第 30 卷 第 7 期 控 制 与 决 策 2015 年 7 月
Vol. 30 No. 7 Control and Decision Jul. 2015

文章编号: 1001-0920 (2015) 07-1219-08 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2014.0659

求解梯形模糊矩阵对策的线性规划方法

杨 洁, 李登峰

(福州大学 经济与管理学院，福州 350108)

摘 要: 针对传统模糊支付矩阵对策求解方法不能保证局中人的模糊值始终相同且求解复杂的问题, 通过引入 α- 矩阵对策的概念, 提出一种求解支付为梯形模糊数的矩阵对策线性规划方法. 该方法中局中人双方的对策值始终相同, 且此对策值的任意 α- 截集的上下界和局中人的最优策略容易通过求解导出的 4 个线性规划问题获得, 特别地, 可得到模糊对策值的显式表示. 通过与其他方法的比较, 表明了所提出的方法更具有效性和实用性.

关键词: 模糊对策理论；梯形模糊数；模糊系统模型；线性规划

中图分类号: O225 **文献标志码:** A

Linear programming methodology for solving trapezoidal fuzzy matrix games

YANG Jie，*LI Deng-feng*

(School of Economics and Management，Fuzhou University，Fuzhou 350108，China. Correspondent：LI Deng-feng，E-mail：dengfengli@sina.com)

Abstract: For the problem of major solution methods for matrix games with fuzzy payoffs, an effective methodology is developed to solve matrix games with payoffs expressed by trapezoidal fuzzy numbers. In this methodology, the concept of α-matrix games is introduced and players' fuzzy values are always identical. The upper and lower bounds of any α-cut of the fuzzy value and players' optimal strategies are easily obtained through solving the derived four linear programming problems with the upper and lower bounds of α-cuts of the fuzzy payoffs. Particularly, the fuzzy value can be explicitly estimated. Compared with other methods, the effectiveness and feasibility of the proposed method are illurstrated.

Keywords: fuzzy game theory；trapezoidal fuzzy numbers；fuzzy system model；linear programming

0 引 言

现实生活中常出现对抗或冲突事件, 对策论从数学角度对冲突事件进行了深入分析. 目前, 学者们对不同形式的数学对策进行了研究[1-3]. 其中, 两人零和对策 (通常简称为“矩阵对策”) 是一种重要形式. 矩阵对策已广泛应用于经济、管理、电子商务等领域. 在多数矩阵对策研究中, 局中人支付 (收益) 都是清晰的, 但现实中由于信息的不充分或不准确, 局中人无法准确得知对策收益. 因此, 局中人支付应采用近似估计值而不是精确值[3-14], 本文将重点讨论此类矩阵对策的求解问题.

Campos[3]基于模糊数排序函数和辅助线性规划模型率先提出了模糊矩阵对策的方法; Bector 等[4]在 Campos 的基础上提出了基于对偶线性规划和模糊参数的模糊矩阵对策的线性规划求解方法. 虽然两种方法都能解决模糊对策问题, 但很大程度地依赖于选择的排序函数, 也不能显示得出局中人的隶属函数以及保证局中人的模糊值始终相同. Li[5-6]提出了支付为三角模糊数 (TFN) 的矩阵对策的两层线性规划求解方法, 可求得局中人的模糊值和相应隶属函数, 这个方法被 Bector 等[4]和 Larbani[7]称为“李登峰模型” (简称为“Li model”). 然而, Li 模型同样不能确保局中人的模糊值始终相同. 事实上, 因为局中人的期望收益是一组模糊收益的线性组合, 加上矩阵对策具有零和性, 所以局中人的值应该是相同且模糊的, 但目前的研究尚未解决此类问题.

收稿日期: 2014-04-30；**修回日期:** 2014-09-09.

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(71231003)；国家自然科学基金项目(71171055)；福建省社科规划项目(2014C132).

作者简介: 杨洁(1985−), 女, 博士生, 从事经济管理决策与对策的研究；李登峰(1965−), 男, 教授, 博士生导师, 从事经济管理决策与对策、模糊理论与运筹优化等研究.

本文基于Li模型的启示, 进一步提出一种支付为梯形模糊数(TrFN)的矩阵对策有效求解方法. 本文选择TrFN作为研究对象, 主要因为TrFN是模糊数的一般化形式(TFN、区间数和实数都是TrFN的特殊形式), 在许多应用研究中经常用TrFN表示不确定或不精确数值[15-16]. 该方法通过引入α-矩阵对策的概念, 证明了局中人双方的对策值始终相同, 从而保证任意支付为TrFN的矩阵对策都存在模糊对策值, 亦为TrFN. 此对策值的任意α-截集的上下界和局中人的最优策略容易通过求解导出的4个线性规划问题获得. 特别地, 模糊值可以通过求解模糊支付是1-截集和0-截集的辅助线性规划进行显示确定.

1 矩阵对策和梯形模糊数

1.1 矩阵对策与线性规划模型

假设$S_1=\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m\}$和$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$分别是局中人$P_1$和$P_2$的纯策略集, 局中人$P_1$的支付矩阵表示为$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 向量$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)^{\mathrm{T}}$和$\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,\cdots,z_n)^{\mathrm{T}}$是局中人$P_1$和$P_2$的混合策略. 其中: $y_i(i=1,2,\cdots,m)$和$z_j(j=1,2,\cdots,n)$分别代表局中人P_1和P_2选择纯策略$\delta_i\in S_1$和$\beta_j\in S_2$的概率; 符号"T"表示一个向量的转置. 局中人P_1和P_2的所有混合策略集分别表示为$Y=\left\{\boldsymbol{y}\Big|\sum\limits_{i=1}^m y_i=1,y_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,m\right\}$和$Z=\left\{\boldsymbol{z}\Big|\sum\limits_{j=1}^n z_j=1,z_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots,n\right\}$. 于是, 矩阵对策可以表示为$\langle Y,Z,\boldsymbol{A}\rangle$, 简称为矩阵对策$\boldsymbol{A}$.

如果局中人P_1选择策略$\boldsymbol{y}\in Y$, 局中人P_2选择策略$\boldsymbol{z}\in Z$, 则局中人P_1的期望收益可通过$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}z=\sum\limits_{i=1}^m\sum\limits_{j=1}^n y_ia_{ij}z_j$计算, 即期望收益的加权平均.

假设局中人P_1采用任意混合策略$\boldsymbol{y}\in Y$, 则局中人P_1的期望收益下值为$\upsilon_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{y})=\min\{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}|\boldsymbol{z}\in Z\}$, 即通过纯策略$\beta_j\in S_2$获得

$$\upsilon_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{y})=\min\left\{\sum_{i=1}^m y_ia_{ij}\Big|j=1,2,\cdots,n\right\}. \tag{1}$$

局中人P_1应选择$\boldsymbol{y}^*\in Y$, 以实现收益上值$\upsilon_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{y})$, 即

$$\upsilon_{\boldsymbol{A}}(y^*)=\max\{\upsilon_{\boldsymbol{A}}(y)|\boldsymbol{y}\in Y\}. \tag{2}$$

$\boldsymbol{y}^*\in Y$和$\upsilon_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{y}^*)$分别为局中人$P_1$的最优策略和期望收益上值, 表示为$\nu_{\boldsymbol{A}}=\upsilon_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{y}^*)$. 因此, 局中人$P_1$的最优策略$\boldsymbol{y}^*\in Y$及收益上值$\nu_{\boldsymbol{A}}=\upsilon_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{y}^*)$可通过求解以下线性规划问题得到:

$$\begin{aligned}&\max\ \{\upsilon_{\boldsymbol{A}}\}.\\&\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i\geqslant\upsilon_{\boldsymbol{A}},\ j=1,2,\cdots,n;\\&\quad\ \sum_{i=1}^m y_i=1,\ y_i\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m.\end{aligned} \tag{3}$$

类似地, 局中人P_2的最优策略$\boldsymbol{z}^*\in Z$和收益上值$\rho_{\boldsymbol{A}}=\omega_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{z}^*)$可通过求解以下线性规划问题得到:

$$\begin{aligned}&\min\ \{\rho_{\boldsymbol{A}}\}.\\&\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^n a_{ij}z_j\leqslant\rho_{\boldsymbol{A}},\ i=1,2,\cdots,m;\\&\quad\ \sum_{j=1}^n z_j=1,\ z_j\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n.\end{aligned} \tag{4}$$

可见, 式(3)和(4)是一对对偶线性规划问题[1], 所以$\upsilon_{\boldsymbol{A}}$的上值等于$\rho_{\boldsymbol{A}}$的下值, 此值称为矩阵对策$\boldsymbol{A}$的值, 表示为$V_{\boldsymbol{A}}=\nu_{\boldsymbol{A}}=\rho_{\boldsymbol{A}}$.

1.2 梯形模糊数和α-截集

具有隶属度$\mu_{\tilde{b}}(x)$的模糊数$\tilde{b}$是实数集R上的一种特殊模糊子集, 满足以下条件[2]: 1) 至少存在一个实数$x_0\in R$, 有$\mu_{\tilde{b}}(x_0)=1$; 2) 其隶属函数$\mu_{\tilde{a}}(x)$是左右连续的.

设$\tilde{a}=(a^l,a^{m_1},a^{m_2},a^r)$是TrFN, 其隶属函数为

$$\mu_{\tilde{a}}(x)=\begin{cases}(x-a^l)/(a^{m_1}-a^l),\ a^l\leqslant x<a^{m_1};\\1,\ a^{m_1}\leqslant x\leqslant a^{m_2};\\(a^r-x)/(a^r-a^{m_2}),\ a^{m2}<x\leqslant a^r;\\0,\ \text{else}.\end{cases} \tag{5}$$

其中: $[a^{m_1},a^{m_2}]$表示$\tilde{a}$的均值区间, a^l和a^r表示模糊数$\tilde{a}$的上值和下值. 明显地, 如果$a^{m_1}=a^{m_2}$, TrFN $\tilde{a}$转化为TFN $\tilde{a}=(a^l,a^m,a^r)$, 其中$a^m=a^{m_1}=a^{m_2}$; 如果$a^l=a^{m_1}$且$a^{m_2}=a^r$, TrFN $\tilde{a}$转化为区间数$a=[a^L,a^R]$, 其中$a^L=a^l=a^{m_1}$且$a^R=a^{m_2}=a^r$; 如果$a^l=a^{m_1}=a^{m_2}=a^r$, TrFN $\tilde{a}$就转化为实数a, 其中$a=a^l=a^{m_1}=a^{m_2}=a^r$. 相反, TFN、区间数和实数很容易改写为TrFN.

如果$a^l\geqslant 0$或至少$a^r>0$, 则称$\tilde{a}=(a^l,a^{m_1},a^{m_2},a^r)$为一个非负TrFN. 设$\tilde{a}=(a^l,a^{m_1},a^{m_2},a^r)$和$\tilde{b}=(b^l,b^{m_1},b^{m_2},b^r)$是两个非负TrFN, 则TrFN的数学运算规定为

$$\begin{aligned}&\tilde{a}+\tilde{b}=\\&(a^l+b^l,a^{m_1}+b^{m_1},a^{m_2}+b^{m_2},a^r+b^r).\end{aligned} \tag{6}$$

$$\lambda\tilde{a}=\begin{cases}(\lambda a^l,\lambda a^{m_1},\lambda a^{m_2},\lambda a^r),\ \lambda\geqslant 0;\\(\lambda a^r,\lambda a^{m_1},\lambda a^{m_2},\lambda a^l),\ \lambda<0.\end{cases} \tag{7}$$

TrFN $\tilde{a}$的α-截集定义为$\tilde{a}(\alpha)=\{x|\mu_{\tilde{a}}(x)\geqslant\alpha\}$, 其中$\alpha\in[0,1]$. 由此可得到任意TrFN $\tilde{a}$的α-截集为区间数, 表示为$\tilde{a}(\alpha)=[a^L(\alpha),a^R(\alpha)]$. 由式(5)易推导出

$$\tilde{a}(\alpha)=[\alpha a^{m_1}+(1-\alpha)a^l,\alpha a^{m_2}+(1-\alpha)a^r]. \tag{8}$$

因此, 任意TrFN的α-截集能够通过它的1-截集和0-截集求得.

根据模糊集的表现定理[2], TrFN $\tilde{a}$ 表示为

$$\tilde{a}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\otimes\tilde{a}(\alpha)\}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\otimes[a^L(\alpha),a^R(\alpha)]\},\tag{9}$$

其中 $\alpha\otimes\tilde{a}(\alpha)$ 定义为具有隶属度 $\mu_{\alpha\otimes\tilde{a}(\alpha)}$ 的模糊集. 如果 $x\in[a^L(\alpha),a^R(\alpha)]$, 则 $\mu_{\alpha\otimes\tilde{a}(\alpha)}(x)=\alpha$; 否则 $\mu_{\alpha\otimes\tilde{a}(\alpha)}(x)=0$. 根据区间数的运算法则[17], 式 (9) 可改写为

$$\tilde{a}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\otimes[\alpha\tilde{a}(1)+(1-\alpha)\tilde{a}(0)]\},\tag{10}$$

所以 $\mu_{\tilde{a}}(x)=\max\{\alpha|x\in\alpha\tilde{a}(1)+(1-\alpha)\tilde{a}(0)\}$. 由此表明, 任何 TrFN 可以通过它的 1- 截集和 0- 截集直接构建.

2　模糊支付矩阵对策及解法

2.1　α- 矩阵对策概念及模糊数

定义 1　对于给定 $\alpha\in[0,1]$, 局中人 P_1 的支付矩阵表示为 $\tilde{\boldsymbol{A}}(\alpha)=(\tilde{a}_{ij}(\alpha))_{m\times n}$, 元素 $\tilde{a}_{ij}(\alpha)$ 是模糊支付 $\tilde{a}_{ij}$ 的 α- 截集, 则称 $\tilde{\boldsymbol{A}}(\alpha)$ 是模糊支付矩阵对策 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的 α- 矩阵对策, 简称为 α- 矩阵对策 $\tilde{\boldsymbol{A}}(\alpha)$.

定义 2　对于给定 $\alpha\in[0,1]$, 如果局中人 P_1 的收益下值 $\tilde{\nu}(\alpha)$ 和 P_2 的收益上值 $\tilde{\rho}(\alpha)$ 相同, 且为 $\tilde{V}(\alpha)$, 则称 $\tilde{V}(\alpha)$ 是 α- 矩阵对策 $\tilde{\boldsymbol{A}}(\alpha)$ 的值, 或者 α- 矩阵对策 $\tilde{\boldsymbol{A}}(\alpha)$ 有值 $\tilde{V}(\alpha)$, 且 $\tilde{V}(\alpha)=\tilde{\nu}(\alpha)=\tilde{\rho}(\alpha)$.

定义 3　对于任意 $\alpha\in[0,1]$, 如果所有 α- 矩阵对策 $\tilde{\boldsymbol{A}}(\alpha)$ 有值 $\tilde{V}(\alpha)$, 则模糊支付矩阵对策 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 有模糊值 $\tilde{V}$, 可表示为

$$\tilde{V}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\otimes\tilde{V}(\alpha)\}.$$

2.2　模糊支付矩阵对策及 α- 矩阵对策

对于支付为 TrFN 的矩阵对策 $\tilde{A}$, P_1 的支付矩阵为 $\tilde{\boldsymbol{A}}=(\tilde{a}_{ij})_{m\times n}$. 根据式 (6)、(7) 及矩阵对策 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的零和性, 可知 P_1 的期望收益 $\tilde{E}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{A}}z$ 为

$$\begin{aligned}\tilde{E}=\Big(&\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}^l y_i z_j,\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}^{m_1}y_i z_j,\\&\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}^{m_2}y_i z_j,\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}^r y_i z_j\Big),\end{aligned}$$

P_2 的期望收益为

$$\begin{aligned}-\tilde{E}=\Big(&\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}^r y_i z_j,\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}^{m_2}y_i z_j,\\&\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}^{m_1}y_i z_j,\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}^l y_i z_j\Big).\end{aligned}$$

一般的, P_1 的期望收益下值和 P_2 的期望收益上值都为 TrFN, 分别表示为 $\tilde{\upsilon}=(\upsilon^l,\upsilon^{m_1},\upsilon^{m_2},\upsilon^r)$ 和 $\tilde{\omega}=(\omega^l,\omega^{m_1},\omega^{m_2},\omega^r)$. 文献 [2-6] 已证明 $\tilde{\upsilon}\leqslant\tilde{\omega}$. 如果 $\tilde{\upsilon}=\tilde{\omega}$, 则值 $\tilde{V}$ 是支付为 TrFN 的矩阵对策 $\tilde{A}$ 的模糊值, 其中 $\tilde{V}=\tilde{\upsilon}=\tilde{\omega}$.

根据定义 1 ～ 定义 3, 提出求解支付为 TrFN 的任意矩阵对策 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的线性规划法.

对于任意 $\alpha\in[0,1]$, 有 α- 矩阵对策 $\tilde{\boldsymbol{A}}(\alpha)$, 其中局中人 P_1 支付矩阵为 $\tilde{\boldsymbol{A}}(\alpha)=(\tilde{a}_{ij}(\alpha))_{m\times n}\,(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$. 因为 TrFN $\tilde{a}_{ij}$ 的 α- 截集 $\tilde{a}_{ij}(\alpha)$ 是区间数, 由式 (8) 容易推导

$$\tilde{a}_{ij}(\alpha)=[\alpha a_j^{m_1}+(1-\alpha)a_{ij}^l,\alpha a_{ij}^{m_2}+(1-\alpha)a_{ij}^r].\tag{11}$$

因此, α- 矩阵对策 $\tilde{\boldsymbol{A}}(\alpha)$ 是区间支付矩阵对策, 简称为区间 α- 矩阵对策.

对于区间支付 $\tilde{a}_{ij}(\alpha)\,(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 中的任意 $a_{ij}(\alpha)$, 支付矩阵表示为 $\boldsymbol{A}(\alpha)=(a_{ij}(\alpha))_{m\times n}$. 由式 (1) 和 (2) 容易得出 P_1 的矩阵对策 $\boldsymbol{A}(\alpha)$ 的值 $\nu(\alpha)$ 与所有 $a_{ij}(\alpha)$ 密切相关. 换言之, $\nu(\alpha)$ 是区间支付 $\tilde{a}_{ij}(\alpha)$ 中 $a_{ij}(\alpha)$ 的函数, 表述为 $\nu(\alpha)=\upsilon(a_{ij}(\alpha))$ (或者 $\upsilon(\boldsymbol{A}(\alpha))$). 类似地, 局中人 P_1 的最优策略 $\mathrm{y}^*(\alpha)\in Y$ 也是 $a_{ij}(\alpha)$ 的函数, 表述为 $\boldsymbol{y}^*(\alpha)=\boldsymbol{y}^*((a_{ij}(\alpha)))$ (或 $\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{A}(\alpha))$). 同理, 局中人 P_2 的支付 $\rho(\alpha)$ 和最优策略 $\boldsymbol{z}^*(\alpha)\in Z$ 是区间支付 $\tilde{a}_{ij}(\alpha)$ 中 $a_{ij}(\alpha)$ 的函数, 分别表示为 $\rho(\alpha)=\omega(a_{ij}(\alpha))$ (或 $\omega(\boldsymbol{A}(\alpha))$) 和 $\boldsymbol{z}^*(\alpha)=\boldsymbol{z}^*(a_{ij}(\alpha))$ (或 $\boldsymbol{z}^*(\boldsymbol{A}(\alpha))$).

由式 (1) 和 (2), 矩阵对策 $\boldsymbol{A}(\alpha)$ 中 P_1 的收益 $\nu(\alpha)$ 是区间支付 $\tilde{a}_{ij}(\alpha)$ 中 a_{ij} 的单调非减函数. 因为 $y_i\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,m)$ 且 $\sum\limits_{i=1}^m y_i=1$, 所以对于 $\tilde{a}_{ij}(\alpha)$ 中的任意 $a_{ij}(\alpha)$ 和 $a'_{ij}(\alpha)$, 如果 $a_{ij}(\alpha)\leqslant a'_{ij}(\alpha)$, 则有 $\sum\limits_{i=1}^m y_i a_{ij}(\alpha)\leqslant\sum\limits_{i=1}^m y_i a'_{ij}(\alpha)$. 因此, 由

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}\Big\{\sum_{i=1}^m y_i a_{ij}(\alpha)\Big\}\leqslant\min_{1\leqslant j\leqslant n}\Big\{\sum_{i=1}^m y_i a'_{ij}(\alpha)\Big\}$$

可直接推导出

$$\max_{\mathrm{y}\in Y}\min_{1\leqslant j\leqslant n}\Big\{\sum_{i=1}^m y_i a_{ij}(\alpha)\Big\}\leqslant\max_{\mathrm{y}\in Y}\min_{1\leqslant j\leqslant n}\Big\{\sum_{i=1}^m y_i a'_{ij}(\alpha)\Big\},$$

即 $\upsilon(a_{ij}(\alpha))\leqslant\upsilon(a'_{ij}(\alpha))$ 或 $\upsilon(\boldsymbol{A}(\alpha))\leqslant\upsilon(\boldsymbol{A}'(\alpha))$.

由矩阵对策的最小最大值原理[1], 矩阵对策 $\boldsymbol{A}(\alpha)=(a_{ij}(\alpha))_{m\times n}$ 有解, 表示为 $V(\alpha)=V(a_{ij}(\alpha))$, 且 $V(\alpha)=\nu(\alpha)=\rho(\alpha)$. 由上述讨论可知, 局中人的期望支付是区间支付的线性组合, $V(\alpha)$ 是区间支付 $\tilde{a}_{ij}(\alpha)$ 中 $a_{ij}(\alpha)\,(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 的一个单调非减函数. 因此, 在 α- 矩阵对策 $\tilde{A}(\alpha)$ 中, 局中人 P_1 的区间支付 $\nu^R(\alpha)$ 的上值和最优策略 $\boldsymbol{y}^{R*}(\alpha)\in Y$ 分别对应为 $\nu^R(\alpha)=\upsilon^R(a_{ij}^R(\alpha))$ 和 $\boldsymbol{y}^{R*}(\alpha)=\boldsymbol{y}^{R*}(a_{ij}^R(\alpha))$. 由式 (3)可知, $(\nu^R(\alpha),\boldsymbol{y}^{R*}(\alpha))$ 是下列线性规划的最优解:

$$\max\ \{\upsilon^R(\alpha)\}.$$
$$\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}^R(\alpha)y_i^R(\alpha) \geqslant \upsilon^R(\alpha),\ j=1,2,\cdots,n;$$
$$\sum_{i=1}^{m} y_i^R(\alpha)=1,\ i=1,2,\cdots,m. \tag{12}$$

其中 $y_i^R(\alpha)\geqslant 0\,(i=1,2,\cdots,m)$ 和 $\upsilon^R(\alpha)$ (无符号约束) 是决策变量.

不失一般性, 假设

$$\upsilon^R(\alpha)>0;$$
$$x_i^R(\alpha)=y_i^R(\alpha)/\upsilon^R(\alpha),\ i=1,2,\cdots,m. \tag{13}$$

则有 $x_i^R(\alpha)\geqslant 0\,(i=1,2,\cdots,m)$, 且

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^R(\alpha)=\sum_{i=1}^{m}(y_i^R(\alpha)/\upsilon^R(\alpha))=1/\upsilon^R(\alpha). \tag{14}$$

所以, 式 (12) 能改写为如下线性规划问题:

$$\min\ \Big\{\sum_{i=1}^{m} x_i^R(\alpha)\Big\}.$$
$$\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}^R(\alpha)x_i^R(\alpha)\geqslant 1,\ j=1,2,\cdots,n;$$
$$x_i^R(\alpha)\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m. \tag{15}$$

结合式 (11) 和 (15), 可得

$$\min\Big\{\sum_{i=1}^{m} x_i^R(\alpha)\Big\}.$$
$$\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{m}[\alpha a_{ij}^{m_2}+(1-\alpha)a_{ij}^r]x_i^R(\alpha)\geqslant 1,$$
$$j=1,2,\cdots,n;$$
$$x_i^R(\alpha)\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m. \tag{16}$$

运用线性规划的单纯形法, 容易求得式 (16) 的最优解, 表示为 $\boldsymbol{x}^{R*}(\alpha)=(x_1^{R*}(\alpha),x_2^{R*}(\alpha),\cdots,x_m^{R*}(\alpha))^{\mathrm{T}}$. 同理, 根据式 (13) 和 (14), 可求得 $\nu^R(\alpha)$ 的上值和对应的最优策略

$$\boldsymbol{y}^{R*}(\alpha)=(y_1^{R*}(\alpha),y_2^{R*}(\alpha),\cdots,y_m^{R*}(\alpha))^{\mathrm{T}}.$$

其中 $y_i^{R*}(\alpha)=\nu^R(\alpha)x_i^{R*}(\alpha)$, $\nu^R(\alpha)=1\Big/\sum_{i=1}^{m}x_i^{R*}(\alpha)$, $i=1,2,\cdots,m$.

类似地, 在 α- 矩阵对策 $\tilde{\boldsymbol{A}}(\alpha)$ 中, 局中人 P_1 的区间支付下值 $\nu^L(\alpha)$ 和最优策略 $\boldsymbol{y}^{L*}(\alpha)\in Y$ 分别对应为 $\nu^L(\alpha)=\upsilon^L(a_{ij}^L(\alpha))$ 和 $\boldsymbol{y}^{L*}(\alpha)=\boldsymbol{y}^{L*}(a_{ij}^L(\alpha))$. 根据式 (3), $(\nu^L(\alpha),\boldsymbol{y}^{L*}(\alpha))$ 是如下线性规划的最优解:

$$\max\ \{\upsilon^L(\alpha)\}.$$
$$\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}^L(\alpha)y_i^L(\alpha)\geqslant \upsilon^L(\alpha),\ j=1,2,\cdots,n.$$
$$\sum_{i=1}^{m} y_i^L(\alpha)=1, y_i^L(\alpha)\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m. \tag{17}$$

其中 $y_i^L(\alpha)\,(i=1,2,\cdots,m)$ 和 $\upsilon^L(\alpha)$ (无符号约束) 是决策变量.

令

$$x_i^L(\alpha)=y_i^L(\alpha)/\upsilon^L(\alpha),\ i=1,2,\cdots,m, \tag{18}$$

则有

$$x_i^L(\alpha)\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m;$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i^L(\alpha)=\sum_{i=1}^{m}(y_i^L(\alpha)/\upsilon^L(\alpha))=1/\upsilon^L(\alpha). \tag{19}$$

因此, 式 (17) 可改写为如下线性规划问题:

$$\min\ \Big\{\sum_{i=1}^{m} x_i^L(\alpha)\Big\}.$$
$$\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}^L(\alpha)x_i^L(\alpha)\geqslant 1,\ j=1,2,\cdots,n;$$
$$x_i^L(\alpha)\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m. \tag{20}$$

结合式 (11) 和 (20), 可得

$$\min\ \Big\{\sum_{i=1}^{m} x_i^L(\alpha)\Big\}.$$
$$\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{m}[\alpha a_{ij}^{m_1}+(1-\alpha)a_{ij}^l];$$
$$x_i^L(\alpha)\geqslant 1,\ j=1,2,\cdots,n;$$
$$x_i^L(\alpha)\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m. \tag{21}$$

运用线性规划的单纯形法, 容易求得式 (21) 的最优解, 表示为 $\boldsymbol{x}^{L*}(\alpha)=(x_1^{L*}(\alpha),x_2^{L*}(\alpha),\cdots,x_m^{L*}(\alpha))^{\mathrm{T}}$. 因此, 根据式 (18) 和 (19), 可求得下值 $\nu^L(\alpha)$ 和其对应的最优策略为

$$\boldsymbol{y}^{L*}(\alpha)=(y_1^{L*}(\alpha),y_2^{L*}(\alpha),\cdots,y_m^{L*}(\alpha))^{\mathrm{T}}.$$

其中: $y_i^{L*}(\alpha)=\nu^L(\alpha)x_i^{L*}(\alpha)$, $\nu^L(\alpha)=1\Big/\sum_{i=1}^{m}x_i^{L*}(\alpha)$, $i=1,2,\cdots,m$. 因此, 能够求得 α- 矩阵对策 $\tilde{A}(\alpha)$ 中局中人 P_1 的区间支付的下值 $\nu^L(\alpha)$ 和上值 $\nu^R(\alpha)$, 表示为 $\tilde{\nu}(\alpha)=[\nu^L(\alpha),\nu^R(\alpha)]$. 明显地, $\tilde{\nu}(\alpha)$ 是 P_1 的模糊支付 $\tilde{\upsilon}$ 的 α- 截集, 亦为 TrFN.

同理, 在 α- 矩阵对策 $\tilde{A}(\alpha)$ 中局中人 P_2 的区间支付的上值 $\rho^R(\alpha)$ 和下值 $\rho^L(\alpha)$ 表示为

$$\max\ \Big\{\sum_{j=1}^{n} t_j^R(\alpha)\Big\}.$$
$$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n}[\alpha a_{ij}^{m_2}+(1-\alpha)a_{ij}^r];$$
$$t_j^R(\alpha)\leqslant 1,\ i=1,2,\cdots,m;$$
$$t_j^R(\alpha)\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n. \tag{22}$$

$$\max\ \Big\{\sum_{j=1}^{n} t_j^L(\alpha)\Big\}.$$
$$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n}[\alpha a_{ij}^{m_1}+(1-\alpha)a_{ij}^l];$$
$$t_j^L(\alpha)\leqslant 1,\ i=1,2,\cdots,m;$$
$$t_j^L(\alpha)\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n. \tag{23}$$

其最优解分别为

$$\boldsymbol{t}^{R*}(\alpha)=(t_1^{R*}(\alpha),t_2^{R*}(\alpha),\cdots,t_n^{R*}(\alpha))^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{t}^{L*}(\alpha)=(t_1^{L*}(\alpha),t_2^{L*}(\alpha),\cdots,t_n^{L*}(\alpha))^{\mathrm{T}}.$$

因此, 能够求得α-矩阵对策$\tilde{A}(\alpha)$中P_2的区间支付下值$\rho^L(\alpha)$和上值$\rho^R(\alpha)$, 表示为$\tilde{\rho}(\alpha)=[\rho^L(\alpha),\rho^R(\alpha)]$. 明显地, $\tilde{\rho}(\alpha)$是P_2的模糊支付$\tilde{\omega}$的α-截集, 亦为TrFN.

由于式(16)和(22)是一对对偶线性规划问题, 通过线性规划的对偶定理[1], $\sum\limits_{i=1}^{m}x_i^R(\alpha)$的下值等于$\sum\limits_{j=1}^{n}t_j^R(\alpha)$的上值, 即$\nu^R(\alpha)=\rho^R(\alpha)$. 同理, 式(21)和(23)也是一对对偶线性规划问题. 因此, $\nu^L(\alpha)=\rho^L(\alpha)$.

综上, P_1的上值$\tilde{\nu}(\alpha)=[\nu^L(\alpha),\nu^R(\alpha)]$等于$P_2$下值$\tilde{\rho}(\alpha)=[\rho^L(\alpha),\rho^R(\alpha)]$, $\tilde{V}(\alpha)$是支付为TrFN的矩阵对策$\tilde{A}$的模糊支付$\tilde{V}$的α-截集. 由此得出以下结论:

定理1　对于任意$\alpha\in[0,1]$, α-矩阵对策$\tilde{A}(\alpha)$有区间值$\tilde{V}(\alpha)=[V^L(\alpha),V^R(\alpha)]$, 其上值、下值和局中人的最优策略可以分别通过求解式(16)、(21)～(23)证得.

定理2　任意支付为TrFN的矩阵对策$\tilde{A}$总有模糊值$\tilde{V}$, 且是TrFN, 表示为

$$\tilde{V}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\otimes\tilde{V}(\alpha)\}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\otimes[V^L(\alpha),V^R(\alpha)]\}.$$

证明　对于任意$\alpha\in[0,1]$, 根据定理1, α-矩阵对策$\tilde{A}(\alpha)$有一个区间类型值$\tilde{V}(\alpha)=[V^L(\alpha),V^R(\alpha)]$. 因此, 由定义3可直接推导出支付为TrFN的矩阵对策$\tilde{A}$有一个模糊值$\tilde{V}$. 如上所述, 模糊值$\tilde{V}$也是TrFN, 因为局中人的期望支付是TrFN支付的线性组合. 通过式(9)可证明定理2.

特别地, 当$\alpha=1$时, 根据式(16)和(21)构造如下线性规划:

$$\begin{aligned}&\min\ \Big\{\sum_{i=1}^{m}x_i^R(1)\Big\}.\\&\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{m}a_{ij}^{m_2}x_i^R(1)\geqslant 1,\ j=1,2,\cdots,n;\\&\quad x_i^R(1)\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m.\end{aligned}\tag{24}$$

$$\begin{aligned}&\min\ \Big\{\sum_{i=1}^{m}x_i^L(1)\Big\}.\\&\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{m}a_{ij}^{m_1}x_i^L(1)\geqslant 1,\ j=1,2,\cdots,n;\\&\quad x_i^L(1)\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m.\end{aligned}\tag{25}$$

可求得

$$\begin{cases}V^{m_1}=V^L(1)=\nu^L(1),\\V^{m_2}=V^R(1)=\nu^R(1).\end{cases}\tag{26}$$

当$\alpha=0$时, 根据式(16)和(21)构造如下线性规划:

$$\begin{aligned}&\min\ \Big\{\sum_{i=1}^{m}x_i^R(0)\Big\}.\\&\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{m}a_{ij}^{r}x_i^R(0)\geqslant 1,\ j=1,2,\cdots,n;\\&\quad x_i^R(0)\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m.\end{aligned}\tag{27}$$

$$\begin{aligned}&\min\ \Big\{\sum_{i=1}^{m}x_i^L(0)\Big\}.\\&\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{m}a_{ij}^{l}x_i^L(0)\geqslant 1,\ j=1,2,\cdots,n;\\&\quad x_i^L(0)\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m.\end{aligned}\tag{28}$$

可求得

$$\begin{cases}V^{l}=V^L(0)=\nu^L(0),\\V^{r}=V^R(0)=\nu^R(0).\end{cases}\tag{29}$$

定理得证. □

定理3　任意支付为TrFN的矩阵对策$\tilde{A}$的模糊值可表示为

$$\tilde{V}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\otimes[\alpha V^{m_1}+(1-\alpha)V^l,\ \alpha V^{m_2}+(1-\alpha)V^r]\},$$

也可表示为$\tilde{V}=(V^l,V^{m_1},V^{m_2},V^r)$, 其参数可分别通过求解式(24)、(25)、(27)和(28)获得.

证明　由式(8)、(26)和(29)可知, 任意支付为TrFN的矩阵对策$\tilde{A}$的模糊值$\tilde{V}$的α-截集$\tilde{V}(\alpha)=[V^L(\alpha),V^R(\alpha)]$, 求解得

$$\tilde{V}(\alpha)=[\alpha V^{m_1}+(1-\alpha)V^l,\alpha V^{m_2}+(1-\alpha)V^r],$$

其中$\alpha\in[0,1]$. 根据定理2, 模糊值$\tilde{V}$能表达为

$$\tilde{V}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\otimes[\alpha V^{m_1}+(1-\alpha)V^l,\ \alpha V^{m_2}+(1-\alpha)V^r]\},$$

可直接推导出$\tilde{V}$的隶属函数为

$$\mu_{\tilde{V}}(x)=\begin{cases}(x-V^l)/(V^{m_1}-V^l),\ V^l\leqslant x<V^{m_1};\\1,\ V^{m_1}\leqslant x\leqslant V^{m_2};\\(V^r-x)/(V^r-V^{m_2}),\ V^{m_2}<x\leqslant V^r.\end{cases}$$

因此, 可知任意支付为TrFN的矩阵对策$\tilde{A}$的模糊值$\tilde{V}$恰好为TrFN. □

结合定理1和定理3可知, 任意支付为TrFN的矩阵对策$\tilde{A}$的模糊值$\tilde{V}$的上值、下值和区间均值以及局中人的最优策略容易通过求解模糊支付为1-截集和0-截集的矩阵对策得到.

3 算例与方法比较

3.1 本文方法及结果

为了便于进行方法比较, 引用文献[3]中的算例: 假设制造商和市场环境均为理性局中人, 现制造商 P_1 在市场环境 P_2 中选择最佳生产策略, P_1 有两个生产策略(扩大生产策略 δ_1 和减少生产策略 δ_2), P_2 有两个策略(市场繁荣策略 β_1 和市场萎靡策略 β_2). 由于信息不完全, 无法确定制造商的精确收益值, 假设制造商的收益矩阵 $\tilde{A}$ 具体如下:

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}(175,180,190) & (150,156,158)\\ (80,90,100) & (175,180,190)\end{bmatrix}.$$

算例中的数据为TFN (TrFN的特殊形式), 适用于本文方法. 其中: $(175,180,190)$ 表示市场 P_2 选择市场繁荣策略 β_1 时, 制造商 P_1 选择扩大生产策略 δ_1 的期望收益在 175～190 之间, 其他模糊数作类似解释.

根据式(16)和(22)构造如下线性规划问题, 求解可得支付为TFN的矩阵对策 $\tilde{A}$ 的 α-矩阵对策的上值和最优策略, 结果如表1所示.

$$\begin{aligned}&\min\ \{x_1^R(\alpha)+x_2^R(\alpha)\};\\ &\text{s.t. } [180\alpha+190(1-\alpha)]x_1^R(\alpha)+\\ &\quad [90\alpha+100(1-\alpha)]x_2^R(\alpha)\geqslant 1,\\ &\quad [156\alpha+158(1-\alpha)]x_1^R(\alpha)+\\ &\quad [180\alpha+190(1-\alpha)]x_2^R(\alpha)\geqslant 1,\\ &\quad x_1^R(\alpha)\geqslant 0, x_2^R(\alpha)\geqslant 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\max\ \{t_1^R(\alpha)+t_2^R(\alpha)\};\\ &\text{s.t. } [180\alpha+190(1-\alpha)]t_1^R(\alpha)+\\ &\quad [156\alpha+158(1-\alpha)]t_2^R(\alpha)\leqslant 1,\\ &\quad [90\alpha+100(1-\alpha)]t_1^R(\alpha)+\\ &\quad [180\alpha+190(1-\alpha)]t_2^R(\alpha)\leqslant 1,\\ &\quad t_1^R(\alpha)\geqslant 0, t_2^R(\alpha)\geqslant 0.\end{aligned}$$

同理, 根据式(21)和(23)构造如下线性规划问题, 求解可得支付为TFN的矩阵对策 $\tilde{A}$ 的 α-矩阵对策的下值和最优策略, 结果如表1所示.

$$\begin{aligned}&\min\ \{x_1^L(\alpha)+x_2^L(\alpha)\};\\ &\text{s.t. } [180\alpha+175(1-\alpha)]x_1^L(\alpha)+\\ &\quad [90\alpha+80(1-\alpha)]x_2^L(\alpha)\geqslant 1,\\ &\quad [156\alpha+150(1-\alpha)]x_1^L(\alpha)+\\ &\quad [180\alpha+175(1-\alpha)]x_2^L(\alpha)\geqslant 1,\\ &\quad x_1^L(\alpha)\geqslant 0, x_2^L(\alpha)\geqslant 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\max\ \{t_1^L(\alpha)+t_2^L(\alpha)\};\\ &\text{s.t. } [180\alpha+175(1-\alpha)]t_1^L(\alpha)+\\ &\quad [156\alpha+150(1-\alpha)]t_2^L(\alpha)\leqslant 1,\\ &\quad [90\alpha+80(1-\alpha)]t_1^L(\alpha)+\\ &\quad [180\alpha+175(1-\alpha)]t_2^L(\alpha)\leqslant 1,\\ &\quad t_1^L(\alpha)\geqslant 0, t_2^L(\alpha)\geqslant 0.\end{aligned}$$

表 1 α-矩阵对策的区间上限、下限及局中人的最优策略

置信水平 α	0	0.1	0.2	0.3
$V^R(\alpha)$ 上限	166.393 4	165.831 7	165.275 7	164.725 7
$(y_1^{R*}(\alpha), y_2^{R*}(\alpha))^{\mathrm{T}}$	(0.737 7, 0.262 3)	(0.742 6, 0.257 4)	(0.747 5, 0.252 5)	(0.752 5, 0.247 5)
$(z_1^{R*}(\alpha), z_2^{R*}(\alpha))^{\mathrm{T}}$	(0.262 3, 0.737 7)	(0.257 4, 0.742 6)	(0.252 5, 0.747 5)	(0.247 5, 0.752 5)
$V^L(\alpha)$ 下限	155.208 3	155.792 7	156.377 1	156.961 5
$(y_1^{L*}(\alpha), y_2^{L*}(\alpha))^{\mathrm{T}}$	(0.791 7, 0.208 3)	(0.791 5, 0.208 5)	(0.791 2, 0.208 8)	(0.791 0, 0.209 0)
$(z_1^{L*}(\alpha), z_2^{L*}(\alpha))^{\mathrm{T}}$	(0.208 3, 0.791 7)	(0.208 5, 0.791 5)	(0.208 8, 0.791 2)	(0.209 0, 0.791 0)
$\tilde{V}(\alpha)=[V^L(\alpha), V^R(\alpha)]$	[155.208 3, 166.393 4]	[155.792 7, 165.831 7]	[156.377 1, 165.275 7]	[156.961 5, 164.725 7]
置信水平 α	0.4	0.5	0.6	0.7
$V^R(\alpha)$ 上限	164.181 8	163.644 1	163.112 6	162.587 6
$(y_1^{R*}(\alpha), y_2^{R*}(\alpha))^{\mathrm{T}}$	(0.757 6, 0.242 4)	(0.762 7, 0.237 3)	(0.767 9, 0.232 1)	(0.773 2, 0.226 8)
$(z_1^{R*}(\alpha), z_2^{R*}(\alpha))^{\mathrm{T}}$	(0.242 4, 0.757 6)	(0.237 3, 0.762 7)	(0.232 1, 0.767 9)	(0.226 8, 0.773 2)
$V^L(\alpha)$ 下限	157.545 9	158.130 3	158.714 8	159.299 2
$(y_1^{L*}(\alpha), y_2^{L*}(\alpha))^{\mathrm{T}}$	(0.790 4, 0.209 6)	(0.790 2, 0.209 8)	(0.789 9, 0.210 1)	(0.790 8, 0.209 2)
$(z_1^{L*}(\alpha), z_2^{L*}(\alpha))^{\mathrm{T}}$	(0.209 6, 0.790 4)	(0.209 8, 0.790 2)	(0.210 1, 0.789 9)	(0.209 2, 0.790 8)
$\tilde{V}(\alpha)=[V^L(\alpha), V^R(\alpha)]$	[157.545 9, 164.181 8]	[158.130 3, 163.644 1]	[158.714 8, 163.112 6]	[159.299 2, 162.587 6]
置信水平 α	0.8	0.9	1.0	
$V^R(\alpha)$ 上限	162.069 2	161.557 5	161.052 6	
$(y_1^{R*}(\alpha), y_2^{R*}(\alpha))^{\mathrm{T}}$	(0.778 5, 0.221 5)	(0.784 0, 0.216 0)	(0.789 5, 0.210 5)	
$(z_1^{R*}(\alpha), z_2^{R*}(\alpha))^{\mathrm{T}}$	(0.221 5, 0.778 5)	(0.216 0, 0.784 0)	(0.210 5, 0.789 5)	
$V^L(\alpha)$ 下限	159.883 7	160.468 2	161.052 6	
$(y_1^{L*}(\alpha), y_2^{L*}(\alpha))^{\mathrm{T}}$	(0.789 9, 0.210 1)	(0.789 7, 0.210 3)	(0.789 5, 0.210 5)	
$(z_1^{L*}(\alpha), z_2^{L*}(\alpha))^{\mathrm{T}}$	(0.210 1, 0.789 9)	(0.210 3, 0.789 7)	(0.210 5, 0.789 5)	
$\tilde{V}(\alpha)=[V^L(\alpha), V^R(\alpha)]$	[159.883 7, 162.069 2]	[160.468 2, 161.557 5]	161.052 6	

由表1可知, 在1-矩阵对策中, 当局中人 P_1 采用最优策略 $(0.789\,5, 0.210\,5)^{\mathrm{T}}$ 且局中人 P_2 选择最优策略 $(0.210\,5, 0.789\,5)^{\mathrm{T}}$ 时, 对策值是 $\tilde{V}(1)=161.052\,6$. 很明显, 1-矩阵对策的区间上下值是相同的, 即 $V^L(1)$

$= V^R(1) = 161.0526$. 因此, 区间数 $\tilde{V}(1)$ 退化为实数 161.0526. 同理, 0-矩阵对策值为 $\tilde{V}(0) = [155.2083, 166.3934]$. 此外, 容易得出支付为TFN的矩阵对策 $\tilde{A}$ 的模糊值为 $\tilde{V}^* = (155.2083, 161.0526, 166.3934)$.

3.2 其他方法及结果

3.2.1 Campos方法

对局中人 P_1 和 P_2 的线性规划问题构建如下:

$$\begin{aligned}
&\min\ \{u_1^C + u_2^C\};\\
&\text{s.t. } 545u_1^C + 270u_2^C \geqslant 3 - 0.29(1-\lambda),\\
&\qquad 464u_1^C + 545u_2^C \geqslant 3 - 0.29(1-\lambda),\\
&\qquad u_1^C \geqslant 0,\ u_2^C \geqslant 0.\\
&\max\{v_1^C + v_2^C\};\\
&\text{s.t. } 545v_1^C + 464v_2^C \leqslant 3 + 0.46(1-\tau),\\
&\qquad 270v_1^C + 545v_2^C \leqslant 3 + 0.46(1-\tau),\\
&\qquad v_1^C \geqslant 0,\ v_2^C \geqslant 0.
\end{aligned}$$

通过求解可得局中人的最优策略和期望收益上值分别为

$$\begin{aligned}
&(y_1^{*C}, y_2^{*C})^{\rm T} = (0.7725, 0.2275)^{\rm T},\\
&\nu^{*C}(\lambda) = 160.8099/[1 - 0.0967(1-\lambda)],\\
&(z_1^{*C},\ z_2^{*C})^{\rm T} = (0.2275, 0.7725)^{\rm T},\\
&\omega^{*C}(\tau) = 160.8099/[1 + 0.1533(1-\tau)].
\end{aligned}$$

很明显, $\nu^{*C}(\lambda) \geqslant \omega^{*C}(\tau)$. 此外, $\omega^{*C}(\tau)$ 是一个以 $\tau \in [0,1]$ 为参数的增函数, $\nu^{*C}(\lambda)$ 是一个以 $\lambda \in [0,1]$ 为参数的减函数. 容易得到, 当 $\lambda^* = \tau^* = 1$ 时, $\nu^{*C}(1) = \omega^{*C}(1) = 160.8099$. 因此, Campos 认为支付为TFN的矩阵对策 $\tilde{A}$ 有模糊值"接近160.8099".

3.2.2 Bector方法

类似于Campos方法, Bector等运用Yager系数[18], 对局中人 P_1 和 P_2 的线性规划问题构建如下:

$$\begin{aligned}
&\max\ \{\nu^B\};\\
&\text{s.t. } 545y_1^B + 270y_2^B \geqslant 3\nu^B - 0.29(1-\lambda),\\
&\qquad 464y_1^B + 545y_2^B \geqslant 3\nu^B - 0.29(1-\lambda),\\
&\qquad y_1^B + y_2^B = 1, y_1^B \geqslant 0, y_2^B \geqslant 0.\\
&\min\ \{\omega^B\};\\
&\text{s.t. } 545z_1^B + 464z_2^B \leqslant 3\omega^B + 0.46(1-\tau),\\
&\qquad 270z_1^B + 545z_2^B \leqslant 3\omega^B + 0.46(1-\tau),\\
&\qquad z_1^B + z_2^B = 1, z_1^B \geqslant 0, z_2^B \geqslant 0.
\end{aligned}$$

通过求解可得两个局中人的最优策略和期望收益上值分别为

$$\begin{aligned}
&(y_1^{*B}, y_2^{*B})^{\rm T} = (0.7725, 0.2275)^{\rm T},\\
&\nu^{*B}(\lambda) = 160.8099 + 0.0967(1-\lambda),\\
&(z_1^{*B}, z_2^{*B})^{\rm T} = (0.2275, 0.7725)^{\rm T},\\
&\omega^{*B}(\tau) = 160.8099 - 0.1533(1-\tau).
\end{aligned}$$

可见, Campos方法所得与Bector方法所得明显不同, 且当 $\lambda \neq 1$ 或 $\tau \neq 1$ 时两个局中人的值截然不同.

3.2.3 Li 模 型

局中人 P_1 的第1层线性规划问题构造如下:

$$\begin{aligned}
&\max\ \{f^{Dm} = \upsilon^{Dm}\}.\\
&\text{s.t. } 175y_1^D + 80y_2^D \geqslant \upsilon^{Dl},\\
&\qquad 150y_1^D + 175y_2^D \geqslant \upsilon^{Dl},\\
&\qquad 180y_1^D + 90y_2^D \geqslant \upsilon^{Dm},\\
&\qquad 156y_1^D + 180y_2^D \geqslant \upsilon^{Dm},\\
&\qquad 190y_1^D + 100y_2^D \geqslant \upsilon^{Dr},\\
&\qquad 158y_1^D + 190y_2^D \geqslant \upsilon^{Dr},\\
&\qquad \upsilon^{Dl} \leqslant \upsilon^{Dm} \leqslant \upsilon^{Dr},\\
&\qquad y_1^D + y_2^D = 1,\\
&\qquad y_1^D \geqslant 0,\ y_2^D \geqslant 0.
\end{aligned}$$

利用线性规划的单纯形法可得最优解为

$$(\boldsymbol{y}^{*D}, \upsilon^{0Dl}, \upsilon^{*Dm}, \upsilon^{0Dr}),$$

其中: $\boldsymbol{y}^{*D} = (0.7895, 0.2105)^{\rm T}$, $\upsilon^{0Dl} = 61.398$, $\upsilon^{*Dm} = 161.05$, $\upsilon^{0Dr} = 163.063$.

局中人 P_1 的第2层线性规划问题构造如下:

$$\begin{aligned}
&\max\ \{f^{Dl} = \upsilon^{Dl}\};\\
&\text{s.t. } \upsilon^{Dl} \leqslant 175 \times 0.7895 + 80 \times 0.2105,\\
&\qquad \upsilon^{Dl} \leqslant 150 \times 0.7895 + 175 \times 0.2105,\\
&\qquad \upsilon^{Dl} \leqslant 161.05.\\
&\max\ \{f^{Dr} = \upsilon^{Dr}\};\\
&\text{s.t. } \upsilon^{Dr} \leqslant 190 \times 0.7895 + 100 \times 0.2105,\\
&\qquad \upsilon^{Dr} \leqslant 158 \times 0.7895 + 190 \times 0.2105,\\
&\qquad \upsilon^{Dr} \geqslant 161.05.
\end{aligned}$$

容易求得最优解是 $\upsilon^{*Dl} = 155.0025$ 和 $\upsilon^{*Dr} = 164.736$. 因此, 局中人 P_1 的最优策略和期望收益下值分别是 $\boldsymbol{y}^{*D} = (0.7895, 0.2105)^{\rm T}$ 和 $\tilde{\upsilon}^{*D} = (155.0025, 161.05, 164.736)$.

同理, 局中人 P_2 的最优策略和期望收益上值分别是 $\boldsymbol{z}^* = (0.2105, 0.7895)^{\rm T}$ 和 $\tilde{\omega}^{*D} = (155.2625, 161.05, 171.055)$, 且 $\tilde{\upsilon}^{*D} \leqslant \tilde{\omega}^{*D}$.

3.3 方法比较

1) 建模思想及方法的比较. 本文方法、Li模型和Bector法的局中人收益值都为TFN, 相比于Campos模型的实数, 更符合模糊数的线性组合逻辑.

2) 求解过程及方法的比较. Campos和Bector提出的两种方法都是模糊化方法, 但都不能显示得到支付为TFN的矩阵对策的模糊值隶属函数. Li模型发展了TFN的排序关系和多目标规划以计算局中人的模糊值, 但模型需依赖于所选择的TFN的排序关系. 本文方法发展了 α-矩阵对策和模糊值概念, 通

过线性规划的对偶定理和模糊集表示定理证明了支付为TrFN的任意矩阵对策始终存在一个TrFN解. 另外, 支付为TrFN的任意矩阵对策的模糊值α-截集的上下值和局中人的最优策略很容易通过求解4个模糊支付在1-截集和0-截集约束下的线性规划获得.

3) 计算结果的比较. 本文给出的方法可以显示求出支付为TFN的矩阵对策$\tilde{A}$的模糊值和局中人的最优策略, 以获得模糊值$\tilde{V}^*$的上下值和均值. 此外, 局中人通常有相同的模糊值$\tilde{V}^*$, 即局中人P_1的收益(损失)就是局中人P_2的损失(收益), 这符合支付为TFN的矩阵对策的"零和"逻辑特征. 虽然Li模型也能求得局中人的模糊值, 但不能确保两个局中人的模糊值始终相同.

4) 计算复杂性的比较. 本文方法需要求解4个支付为TFN的矩阵对策的线性规划问题, 而Li模型需要求解6个线性规划问题, Campos法和Bector法针对不同的参数需要求解一系列的线性规划问题. 因此, 本文方法的计算最容易.

4 结 论

本文通过引入α-矩阵对策的概念, 提出了一种求解支付为梯形模糊数的矩阵对策的线性规划新方法, 证明了局中人双方的对策值始终相同且求解容易, 其有效性和实用性通过算例结果得到了验证. 此研究内容深入了传统模糊支付矩阵对策求解方法, 也为解决复杂模糊信息环境下的对策问题提供了新的途径. 此外, 由于梯形模糊数是常见模糊数的推广, 本文方法可拓展到其他模糊支付矩阵对策求解问题, 能够更加细腻、灵活地表达不确定性对策问题. 随着信息不确定程度的日益明显, 有必要进一步深入研究更贴近现实情景的模糊对策理论与方法.

参考文献(References)

[1] Owen G. Game theory[M]. 2nd ed. New York: Academic Press, 1982.

[2] Dubois D, Prade H. Fuzzy sets and systems theory and applications[M]. New York: Academic Press, 1980.

[3] Campos L. Fuzzy linear programming problems to solve fuzzy matrix games[J]. Fuzzy Sets and System, 1989, 32(3): 275-289.

[4] Bector C R, Chandra S, Vijay V. Duality in linear programming with fuzzy parameters and matrix games with fuzzy pay-offs[J]. Fuzzy Sets and System, 2004, 46 (2):253-269.

[5] Li D F. A fuzzy multi-objective programming approach to solve fuzzy matrix games[J]. J of Fuzzy Mathematics, 1999, 7(4): 907-912.

[6] Li D F. Lexicographic method for matrix games with payoffs of triangular fuzzy numbers[J]. Int J of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2008, 16(3): 371-389.

[7] Larbani M. Non cooperative fuzzy games in normal form: A survey[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2009, 160(22): 3184-3210.

[8] 吴诗辉, 杨建军, 郭乃林. 三角模糊矩阵博弈的最优策略研究[J]. 系统工程与电子技术, 2009, 31(5): 1231-1234.
(Wu S H, Yang J J, Guo N L. Study on the optimal strategies solution of triangular fuzzy matrix game[J]. Systems Engineering and Electronics, 2009, 31(5): 1231-1234.)

[9] 南江霞, 李登峰, 张茂军. 求解支付值为区间直觉模糊数的矩阵对策的线性规划方法[J]. 控制与决策, 2010, 25(9): 1318-1323.
(Nan J X, Li D F, Zhang M J. Linear programming approach to matrix games with payoffs of interval valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Control and Decision, 2010, 25(9): 1318-1323.)

[10] Clemente M, Fernández F R, Puerto J. Pareto-optimal security strategies in matrix games with fuzzy payoffs[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2011, 176(1): 36-45.

[11] Li D F, Hong F X. Solving constrained matrix games with payoffs of triangular fuzzy numbers[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2012, 64(4): 432-446.

[12] 万树平, 张小路. 基于加权可能性均值的直觉梯形模糊数矩阵博弈求解方法[J]. 控制与决策, 2012, 27(8): 1121-1126.
(Wan S P, Zhang X L. Method based on weighted possibility mean for solving matrix games with payoffs of intuitionistic trapezoidal fuzzy numbersfuzzy numbers[J]. Control and Decision, 2012, 27(8): 1121-1126.)

[13] Roy S K, Mula P. Bi-matrix game in bifuzzy environment[J]. J of Uncertainty Analysis and Applications, 2013, 1(1): 1-17.

[14] Gao J. Uncertain bimatrix game with applications[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2013, 12(1): 65-78.

[15] Yager R R. Using trapezoids for representing granular objects: Applications to learning and OWA aggregation[J]. Information Sciences, 2008, 178(2): 363-380.

[16] Wan S P, Dong J Y. Possibility linear programming with trapezoidal fuzzy numbers[J]. Applied Mathematical Modelling, 2014, 38(5): 1660-1672.

[17] Moore R E, Moore R E. Methods and applications of interval analysis[M]. Philadelphia: Siam, 1979.

[18] Yager R R. A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval[J]. Information Sciences, 1981, 24(2): 143-161.

(责任编辑：齐 霁)