第 30 卷 第 7 期
Vol. 30 No. 7

控 制 与 决 策
Control and Decision

2015 年 7 月
Jul. 2015

文章编号: 1001-0920 (2015) 07-1251-06 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2014.0635

函数变换对灰色模型光滑度和精度的影响

郭金海[1,2], 肖新平[1], 杨锦伟[1,3]

(1. 武汉理工大学 理学院，武汉 430070；2. 长江大学 信息与数学学院，
湖北 荆州 434023；3. 平顶山学院 数学学院，河南 平顶山 467000)

摘 要: 对于单调序列的函数变换, 首先将单调递增和递减函数变换提高序列光滑度的充要条件统一, 给出压缩变换满足的充要条件, 并给出还原误差精度提高的充要条件, 得到提高光滑度与压缩变换的条件是一致的, 但与降低还原误差的条件是矛盾的结论. 由此, 在函数变换时要综合考虑光滑度和还原精度, 使得总体建模精度达到最优. 最后通过文献中的结果进一步表明了所得到结论的正确性.

关键词: 灰色模型；光滑度；函数变换；建模精度；还原误差

中图分类号: N941.5 **文献标志码:** A

Effect on grey model's smoothness and accuracy by using function transformation

GUO Jin-hai[1,2], *XIAO Xin-ping*[1], *YANG Jin-wei*[1,3]

(1. School of Science，Wuhan University of Technology，Wuhan 430070，China；2. School of Information and Mathematics，Yangtze University，Jingzhou 434023，China；3. School of Mathematics Science，Pingdingshan University，Pingdingshan 467000，China．Correspondent：YANG Jin-wei，E-mail：youngjinwei@126.com)

Abstract: In view of the function transformation to monotone sequence, the sufficient and necessary conditions of monotonic increasing and decreasing function transform are unified to improve the smoothness of the series. The sufficient and necessary conditions which compression transform meets are given, and the necessary and sufficient conditions of reduction the accuracy of error are also given. A conclusion is obtained that the conditions of improving the smoothness and compression transform are consistent, but are contradictory with that of lowering the reduction error. Therefore, the smoothness and reduction accuracy are considered comprehensively during the function transformation to achieve the optimal overall modeling accuracy. Finally, the literature results show the correctness of the proposed conclusion.

Keywords: grey model；smoothness；function transformation；modeling accuracy；reduction error

0 引 言

GM(1,1) 模型是灰色系统中最重要的模型之一, 提高其建模精度有着重要的意义. 通过提高序列的光滑度, 可以降低原始序列的级比, 若序列的级比落在区间 $(\mathrm{e}^{-2/(n+1)}, \mathrm{e}^{2/(n+1)})$ 内, 则 GM(1,1) 模型具有高精度. 因此, 很多学者运用函数变换提高序列的光滑度以达到提高 GM(1,1) 建模精度的目的. 但由于对函数变换生成新序列建模后需要对序列作还原, 还原精度反而降低, 效果不是很理想. 提高变换后序列的建模精度与提高还原精度之间存在什么样的关系? 这是一个有待解决的问题, 本文将对此展开研究.

文献 [1-4] 分别运用单调函数 $\cot(x^\alpha)$、$\cos(x)$、$\cot(x)$、$\sqrt{\ln x}$ 来提高单调序列的光滑度, 达到提高模型精度的目的. 文献 [5-7] 从提高序列光滑度、压缩变换、序列的凸凹性、还原误差缩小的角度研究函数变换, 分别运用 $c\ln x + d$ 和 $\mathrm{arccot}(x)$ 进行函数变换以提高模型的精度. 文献 [8-9] 分别运用压缩位似变换和缓冲算子从降低原始序列的波动性的角度提高模型的建模精度. 文献 [10] 对于高增长性和低增长性序列, 运用函数变换 $\cot(x)$ 将其分别转换到对应的区间来达到提高模型精度的目的. 文献 [11] 对于单调递减序列, 应用反向累加和零初始点逆生成变换建

收稿日期: 2014-04-28；**修回日期:** 2014-10-14.

基金项目: 国家自然科学基金项目(51479151)；高校博士点基金项目(20120143110001)；教育发展社科基金项目(11YJC630155)；湖北省青年基金项目(Q20121203).

作者简介: 郭金海(1980−), 男, 博士生, 从事灰色系统理论与应用的研究；肖新平(1965−), 男, 教授, 博士生导师, 从事系统工程与控制等研究.

立 GM(1,1) 模型, 扩展了 GM(1,1) 模型的使用范围. 文献 [12-13] 从理论上探讨了函数变换提高序列光滑度的条件. 文献 [14-16] 分别对单调递增 (递减) 函数变换提高单调递增 (递减) 序列的光滑度给出了充要条件, 并证明了提高光滑度与缩小级比偏差是等价的.

目前已有的文献中, 主要运用函数变换从提高序列光滑度、压缩变换、序列的凸凹性等角度进行优化, 提高了变换后序列建模精度, 但是在函数逆变换还原后, 精度下降. 文献 [5-7] 虽考虑了还原误差的问题, 但考虑的是绝对误差的缩小, 与模型的衡量标准 (平均相对误差) 不一致.

本文主要对变换后序列的建模精度与还原误差之间的关系进行研究. 将单调递增和递减函数提高单调序列光滑度的条件统一, 给出单调序列的单调函数变换为压缩变换所满足的充要条件, 并给出单调函数降低单调序列还原误差的充要条件, 得到函数变换提高光滑度与压缩变换的条件是统一的, 但与缩小还原误差是矛盾的, 不能同时达到. 对文献数据进行分析, 其结果与所得到结论吻合, 表明在建模中不仅要考虑函数变换后序列的光滑度, 还要考虑函数变换还原后的精度, 使得总体建模精度达到最优.

1 函数变换提高序列光滑度

通过提高序列的光滑度, 可以降低原始序列的级比, 若序列的级比落在区间 $(\mathrm{e}^{-2/(n+1)}, \mathrm{e}^{2/(n+1)})$ 内, 则 GM(1,1) 模型具有高精度, 因此运用函数变换提高序列的光滑度可以达到提高 GM(1,1) 建模精度的目的. 对于单调递减序列, Wei 等[14]指出两个单调递减序列光滑度的优劣与两个单调递增序列光滑度的优劣的条件正好相反. 对于单调序列, Wei 等[16]对单调函数提高单调序列光滑度给出了充要条件. 本文将单调递增与单调递减函数变换的充要条件统一, 给出如下定义和定理.

定义 1 设序列 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$, 称

$$\rho(k) = \frac{x(k)}{\sum\limits_{i=1}^{k-1} x(i)},\ k = 2, 3, \cdots, n$$

为序列 X 的光滑比.

定义 2[14] 如果 $\{a_k\}_{k=1}^n, \{b_k\}_{k=1}^n$ 均为单调递减序列, 且

$$\frac{b_k}{\sum\limits_{i=1}^{k-1} b_i} < \frac{a_k}{\sum\limits_{i=1}^{k-1} a_i},\ k = 2, 3, \cdots, n,$$

则称序列 $\{a_k\}_{k=1}^n$ 比 $\{b_k\}_{k=1}^n$ 更光滑.

引理 1[16] 设 $f(x)$ 为单调递增正函数变换, $f(x)$ 能提高任意单调递增 (减) 数据序列光滑度的充要条件是 $f(x)/x$ 为关于 x 的单调递减函数.

引理 2[16] 设 $f(x)$ 为单调递减正函数变换, $f(x)$ 能提高任意单调递增 (减) 数据序列光滑度的充要条件是 $f(x)/x$ 为关于 x 的单调递增函数.

当 $f(x)$ 为区间 $[a, b]$ 上可微函数时, 引理 1 和引理 2 可统一为以下定理 1.

定理 1 $f(x)$ 为区间 $[a, b]$ 上可微函数, 设 $f(x)$ 为单调递增 (减) 正函数变换, $f(x)$ 能提高任意单调递增 (减) 数据序列光滑度的充要条件是

$$\forall x \in [a, b],\ \frac{x|f'(x)|}{f(x)} < 1.$$

证明 分别对单调递增和单调递减函数变换进行讨论:

1) 当 $f(x)$ 为单调递增正函数变换时, $f'(x) > 0$, $f(x) > 0$. 由引理 1, $f(x)/x$ 为关于 x 的单调递减函数, 即 $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = \dfrac{f'(x)x - f(x)}{x^2} < 0$, 则 $f'(x)x - f(x) < 0$, 有 $\dfrac{x|f'(x)|}{f(x)} = \dfrac{xf'(x)}{f(x)} < 1$.

2) 当 $f(x)$ 为单调递减正函数变换时, $f'(x) < 0$, $f(x) > 0$. 由引理 2, $f(x)x$ 为关于 x 的单调递增函数, 即 $(f(x)x)' = f'(x)x + f(x) > 0$, 则 $0 > \dfrac{f'(x)}{f(x)} > -\dfrac{1}{x}$, 有 $\dfrac{x|f'(x)|}{f(x)} = -\dfrac{xf'(x)}{f(x)} < 1$.

以上证明每步都是等价的, 因此条件为充要条件. 综合 1) 和 2) 可得, 函数变换 $f(x)$ 能提高任意单调递增 (减) 数据序列光滑度的充要条件是 $\forall x \in [a, b]$, $\dfrac{x|f'(x)|}{f(x)} < 1$. □

2 压缩变换的条件

级比偏差刻画了序列 X 中各点的级比接近 1 的程度, 由 GM(1,1) 建模的特点可知, 当序列 X 的发展系数 a 的绝对值较大时, 建模的偏差随之增大, GM(1,1) 建模较适合 $|a|$ 较小的序列, 即其各点级比接近于 1 的序列. 因此, 由序列的级比偏差 δ 的大小可以大致估计序列建模的精度的高低, 序列的级比偏差 δ 越接近于 0, 表明序列一次建模的精度越高. 王子亮[18]给出了压缩变换的定义, 当变换为压缩变换时, 序列的级比偏差 δ 减小, 达到提高 GM(1,1) 建模精度的目的. 下面对满足压缩变换的函数给出充要条件.

定义 3[17] 设序列 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$, 称

$$\sigma_x(k) = \frac{x(k-1)}{x(k)},\ \hat{\sigma}_x(k) = \frac{x(k)}{x(k-1)},$$
$$k = 2, 3, \cdots, n$$

为序列 X 的级比.

定义 4[17] 设序列 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$, 称

$$\delta_x(k)=|1-\sigma_x(k)|,\ \hat{\delta}_x(k)=|1-\hat{\sigma}_x(k)|,$$
$$k=2,3,\cdots,n$$

为序列 X 的级比偏差.

定义 5[7,18]　设序列 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$, 变换 $f: x(k)\mapsto y(k)$ 得到序列 Y, 若级比偏差 $\delta_y(k)<\delta_x(k)$ 或者 $\hat{\delta}_y(k)<\hat{\delta}_x(k)$, 则称变换 f 为级比压缩变换.

定理 2　设正序列 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$ 为区间 $[a,b]$ 上的单调序列, $f(x)$ 为单调递增(减)正函数变换, $f(x)$ 为区间上可微凹函数或凸函数, 则变换 f 为级比压缩变换的充要条件是

$$\forall x\in[a,b],\ \frac{x|f'(x)|}{f(x)}<1.$$

证明　序列 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$ 为区间 $[a,b]$ 上的单调序列, $f(x)$ 为单调函数, 则 $f'(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上全大于 0 或者全小于 0. 因为 $f(x)$ 为可微凹函数或凸函数, 所以 $f'(x)$ 为单调函数, $|f'(x)|$ 为单调函数.

由微分中值定理可知, 存在 $\xi_k\in(x(k-1),x(k))$ 或 $(x(k),x(k-1))$, 使得

$$y(k)-y(k-1)=f'(\xi_k)(x(k)-x(k-1)).$$

因为 $|f'(x)|$ 为单调函数, 所以在区间 $(x(k-1),x(k))$ 或 $(x(k),x(k-1))$ 内, $|f'(x(k))|<|f'(\xi_k)|$ 与 $|f'(x(k-1))|<|f'(\xi_k)|$ 有且仅有一个成立, 下面分别进行讨论:

1) 当 $|f'(x(k))|<|f'(\xi_k)|$ 时, 若变换 f 为级比压缩变换, 则有

$$\delta_y(k)=\left|1-\frac{y(k-1)}{y(k)}\right|<\delta_x(k)=\left|1-\frac{x(k-1)}{x(k)}\right|,$$

即

$$\left|\frac{y(k)-y(k-1)}{y(k)}\right|<\left|\frac{x(k)-x(k-1)}{x(k)}\right|,$$
$$\left|\frac{f'(x(k))}{y(k)}\right|<\left|\frac{f'(\xi_k)}{y(k)}\right|<\left|\frac{1}{x(k)}\right|.$$

由于函数 $x,f(x),|f'(x)|$ 为连续函数, $\frac{x|f'(x)|}{f(x)}$ 为连续函数, 再由 k 的任意性, 有 $\frac{x|f'(x)|}{f(x)}<1$.

2) 当 $|f'(x(k-1))|<|f'(\xi_k)|$ 时, 若变换 f 为级比压缩变换, 则有

$$\hat{\delta}_y(k)=\left|1-\frac{y(k)}{y(k-1)}\right|<\hat{\delta}_x(k)=\left|1-\frac{x(k)}{x(k-1)}\right|,$$

即

$$\left|\frac{y(k)-y(k-1)}{y(k-1)}\right|<\left|\frac{x(k)-x(k-1)}{x(k-1)}\right|,$$
$$\left|\frac{f'(x(k-1))}{y(k-1)}\right|<\left|\frac{f'(\xi_k)}{y(k-1)}\right|<\left|\frac{1}{x(k-1)}\right|.$$

由于函数 $x,f(x),|f'(x)|$ 为连续函数, $\frac{x|f'(x)|}{f(x)}$ 为连续函数, 再由 k 的任意性, 有 $\frac{x|f'(x)|}{f(x)}<1$.

综合 1) 和 2) 得到 $\forall x\in[a,b]$, $\frac{x|f'(x)|}{f(x)}<1$. 以上证明每步都是等价的, 因此条件为充要条件. □

3　函数变换的还原误差

在 GM(1,1) 建模过程中, 平均相对误差是衡量建模精度最重要的指标, 如果平均相对误差过大, 则一般认为该序列不适合 GM(1,1) 建模或者需要对序列做变换处理再建模, 当平均相对误差较小时, 认为 GM(1,1) 建模效果较好.下面在平均相对误差不大的情况下, 将平均相对误差中各项分母中的实测值用预测值代替, 给出新的平均相对误差定义, 并证明在一定条件下, 新定义的平均相对误差与一般定义下的平均相对误差是等价的.

定义 6　设序列 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$, 模型值序列为 $\hat{X}=(\hat{x}(1),\hat{x}(2),\cdots,\hat{x}(n))$, 相对误差 $e_x(k)=\left|\frac{x(k)-\hat{x}(k)}{x(k)}\right|$, 平均相对误差 $e_x=\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{x(k)-\hat{x}(k)}{x(k)}\right|$; 设相对误差 $\hat{e}_x(k)=\left|\frac{x(k)-\hat{x}(k)}{\hat{x}(k)}\right|$, 平均相对误差 $\hat{e}_x=\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{x(k)-\hat{x}(k)}{\hat{x}(k)}\right|$, $k=1,2,\cdots,n$.

引理 3　设 $\varepsilon_k\geqslant0$, 当相对误差 $e_x(k)<\varepsilon_k$ 时, 相对误差 $\hat{e}_x(k)<\frac{1}{1-\varepsilon_k}-1$, $k=1,2,\cdots,n$. 取 $\varepsilon_{\max}=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\varepsilon_k\}$, 则 $\hat{e}_x-e_x<\frac{\varepsilon_{\max}^2}{1-\varepsilon_{\max}}$; 取 $\hat{\varepsilon}_{\max}=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\hat{\varepsilon}_k\}$, 则 $e_x-\hat{e}_x<\frac{\hat{\varepsilon}_{\max}^2}{1-\hat{\varepsilon}_{\max}}$.

证明　相对误差 $e_x(k)=\left|\frac{x(k)-\hat{x}(k)}{x(k)}\right|<\varepsilon_k$, 有

$$\frac{1}{1+\varepsilon_k}-1<\frac{x(k)-\hat{x}(k)}{\hat{x}(k)}<\frac{1}{1-\varepsilon_k}-1.$$

因为

$$\left(\frac{1}{1-\varepsilon_k}-1\right)-\left|\frac{1}{1+\varepsilon_k}-1\right|=\frac{2\varepsilon_k^2}{1-\varepsilon_k}>0,$$

相对误差为

$$\hat{e}_x(k)=\left|\frac{x(k)-\hat{x}(k)}{\hat{x}(k)}\right|<\frac{1}{1-\varepsilon_k}-1,$$

因此两个相对误差之差为

$$\hat{e}_x-e_x<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{1-\varepsilon_k}-1\right)-\varepsilon_k\right]=$$
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon_k^2}{1-\varepsilon_k}<\frac{\varepsilon_{\max}^2}{1-\varepsilon_{\max}}.$$

由 $x(k),\hat{x}(k)$ 在相对误差 $\hat{e}_x$、e_x 中的对称关系, 当 $\hat{\varepsilon}_{\max}=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\hat{\varepsilon}_k\}$ 时, 有 $e_x-\hat{e}_x<\frac{\hat{\varepsilon}_{\max}^2}{1-\hat{\varepsilon}_{\max}}$. □

在最大相对误差为 $\varepsilon_{\max}$、精度之差小于 $\hat{e}_x-e_x$ 的情况下, 利用 $\hat{e}_x$ 与 e_x 作为衡量模型建模精度是等

表 1 最大相对误差 $\varepsilon_{\max}$ 对应的相对误差之差 $\hat{e}_x - e_x$ %

$\varepsilon_{\max}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\hat{e}_x - e_x$	0.01	0.04	0.09	0.17	0.26	0.38	0.53	0.70	0.89	1.11

价的. 由表 1 可知: 当 $\varepsilon_{\max} < 5\%$ 时, 两个相对误差之差 $\hat{e}_x - e_x < 0.26\%$; 当 $\varepsilon_{\max} < 10\%$ 时, 两个相对误差之差 $\hat{e}_x - e_x < 1.11\%$. 因此在相对误差较小的情况下, 可以认为两个相对误差是等价的.

对原始序列 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$ 作函数变换 $y = f(x)$, 得到序列 $Y = (y(1), y(2), \cdots, y(n))$. 再对序列 Y 建立 GM(1,1) 模型, 得到模型值 $\hat{Y} = (\hat{y}(1), \hat{y}(2), \cdots, \hat{y}(n))$, 最后作逆变换还原 $x = f^{-1}(y)$, 得到模型最终值 $\hat{X} = (\hat{x}(1), \hat{x}(2), \cdots, \hat{x}(n))$. 运用函数变换提高变换后序列 Y 的光滑度, 有利于提高序列 Y 的建模精度, 但是最终要考虑原始序列 X 的建模精度. 所以, 不仅要考虑变换后序列 Y 的建模精度, 还要考虑还原精度. 下面研究函数变换对还原误差的影响.

定理 3 设正序列 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$ 为区间 $[a, b]$ 上单调序列, $f(x)$ 为单调递增 (减) 正函数变换, $f(x)$ 为区间上可微凹函数或凸函数, 函数变换后建模的相对误差为 $e_y = \dfrac{|y - \hat{y}|}{|y|}$ 或 $\hat{e}_y = \dfrac{|y - \hat{y}|}{|\hat{y}|}$, 还原后相对误差为 $e_x = \dfrac{|x - \hat{x}|}{|x|}$ 或 $\hat{e}_x = \dfrac{|x - \hat{x}|}{|\hat{x}|}$. 还原精度提高 ($e_x < e_y$ 或 $\hat{e}_x < \hat{e}_y$) 的充要条件是

$$\forall x \in [a, b],\ \frac{x|f'(x)|}{f(x)} > 1.$$

证明 正函数变换 $y = f(x)$, 建模后模拟值 $\hat{y}(k) = f(\hat{x}(k))$, 由微分中值定理, 存在 $\xi_k \in (x(k), \hat{x}(k))$ 或 $(\hat{x}(k), x(k))$, 使得

$$f(x(k)) - f(\hat{x}(k)) = f'(\xi_k)(x(k) - \hat{x}(k)).$$

若 $f(x)$ 为区间上可微凹函数或凸函数, 则 $f'(x)$ 为单调函数, $|f'(\xi_k)| < |f'(x(k))|$ 与 $|f'(\xi_k)| < |f'(\hat{x}(k))|$ 有且仅有一个成立, 下面分别进行讨论:

1) 当 $|f'(\xi_k)| < |f'(x(k))|$ 时, 相对误差为

$$e_y(k) = \frac{|y(k) - \hat{y}(k)|}{|y(k)|} = \frac{|f(x(k)) - f(\hat{x}(k))|}{|f(x(k))|} = \frac{|f'(\xi_k)(x(k) - \hat{x}(k))|}{|f(x(k))|} < \frac{|f'(x(k))(x(k) - \hat{x}(k))|}{|f(x(k))|}.$$

还原精度提高, 即 $e_x < e_y$, 则有

$$\frac{|x(k) - \hat{x}(k)|}{|x(k)|} < \frac{|f'(x(k))(x(k) - \hat{x}(k))|}{|f(x(k))|},$$

即 $\dfrac{x(k)|f'(x(k))|}{f(x(k))} > 1$.

由于函数 x、$f(x)$、$|f'(x)|$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, $\dfrac{x|f'(x)|}{f(x)}$ 为连续函数, 再由 k 的任意性, 有 $\forall x \in [a, b]$, $\dfrac{x|f'(x)|}{f(x)} > 1$.

2) 当 $|f'(\xi_k)| < |f'(\hat{x}(k))|$ 时, 相对误差为

$$\hat{e}_y(k) = \frac{|y(k) - \hat{y}(k)|}{|\hat{y}(k)|} = \frac{|f(x(k)) - f(\hat{x}(k))|}{|f(\hat{x}(k))|} = \frac{|f'(\xi_k)(x(k) - \hat{x}(k))|}{|f(\hat{x}(k))|} < \frac{|f'(\hat{x}(k))||x(k) - \hat{x}(k)|}{|f(\hat{x}(k))|}.$$

还原后相对误差减小, 即 $\hat{e}_x(k) < \hat{e}_y(k)$, 则有

$$\frac{|x(k) - \hat{x}(k)|}{|\hat{x}(k)|} < \frac{|f'(\hat{x}(k))||x(k) - \hat{x}(k)|}{|f(\hat{x}(k))|},$$

即 $\dfrac{\hat{x}(k)|f'(\hat{x}(k))|}{f(\hat{x}(k))} > 1$.

由于函数 x、$f(x)$、$|f'(x)|$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, $\dfrac{x|f'(x)|}{f(x)}$ 为连续函数, 再由 k 的任意性, 有 $\forall x \in [a, b]$, $\dfrac{x|f'(x)|}{f(x)} > 1$.

综合 1) 和 2) 得到 $\forall x \in [a, b]$, $\dfrac{x|f'(x)|}{f(x)} > 1$. 以上证明每步都是等价的, 因此条件为充要条件. □

仿射变换是一种比较简单且常用的变换, 由定理 3 可以得到仿射变换对还原误差的影响.

推论 1 设正序列 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$, $y = f(x) = \rho(x + t)(y > 0,\ \rho \neq 0)$ 为仿射变换, 数乘量 ρ 不影响还原后相对误差; 还原后相对误差减小 ($e_x < e_y$) 的充要条件为 $-\min\{x(i)\} < t < 0$ 或者 $-2\min\{x(i)\} < t < -\max\{x(i)\}$.

证明 由定理 2, $e_x < e_y$ 的充要条件为 $\forall x > 0$, $\dfrac{x|f'(x)|}{f(x)} > 1$, 有

$$\frac{x|f'(x)|}{f(x)} = \frac{|\rho|x}{|\rho(x + t)|} = \frac{x}{|x + t|} > 1,$$

即 $|x + t| < x$, 与数乘量 ρ 无关.

当 $x + t > 0$ 时, $x + t < x$, $-x < t < 0$, 对于任意的 $x(i)$ 均成立, 即 $-\min\{x(i)\} < t < 0$; 当 $x + t < 0$ 时, $-(x + t) < x$, $-2x < t < -x$, 对于任意的 $x(i)$ 均成立, 即 $-2\min\{x(i)\} < t < -\max\{x(i)\}$. □

由推论 1 可知, 当数乘量 ρ 取 -1 时, 负序列 X 转化为正序列, 因此本文中结论也适用于负序列 X 建模.

4 变换后序列建模精度与还原精度的关系

对正序列 X 作函数变换, 通过提高光滑度和压缩变换提高变换后序列建模精度, 同时还要考虑还原后的精度, 比较定理 1、定理 2 和定理 3, 发现二者在一定条件下不能同时达到. 下面证明该结论.

定理 4 设正序列 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$, $f(x)$ 为单调递增 (减) 正函数变换, $f(x)$ 为区间上可微凹函数或凸函数, 则有:

1) $f(x)$ 提高数据序列光滑度的充要条件是 $f(x)$ 为压缩变换;

2) $f(x)$ 不能既提高数据序列光滑度, 又降低还原误差.

证明　由定理 1 和定理 2 可知, $f(x)$ 能提高任意单调递增 (减) 数据序列光滑度与 $f(x)$ 为压缩变换的充要条件均是 $\frac{x|f'(x)|}{f(x)}<1$, 因此两者等价.

由定理 3 可知, 还原后相对误差减小的充要条件是 $\frac{x|f'(x)|}{f(x)}>1$, 与提高序列光滑度的条件 $\frac{x|f'(x)|}{f(x)}<1$ 矛盾, 即 $f(x)$ 不能既提高数据序列光滑度, 又降低还原误差. □

5　函数变换的效果分析

函数变换求解过程为

$$x\xrightarrow{f}y=f(x)\xrightarrow{\mathrm{GM}(1,1)}\hat{y}\xrightarrow{f^{-1}}\hat{x}=f^{-1}(\hat{y}),$$

由定理 1 ∼ 定理 3 可知: 压缩变换、光滑度和还原精度是否提高, 主要是比较 $h(x)=\frac{x|f'(x)|}{f(x)}$ 与 1 的大小关系. 函数变换的效果最终体现为序列 $\hat{X}$ 的精度, 下面比较 "GM(1,1) 模型误差"、"变换后误差 e_y" 和 "还原后误差 e_x" 三者的关系. 许多学者研究了函数变换提高 GM(1,1) 模型精度的问题, 这里将文献 [2-7] 的结果进行比较分析, 如表 2 所示. 其中: X_i 为文献 [i] 中原始序列, 文献 [2-3] 中 $u=\sqrt{x}/850$. 有

$$\begin{aligned}X_{2,3}=(&772\,682, 806\,048, 860\,855, 996\,634, 1\,092\,883,\\&1\,172\,596, 1\,244\,722, 1\,326\,094, 1\,378\,717,\\&1\,394\,413, 1\,478\,573, 1\,534\,122, 1\,608\,150);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X_4=(&3.23, 6.94, 10.07, 17.70, 18.13, 28.05, 48.77,\\&132.14, 247.92, 517.40, 553.74);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X_5=(&11\,598.4, 12\,305.2, 13\,471.4, 14\,633.5,\\&16\,331.5, 19\,031.6, 21\,971.4, 24\,940.4, 28\,588);\end{aligned}$$

$$X_6=(3, 4, 12, 24, 50, 100);$$

$$X_7=(270, 450, 740, 1\,220, 2\,010, 3\,120, 5\,460).$$

表 2　函数变换效果比较

文献	变量区间	$f(x)$	$h(x)=\frac{\lvert f'(x)\rvert x}{f(x)}$	$h(x)R1$	准则	GM(1, 1)e/%	e_y/%	e_x/%
[2]	[772 682, 1 608 150]	$\cos(u)$	$\frac{u}{2\cot(u)}$	>1	e	4.15	5.52	1.51
					$\hat{e}$	4.04	4.85	1.52
[3]	[772 682, 1 608 150]	$\cot(u)$	$\frac{u}{\sin(2u)}$	>1	e	4.15	4.83	1.24
					$\hat{e}$	4.04	4.44	1.24
[4]	[3.23, 553.74]	$\sqrt{(\ln x)}$	$\frac{1}{2\ln x}$	<1	e	289	2.50	21.94
					$\hat{e}$	71.80	2.51	21.59
[5]	[11 598.4, 28 588]	$28\,588\ln x-200\,000$	$\frac{1}{\ln x-\frac{200\,000}{28\,588}}$	<1	e	2.22	0.52	1.38
					$\hat{e}$	2.26	0.52	1.37
[6]	[3, 100]	$-\ln x+10$	$\frac{1}{-\ln x+10}$	<1	e	12.98	0.64	4.71
					$\hat{e}$	9.41	0.64	4.79
[7]	[270, 5 460]	$\mathrm{arccot}x$	$\frac{x}{(1+x^2)\mathrm{arccot}x}$	≈ 1	e	9.68	2.18	2.13
					$\hat{e}$	10.76	2.18	2.13

文献 [2-3] 中, $h(x)=\frac{x|f'(x)|}{f(x)}>1$, 变换后序列建模精度部分降低, 还原精度提高; 文献 [4-6] 中, $h(x)=\frac{x|f'(x)|}{f(x)}<1$, 变换后序列建模精度提高, 还原精度降低. 这与定理 1 和定理 2 中 $h(x)<1$ 时光滑度提高且为压缩变换, 从而提高变换后序列建模精度相吻合; 与定理 3 中 $h(x)>1$ 时提高还原精度相吻合. 文献 [7] 中, $h(x)\approx 1$, 还原精度基本不变, 光滑度不变, 变换后序列建模精度提高. 总体均提高原始 GM(1,1) 模型精度.

从表 2 中两个平均相对误差准则 e、$\hat{e}$ 的结果可见: 在相对误差过大时, 两个相对误差之差也可能很大, 两个标准衡量模型的精度不同; 在相对误差较小时, 两个相对误差之差也很小, 两个标准衡量模型的精度相当.

6　结　论

本文研究了单调序列函数变换 GM(1,1) 模型精度问题, 得到单调函数变换提高序列光滑度的条件与其为压缩变换的条件是统一的 $\left(h(x)=\frac{x|f'(x)|}{f(x)}<1\right)$, 而与变换减小还原误差的条件 $\left(h(x)=\frac{x|f'(x)|}{f(x)}>1\right)$ 是矛盾的. 由此在寻找函数变换来提高 GM(1,1) 模型精度时, 要综合考虑光滑度和还原精度, 使建模精度达到最优. 由于对不同的数据所采用的函数变换不尽相同, 目前还没有一个较好的函数变换选择准则, 且函数变换对提高模型精度是有限的. 在实际应用中, 首先要根据数据列的特点, 挑选适合的模型以达到精度的要求, 如果需要, 可以结合函数变换进一步优化模型.

参考文献(References)

[1] 戴文战, 熊伟, 杨爱萍. 基于函数 $\cot(x^\alpha)$ 变换及背景值优化的灰色建模[J]. 浙江大学学报: 工学版, 2010, 44(7): 1368-1372.
(Dai W Z, Xiong W, Yang A P. Grey modeling based on $\cot(x^\alpha)$ transformation and background value optimization[J]. J of Zhejiang University: Engineering Science, 2010, 44(7): 1368-1372.)

[2] 郑锋, 魏勇. 提高灰建模数据列光滑度的一种新方法[J]. 统计与决策, 2007, 19(18): 37-38.
(Zheng F, Wei Y. Improve the gray smoothness is a new method of modeling data sequence[J]. Statistics and Decision, 2007, 19(18): 37-38.)

[3] 李翠凤, 戴文战. 基于函数 $\cot(x)$ 变换的灰色建模方法[J]. 系统工程, 2005, 23(3): 110-114.
(Li C F, Dai W Z. An approach of the grey modelling based on cot(x) transformation[J]. Systems Engineering, 2005, 23(3): 110-114.)

[4] 李群. 灰色预测模型的进一步拓广[J]. 系统工程理论与实践, 1993, 13(1): 64-66.
(Li Q. The further generalization for grey forecasting model[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 1993, 13(1): 64-66.)

[5] 崔立志, 刘思峰. 基于数据变换技术的灰色预测模型[J]. 系统工程, 2010, 28(5): 104-107.
(Cui L Z, Liu S F. Grey forecasting model based on data transformation technology[J]. Systems Engineering, 2010, 28(5): 104-107.)

[6] 李福琴, 刘建国. 数据变换提高灰色预测模型精度的研究[J]. 统计与决策, 2008, 20(6): 15-17.
(Li F Q, Liu J G. Research on data transformation for increasing accuracy of grey forecasting model[J]. Statistics and Decision, 2008, 20(6): 15-17.)

[7] 钱吴永, 党耀国. 一种新型数据变换技术及其在 GM(1,1) 模型中的应用[J]. 系统工程与电子技术, 2009, 31(12): 2879-2881.
(Qian W Y, Dang Y G. New type of data transformation and its application in GM(1, 1) model[J]. Systems Engineering and Electronics, 2009, 31(12): 2879-2881.)

[8] Wang Shuhua, Wei Yong. Properties of the contractive homothetic transformation and its application to grey modeling[J]. The J of Grey System, 2007, 19(4): 389-396.

[9] 王正新, 党耀国, 裴玲玲. 缓冲算子的光滑性[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(9): 1643-1649.
(Wang Z X, Dang Y G, Pei L L. The smoothness of buffer operators[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2010, 30(9): 1643-1649.)

[10] Jing Ye, Bingjun Li, Fang Liu. GM(1,1) forecast under function $\cot(x)$ transformation[J]. Grey Systems: Theory and Application, 2013, 3(3): 236-249.

[11] Guan Yeqing, Wang Ying, Liu Hua. Grey model based on descending sequence and its application[J]. The J of Grey System, 2014, 26(2): 76-83.

[12] 黄福勇. 灰色系统建模的变换方法[J]. 系统工程理论与实践, 1994, 14(6): 35-38.
(Huang F Y. Method of transformation for modeling in grey systems[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 1994, 14(6): 35-38.)

[13] 李学全, 李松仁, 韩旭里. 灰色系统 GM(n,h) 模型应用的一种拓广[J]. 系统工程理论与实践, 1997, 17(8): 82-86.
(Li X Q, Li S R, Han X L. The method to generalize the application of grey systems GM(n,h) model[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 1997, 17(8): 82-86.)

[14] Wei Yong, Zhang Yi. A Criterion of comparing the function transformations to raise the smooth degree of grey modeling data[J]. The J of Grey System, 2007, 19(1): 91-98.

[15] Wei Yong, Zhang Yi. An essential characteristic of the discrete function transformation to increase the smooth degree of data[J]. The J of Grey System, 2007, 19(3): 293-300.

[16] Wei Yong. An essential characteristic of function transformation to reduce the class ratio dispersion and its application[C]. Proc of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation. Chongqing, 2008: 1329-1333.

[17] 刘思峰, 谢乃明. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2013: 40-42.
(Liu S F, Xie N M. The theory and application of grey system[M]. Beijing: Science Press, 2013: 40-42.)

[18] 王子亮. 灰色建模技术理论[D]. 武汉: 华中理工大学自动控制与工程系, 1998: 52-59.
(Wang Z L. Grey modeling theory[D]. Wuhan: Department of Automatic Control and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, 1998: 52-59.)

(责任编辑：郑晓蕾)