rangle$, $B=\langle\tilde{T}_B,\tilde{I}_B,\tilde{F}_B\rangle$ 和 $C=\langle\tilde{T}_C,\tilde{I}_C,\tilde{F}_C\rangle$ 为 3 个多值中智数, 由定义 5 定义的距离满足以下 3 个性质:

1) $d(A,A)=0$;

2) $d(A,B)=d(B,A)$;

3) 若 $A\prec B\prec C$, 则 $d(A,C)\geqslant d(A,B)$ 且 $d(A,C)\geqslant d(B,C)$.

可以证明定理 1 成立, 在此证明过程省略.

2 基于多值中智数的 TODIM 方法

对于一个有多值中智信息的多准则选择或排序问题, 设有 m 个方案 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$, n 个决策准则 $C=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$, 对应的权向量为 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$ 且 $\omega_j\in[0,1]$, $\sum\limits_{j=1}^n\omega_j=1$. 方案 A_i 在准则 C_j 下的值为多值中智数 $r_{ij}=\langle\tilde{T}_{r_{ij}},\tilde{I}_{r_{ij}},\tilde{F}_{r_{ij}}\rangle$, 其中 $\tilde{T}_{r_{ij}}$、$\tilde{I}_{r_{ij}}$、$\tilde{F}_{r_{ij}}$ 分别表示方案 A_i 满足准则 C_j 的真实程度、不确定程度和失真程度, 构成的决策矩阵记为 $R=[r_{ij}]_{m\times n}$.

基于多值中智数的 TODIM 方法的具体步骤如下.

Step 1: 规范化决策信息, 得到标准化矩阵 $R'=[r'_{ij}]_{m\times n}$. 对于效益型准则, 相应的决策信息无须变动. 对于成本型准则, 取决策信息的补集, 即

$$r'_{ij}=\Big\langle\bigcup_{\gamma\in\tilde{T}_{r_{ij}}}\{1-\gamma\},\ \bigcup_{\eta\in\tilde{I}_{r_{ij}}}\{1-\eta\},\ \bigcup_{\xi\in\tilde{F}_{r_{ij}}}\{1-\xi\}\Big\rangle. \tag{5}$$

Step 2: 选取参照准则C_k. 通常选权重最高的准则为参照准则.

Step 3: 计算方案 A_i 优于 A_j 的程度 $\delta(A_i, A_j)$, 得到方案间的优先程度, 即

$$\delta(A_i, A_j) = \sum_{l=1}^{n} \phi_l(A_i, A_j),\ \forall(i, j). \tag{6}$$

其中

$$\phi_j(A_i, A_k) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\omega_{kl}}{\sum\limits_{l=1}^{n}\omega_{kl}}} \cdot d(r_{il}', r_{jl}')w_{jr},\ [\mathrm{E}(r_{il}') - \mathrm{E}(r_{jl}')] > 0; \\ 0,\ [\mathrm{E}(r_{il}') - \mathrm{E}(r_{jl}')] = 0; \\ -\dfrac{1}{\theta}\sqrt{\dfrac{\left(\sum\limits_{l=1}^{n}\omega_{kl}\right)}{\omega_{kl}}} \cdot d(r_{il}', r_{jl}'),\ [\mathrm{E}(r_{il}') - \mathrm{E}(r_{jl}')] < 0. \end{cases} \tag{7}$$

价值函数 $\phi_l(A_i, A_j)$ 表示在准则 C_l $(l = 1, 2, \cdots, n)$ 下方案 A_i 优于方案 A_j 的程度; 参数 θ 表示损失的衰减因数, 可以根据决策者的偏好调整值的大小, 若 $\theta < 1$, 则损失的影响将扩大, 若 $\theta > 1$, 则损失的影响将减小, $\theta = 1$ 和 $\theta = 2.5$ 是用得最多的; ω_{kl} 表示参考准则 C_k 的权重 ω_k 除以准则 C_l $(l = 1, 2, \cdots, n)$ 的权重 ω_l; $\mathrm{E}(r_{il}')$ 和 $\mathrm{E}(r_{jl}')$ 分别表示多值中智数 r_{il}' 和 r_{jl}' 的期望值; $d(r_{il}', r_{jl}')$ 表示两个多值中智数 r_{il}' 与 r_{jl}' 的距离.

Step 4: 计算方案 $\tilde{A}_i$ 的综合排序值 ξ_i, 即

$$\xi_i = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m}\delta(A_i, A_j) - \min\sum\limits_{j=1}^{m}\delta(A_i, A_j)}{\max\sum\limits_{j=1}^{m}\delta(A_i, A_j) - \min\sum\limits_{j=1}^{m}\delta(A_i, A_j)}. \tag{8}$$

Step 5: 排序. 根据 ξ_i 值进行排序, ξ_i 值越大, 方案 A_i 越优.

3　实例分析

为了验证本文方法的有效性, 采用文献[14]的例子进行计算、比较和分析.

某个投资公司准备投资一笔钱以获得最大的效益. 有4个公司可供选择: A_1 是汽车公司; A_2 是食品公司; A_3 是电脑公司; A_4 是军火公司. 投资公司做决策时需要考虑如下3个准则: C_1 是风险控制能力; C_2 是成长潜力; C_3 是环境影响力. 其中: C_1、C_2 是效益型准则, C_3 是成本型准则. 3个准则权重向量为 $\omega = (0.2, 0.25, 0.55)$. 决策者以多值中智数的形式给出决策值, 其决策矩阵 R 为

$$R = \begin{bmatrix} \langle\{0.4, 0.5\}, \{0.2\}, \{0.3\}\rangle & \langle\{0.4\}, \{0.2, 0.3\}, \{0.3\}\rangle & \langle\{0.2\}, \{0.2\}, \{0.5\}\rangle \\ \langle\{0.6\}, \{0.1, 0.2\}, \{0.2\}\rangle & \langle\{0.6\}, \{0.1\}, \{0.2\}\rangle & \langle\{0.5\}, \{0.2\}, \{0.1, 0.2\}\rangle \\ \langle\{0.3, 0.4\}, \{0.2\}, \{0.3\}\rangle & \langle\{0.5\}, \{0.2\}, \{0.3\}\rangle & \langle\{0.5\}, \{0.2, 0.3\}, \{0.2\}\rangle \\ \langle\{0.7\}, \{0.1, 0.2\}, \{0.1\}\rangle & \langle\{0.6\}, \{0.1\}, \{0.2\}\rangle & \langle\{0.4\}, \{0.3\}, \{0.2\}\rangle \end{bmatrix}.$$

试确定这4个公司的排序.

上述问题的决策步骤如下(为便于计算, 取 $\theta = 1$).

Step 1: 规范化决策信息, 得到标准化矩阵 $R' = [r'_{ij}]_{m\times n}$. 由于 C_1、C_2 是效益型准则, C_3 是成本型准则, 标准化矩阵 R' 为

$$R' = \begin{bmatrix} \langle\{0.4, 0.5\}, \{0.2\}, \{0.3\}\rangle & \langle\{0.4\}, \{0.2, 0.3\}, \{0.3\}\rangle & \langle\{0.8\}, \{0.8\}, \{0.5\}\rangle \\ \langle\{0.6\}, \{0.1, 0.2\}, \{0.2\}\rangle & \langle\{0.6\}, \{0.1\}, \{0.2\}\rangle & \langle\{0.5\}, \{0.8\}, \{0.9, 0.8\}\rangle \\ \langle\{0.3, 0.4\}, \{0.2\}, \{0.3\}\rangle & \langle\{0.5\}, \{0.2\}, \{0.3\}\rangle & \langle\{0.5\}, \{0.8, 0.7\}, \{0.8\}\rangle \\ \langle\{0.7\}, \{0.1, 0.2\}, \{0.1\}\rangle & \langle\{0.6\}, \{0.1\}, \{0.2\}\rangle & \langle\{0.6\}, \{0.7\}, \{0.8\}\rangle \end{bmatrix}.$$

Step 2: 选取参照准则 C_k. 因为准则 C_3 权重最高, 所以选 C_3 为参照准则.

Step 3: 计算每个方案 A_i 优于 A_j 的程度, 得到方案间的优先程度. 采用式(6)和(7)计算得到各个方案间的优先程度如表1所示.

表1　方案间的优先程度

	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	0	−0.893	0.236	−1.358
A_2	−0.539	0	0.272	−0.765
A_3	0.927	−1.406	0	−1.955
A_4	−0.415	0.248	0.498	0

Step 4: 计算方案 A_i 的综合排序值 ξ_i. 利用式(8)得出: $\xi_1 = 0.492,\ \xi_2 = 0.70,\ \xi_3 = 0,\ \xi_4 = 1$.

Step 5: 排序. 根据ξ_i 值排序, ξ_i 越大, 方案 A_i 越优. 因此, 排序结果为 $A_4 > A_2 > A_1 > A_3$.

为检查结果的稳定性, 取不同的 θ 值对此算例进行计算, 得到的排序结果如表2所示. 由表2可以看

出, θ 取 5 个不同的值时, 排序结果一致, 均为 $A_4 > A_2 > A_1 > A_3$, 排序结果稳定. 为了验证TODIM方法的有效性, 选取TOPSIS方法对算例进行计算. 其计算结果为 $A_4 > A_2 > A_1 > A_3$. 相比TOPSIS方法, 二者虽然计算结果一致, 但是TODIM方法以前景理论为基础, 充分考虑了决策者对风险的规避态度, 可通过参数的调整反映决策者的风险偏好, 更符合实际决策要求. 此外, 在使用过程中, TODIM方法对所有方案间的优序关系进行两两比较, 使得最终的排序结果包含更多的信息. 因此, 本文提出的方法是可行且有效的.

表 2　排序结果稳定性分析

θ	排序结果	最优方案	最差方案
2.5	$A_4 > A_2 > A_1 > A_3$	A_4	A_3
2.0	$A_4 > A_2 > A_1 > A_3$	A_4	A_3
1.0	$A_4 > A_2 > A_1 > A_3$	A_4	A_3
0.8	$A_4 > A_2 > A_1 > A_3$	A_4	A_3
0.3	$A_4 > A_2 > A_1 > A_3$	A_4	A_3

4 结　论

本文定义了多值中智集(数)、多值中智数的期望值以及两个多值中智数的Hamming距离, 提出了多值中智数的比较方法. 以此为基础, 提出了基于多值中智集的TODIM方法. 该方法可由决策者根据自己对损失或收益的偏好来调整参数的大小, 得到完全排序结果, 具有较强的稳定性和实用性. 与其他基于距离的多准则决策方法相比有其自身的优势. 然而, 本文给出的方法只考虑准则值为多值中智数、准则权重确定的决策问题, 对于权重不确定的情况在现实生活中普遍存在, 尚有待于进一步研究.

参考文献(References)

[1] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[2] Torra V. Hesitant fuzzy sets[J]. Int J of Intelligent Systems, 2010, 25(6): 529-539.

[3] Qian G, Wang H, Feng X Q. Generalized hesitant fuzzy sets and their application in decision support system[J]. Knowledge-based Systems, 2013, 37(1): 357-365.

[4] Zhu B, Xu Z S, Xia M M. Dual hesitant fuzzy sets[J]. J of Applied Mathematics, 2012, 2012: 1-13.

[5] Smarandache F. A unifying field in logics neutrosophic logic: Neutrosophy, neutrosophic set, neutrosophic probability[M]. Rehoboth: American Research Press, 1999: 111-114.

[6] Wang H B, Smarandache F, Zhang Y Q, et al. Single valued neutrosophic sets[J]. Multispace and Multistructure, 2010, 4(10): 410-413.

[7] Ye J. A multicriteria decision-making method using aggregation operators for simplified neutrosophic sets[J]. J of Intelligent and Fuzzy Systems, 2014, 26(5): 2459-2466.

[8] Majumdar P, Samant S K. On similarity and entropy of neutrosophic sets[J]. J of Intelligent and Fuzzy Systems, 2014, 26(3): 1245-1252.

[9] Ye J. Single valued neutrosophic cross-entropy for multicriteria decision making problems[J]. Applied Mathematical Modeling, 2014, 38(3): 1170-1175.

[10] Ye J. Multicriteria decision-making method using the correlation coefficient under single-value neutrosophic environment[J]. Int J of General Systems, 2013, 42(4): 386-394.

[11] Wang H, Smarandache F, Zhang Y Q, et al. Interval neutrosophic sets and logic: Theory and applications in computing[M]. Hexix: Arizona, 2005: 6-14.

[12] Ye J. Similarity measures between interval neutrosophic sets and their applications in multicriteria decision-making[J]. J of Intelligent and Fuzzy Systems, 2014, 26(1): 165-172.

[13] Broumi S, Smarandache F. Correlation coefficient of interval neutrosophic set[J]. Applied Mechanics and Materials, 2014, 436: 511-517.

[14] Chi P P, Liu P D. An extended TOPSIS method for the multiple attribute decision making problems based on interval neutrosophic set[J]. Neutrosophic Sets and Systems, 2013, 1(12): 63-70.

[15] Gomes L, Lima M. TODIM: Basics and application to multicriteria ranking of projects with environmental impacts[J]. Foundations of Computing and Decision Sciences, 1992, 16(4): 113-127.

[16] Krohling R A, Pacheco A G C, Siviero A L T. IF-TODIM: An intuitionistic fuzzy TODIM to multi-criteria decision making[J]. Knowledge-based Systems, 2013, 53(1): 142-146.

[17] Zhang X, Xu Z. The TODIM analysis approach based on novel measured functions under hesitant fuzzy environment[J]. Knowledge-based Systems, 2014, 61(1): 48-58.

(责任编辑：李君玲)