

文章编号: 1000-4750(2015)04-0178-07

改进的混合界面子结构模态综合法在失谐叶盘结构模态分析中的应用

白 斌¹, 白广忱¹, 费成巍¹, 赵合阳¹, 童晓晨²

(1. 北京航空航天大学能源与动力工程学院, 北京 100191; 2. 国家知识产权局专利局专利审查协作北京中心, 北京 100081)

摘 要: 在保证精度的条件下, 为了提高航空发动机模态分析的计算效率, 针对传统混合界面子结构模态综合法由于综合后还可能存在计算量大的问题, 提出一种改进的混合界面子结构模态综合法。该方法将综合后的模型进一步减缩, 同时在减缩过程中引入位移和力的双协调条件, 保证了计算的准确性。采用该方法建立了叶片-轮盘的组合结构的参数化模型, 对各个子结构建立有限元模型并综合求其模态, 与整体结构有限元法相比, 计算时间缩短了 23.86%~35.74%, 模态偏差不大于 0.57%, 而传统法, 其计算时间缩短了 14.63%~29.20%, 模态偏差不超过 0.49%, 可见, 在相同的工作环境且保证精度的条件下, 该方法计算效率比传统混合界面子结构模态综合法有显著提高, 尤其是在高阶模态求解时, 计算效率提高的更加明显, 为下一步的振动响应及组合结构的动态特性研究奠定了基础。

关键词: 混合界面子结构模态综合法; 航空发动机; 失谐叶盘结构; 有限元模型; 计算效率; 计算精度

中图分类号: V231.9 **文献标志码:** A **doi:** 10.6052/j.issn.1000-4750.2013.10.0964

APPLICATION OF IMPROVED HYBRID INTERFACE SUBSTRUCTURE CMS METHOD IN THE MODAL ANALYSIS OF MISTUNED BLADED DISK ASSEMBLIES

BAI Bin¹, BAI Guang-chen¹, FEI Chen-wei¹, ZHAO He-yang¹, TONG Xiao-chen²

(1. School of Energy and Power Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China;

2. Patent Examination Cooperation Center of the Patent Office, SIPO, Beijing 100081, China)

Abstract: To improve the efficiency of modal analysis for aeroengines of ensured computational accuracy, an improved hybrid interface substructure component modal synthesis (CMS) method is proposed to avoid massive calculation in traditional methods when the substructure is composited. The comprehensive model is further simplified and dual coordination conditions of displacement and force are introduced to ensure the accuracy of the calculation. The parametric model of the assembled structure of blades and disks is constructed to set up finite element models for each substructure, which are then synthesized using the coordination conditions of displacement and force to obtain modal frequencies. Compared with the overall structure finite element model, the computational time is reduced by 23.86%~35.74%, and the modal deviation is less than 0.57%, while the computational time was reduced by only 14.63%~29.20% and the modal deviation was less than 0.49% for traditional methods. Therefore, under the same working environment and to achieve the same level of computational accuracy, the proposed method is much more efficient than traditional methods, especially in the high order modal solution procedure. This study lays a solid foundation for further research on the dynamic

收稿日期: 2013-10-17; 修改日期: 2014-01-10

基金项目: 国家自然科学基金项目(51375032, 51275024)

通讯作者: 白 斌(1984—), 男, 河北张家口人, 博士, 主要从事航空发动机强度、振动及可靠性稳健性设计以及结构优化研究(E-mail: baibin@126.com).

作者简介: 白广忱(1962—), 男, 哈尔滨人, 教授, 博士后, 博导, 主要从事系统动力学、结构可靠性以及优化研究(E-mail: dlx_bgc@buaa.edu.cn);
费成巍(1983—), 男, 河南开封人, 博士后, 主要从事航空发动机结构可靠性分析和结构优化研究(E-mail: feicw544@163.com);
赵合阳(1976—), 男, 山西西安人, 工程师, 博士, 主要从事航空发动机结构稳健性和可靠性研究(E-mail: zhy_@126.com);
童晓晨(1981—), 男, 河北张家口人, 工程师, 硕士, 主要从事金属材料加工制造工艺研究(E-mail: txc_@163.com).

responses of composite structures of the mistuned bladed disk assemblies for aeroengines.

Key words: hybrid interface substructure CMS method; aeroengine; mistuned bladed disk assemblies; finite element model; computational efficiency; computational accuracy

随着工程技术的不断发展,出现了越来越多的诸如超高层建筑、航空航天、海洋石油平台等庞大复杂结构,且这些结构含有非线性本构关系或随机激振、复杂边界条件等多种因素,若采用整体结构有限元法,直接求解如此庞大的模型非常困难,即使能够分析,也要耗费大量机时,效率极低或无法计算,因此一种缩减自由度方法发展起来,如子结构模态综合方法^[1-4],该方法已经形成了系统的理论^[5-6],分为自由界面子结构模态综合法、固定界面子结构模态综合法与混合子结构模态综合法^[1,7-8]。其基本思想是一种“化整为零”的分析方法,首先将整个结构分割为若干相对简单的子结构,分别对每一个子结构进行离散、分析和处理,运用有限元方法、解析法和实验方法等求得其动态特征信息;再利用子结构间力平衡条件及位移协调条件将它们低阶模态综合,由此得到整体结构的动力特性,该模型的规模远远小于整体结构有限元模型,且可对各个子结构进行并行计算,因而计算效率更高,且其精度不逊于整体有限元分析,是实现大型复杂系统结构有限元分析的有效方法,而且便于对该模型结构进行改进和校验。

该方法实际是以瑞利-李兹(Rayleigh-Ritz)法为理论基础,并在20世纪60年代由Hurty等^[2-3]提出,Hurty首先提出了固定界面模态综合法的基本思想,将整体结构视为由若干个子结构以某种方式组合在一起的整体,而每个子结构的动力学特征可以用一组独立的模态来表示并称这些模态为结构的特征模态同时引入了约束模态;之后经Craig和Barnpton等^[1]改进完善,目前已广泛用于航空航天等工程领域;McGee等^[9]虽然对高函道发动机风扇建立减缩模型研究了叶盘刚度和气动效率的提高,但是没有考虑叶片的失谐,不符合实际;吴庆雄等^[10]在模型中考虑了索梁结构非线性,但是计算复杂;汪晓虹等^[11]对模态综合进行了改进,提出了模态综合的直接变换方法,只进行了一次模态变化,精度和效率都不是很高;Marinescu等^[12]基于固定界面二次降阶(Craig-Bampton Second Reduce Method, CBSRM)方法,提出了一种组合缩减方法;Bladh等^[7,13]基于综合模态分析法(CMS)提出减缩模型

(ROM),计算了受迫响应的概率问题,与Monte Carlo模拟方法相比,计算效率大大提高,之后又提出二次模态缩减模型(a Secondary Modal Analysis Reduction Technique, SMART),计算效率进一步提高,但是由于经过二次模态缩减使得计算精度严重下降。基于以上分析的不足,本文对混合界面法进行改进,对二次降阶分别采用不同的方法,第1次降阶时采用界面位移凝聚法^[14],第2次采用综合模态凝聚法,弥补了单一采用自由界面法或固定界面法的不足。该方法可以针对每个子结构的不同特点采取不同的界面法,不仅可以计算超大模型,而且可以灵活修改系统的子系统设计,无需对整体结构重新全部计算,在保证计算精度的前提下,使得计算效率大大提高。

1 子结构分析基本理论

航空发动机叶盘结构是复杂的机械结构,为了提高计算效率而又不影响其精度的前提下需要将其划分为叶片和轮盘子结构,采用子结构模态综合法对其进行分析研究,而混合界面子结构模态综合法主要用于分析以一个相对独立的复杂庞大结构为主体的系统,特别适用于航空发动机中的盘-叶耦合系统等,可分离出轮盘作为主体部件,而叶片作为分支部件。

设叶片和轮盘的子结构刚度和质量矩阵以及位移分别为 \mathbf{K}^b 、 \mathbf{M}^b 、 $\tilde{\mathbf{K}}_d^h$ 、 $\tilde{\mathbf{M}}_d^h$ 、 \mathbf{x}^b 、 $\bar{\mathbf{x}}^d$,则:

$$\mathbf{K}^b = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BB}^b & \mathbf{K}_{B\Gamma}^b \\ \mathbf{K}_{\Gamma B}^b & \mathbf{K}_{\Gamma\Gamma}^b \end{bmatrix}, \mathbf{M}^b = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{BB}^b & \mathbf{M}_{B\Gamma}^b \\ \mathbf{M}_{\Gamma B}^b & \mathbf{M}_{\Gamma\Gamma}^b \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_d^h = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{d,SS}^h & \tilde{\mathbf{K}}_{d,S\Gamma}^h \\ \tilde{\mathbf{K}}_{d,S\Gamma}^{hT} & \tilde{\mathbf{K}}_{d,\Gamma\Gamma}^h \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{M}}_d^h = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_{d,SS}^h & \tilde{\mathbf{M}}_{d,S\Gamma}^h \\ \tilde{\mathbf{M}}_{d,S\Gamma}^{hT} & \tilde{\mathbf{M}}_{d,\Gamma\Gamma}^h \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$\mathbf{x}^b = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_B^b \\ \mathbf{x}_\Gamma^b \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{x}}^d = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_S^d \\ \bar{\mathbf{x}}_\Gamma^d \end{Bmatrix}.$$

式中: B 为叶片子结构内部自由度; Γ 为界面自由度; S 为轮盘内部自由度; h 为谐波阶次^[13]。

1.1 固定界面叶片子结构减缩模型

在采用混合界面法分析时,根据结构特点,把叶片作为分支来处理,在此采用固定界面法来研究,当叶片结构处于频率为 ω 的自由振动时,其运

动方程为:

$$\mathbf{M}^b \ddot{\mathbf{x}}^b + \mathbf{K}^b \mathbf{x}^b = \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_r^b \end{Bmatrix} \quad (2)$$

即:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{BB}^b & \mathbf{M}_{B\Gamma}^b \\ \mathbf{M}_{B\Gamma}^b & \mathbf{M}_{\Gamma\Gamma}^b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_B^b \\ \ddot{\mathbf{x}}_\Gamma^b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BB}^b & \mathbf{K}_{B\Gamma}^b \\ \mathbf{K}_{B\Gamma}^b & \mathbf{K}_{\Gamma\Gamma}^b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_B^b \\ \mathbf{x}_\Gamma^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_r^b \end{Bmatrix} \quad (3)$$

式中: \mathbf{f}_r^b 为叶片界面力, 作用于如图 3 叶片 A 处。则叶片的特征方程如下:

$$[\mathbf{K}_{BB}^b - \omega^2 \mathbf{M}_{BB}^b] \boldsymbol{\varphi}_b = 0 \quad (4)$$

则主模态矩阵为:

$$\boldsymbol{\Phi}_b = (\varphi_{b1}, \varphi_{b2}, \dots, \varphi_{bn}) \quad (5)$$

式(3)第 2 行展开可知约束界面反力由两部分组成, 即:

$$\{\mathbf{f}_r^b\} = \{\mathbf{f}_r^{b1}\} + \{\mathbf{f}_r^{b2}\} = (\mathbf{K}_{B\Gamma}^b - \omega_b^2 \mathbf{M}_{B\Gamma}^b) \{\mathbf{x}_B^b\} + (\mathbf{K}_{\Gamma\Gamma}^b - \omega_b^2 \mathbf{M}_{\Gamma\Gamma}^b) \{\mathbf{x}_\Gamma^b\} \quad (6)$$

而约束模态矩阵 $\boldsymbol{\Psi}_b$ 由下列方程:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BB}^b & \mathbf{K}_{B\Gamma}^b \\ [\mathbf{K}_{B\Gamma}^b]^\top & \mathbf{K}_{\Gamma\Gamma}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_b \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_r^b \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\text{得} \quad \boldsymbol{\Psi}_b = -\mathbf{K}_{BB}^b (\mathbf{K}_{B\Gamma}^b)^\top \quad (8)$$

可得叶片的模态矩阵为:

$$\mathbf{U}_{cb}^b = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_b & \boldsymbol{\Psi}_b \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (9)$$

则叶片位移矢量可表示为:

$$\mathbf{x}^b = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_B^b \\ \mathbf{x}_\Gamma^b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_b & \boldsymbol{\Psi}_b \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_b^b \\ \mathbf{p}_c^b \end{Bmatrix} = \mathbf{U}_{cb}^b \mathbf{p}^b \quad (10)$$

式中: \mathbf{p}_b^b 为叶片内部自由度模态坐标; \mathbf{p}_c^b 为叶片与轮盘界面自由度模态坐标。

则叶片子结构减缩后质量矩阵和刚度矩阵分别为:

$$\bar{\mathbf{M}}^b = \mathbf{U}_{cb}^{b\top} \mathbf{M}^b \mathbf{U}_{cb}^b = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{M}_{bc} \\ \mathbf{M}_{bc}^\top & \mathbf{M}_{b,cc} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\bar{\mathbf{K}}^b = \mathbf{U}_{cb}^{b\top} \mathbf{K}^b \mathbf{U}_{cb}^b = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_b & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{b,cc} \end{bmatrix} \quad (12)$$

其中:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{bc} &= \boldsymbol{\Phi}_b^\top [\mathbf{M}_{BB}^b \boldsymbol{\Psi}_b + \mathbf{M}_{B\Gamma}^b], \\ \mathbf{M}_{b,cc} &= \boldsymbol{\Psi}_b^\top [\mathbf{M}_{BB}^b \boldsymbol{\Psi}_b + \mathbf{M}_{B\Gamma}^b] + \mathbf{M}_{B\Gamma}^{b\top} \mathbf{M}_{\Gamma\Gamma}^b, \\ \mathbf{K}_{b,cc} &= \mathbf{K}_{\Gamma\Gamma}^b + \mathbf{K}_{B\Gamma}^{b\top} \boldsymbol{\Psi}_b^\top. \end{aligned}$$

对不存在叶片间耦合的情况, 可以扩展为如下相应 N 个叶片矩阵, 如式(13)~式(14)所示。

$$\bar{\bar{\mathbf{M}}}^b = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \otimes \mathbf{M}_{bc} \\ \mathbf{I} \otimes \mathbf{M}_{bc}^\top & \mathbf{I} \otimes \mathbf{M}_{b,cc} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\bar{\bar{\mathbf{K}}}^b = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \otimes \mathbf{A}_b & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \otimes \mathbf{K}_{b,cc} \end{bmatrix} \quad (14)$$

1.2 自由界面轮盘子结构减缩模型

在叶盘结构中, 轮盘相对叶片属于复杂结构且为圆周结构, 作为主体部件来处理, 在此采用自由界面法来研究, 根据周期对称理论对轮盘进行模态减缩, 设轮盘运动方程为:

$$\tilde{\mathbf{K}}_{d,ss}^h \{\tilde{\mathbf{x}}^d\} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{d,ss}^h \{\tilde{\mathbf{x}}^d\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_r^d \end{Bmatrix} \quad (15)$$

式中: \mathbf{f}_r^d 为叶片界面力, 作用于如图 3 轮盘 A 处。

则可以得到其特征方程为:

$$(\tilde{\mathbf{K}}_{d,ss}^h - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{d,ss}^h) \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_d^h = 0 \quad (16)$$

主模态矩阵为:

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_d^h = [\tilde{\varphi}_{d1}^h, \tilde{\varphi}_{d2}^h, \dots, \tilde{\varphi}_{dn}^h] \quad (17)$$

位移为:

$$\{\bar{\mathbf{x}}^d\} = \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_d^h (\mathbf{A}_d - \omega_d^2 \mathbf{I})^{-1} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_d^{h\top} \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_r^d \end{Bmatrix} \quad (18)$$

$$\text{令: } \mathbf{H}^d = \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_d^h (\mathbf{A}_d - \omega_d^2 \mathbf{I})^{-1} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_d^{h\top}$$

$$\text{即} \quad \{\bar{\mathbf{x}}^d\} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_s^d \\ \bar{\mathbf{x}}_r^d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ij}^d & \mathbf{H}_{ij}^d \\ \mathbf{H}_{ji}^d & \mathbf{H}_{jj}^d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_r^d \end{Bmatrix} \quad (19)$$

$$\text{则} \quad \{\mathbf{f}_r^d\} = [\mathbf{H}_{jj}^d]^{-1} \{\bar{\mathbf{x}}_r^d\} \quad (20)$$

约束模态矩阵 $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_d^h$ 由圆周静力平衡方程:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{d,SS}^h & \tilde{\mathbf{K}}_{d,S\Gamma}^h \\ \tilde{\mathbf{K}}_{d,S\Gamma}^{h\top} & \tilde{\mathbf{K}}_{d,\Gamma\Gamma}^h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\Psi}}_d^h \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_r^d \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\text{得} \quad \tilde{\boldsymbol{\Psi}}_d^h = -\tilde{\mathbf{K}}_{d,SS}^{h-1} \tilde{\mathbf{K}}_{d,S\Gamma}^h \quad (22)$$

则轮盘圆周模态矩阵为:

$$\tilde{\mathbf{U}}_{cb}^d = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}} \text{diag}[\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_d^h] & \tilde{\mathbf{B}} \text{diag}[\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_d^h] \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad h=0, \dots, p \quad (23)$$

式中, $\tilde{\mathbf{B}} \text{diag}[\cdot]$ 为伪块对角阵。

则轮盘位移表示为:

$$\bar{\mathbf{x}}^d = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_s^d \\ \bar{\mathbf{x}}_r^d \end{Bmatrix} = \mathbf{U}_{cb}^d \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_d^d \\ \tilde{\mathbf{p}}_c^d \end{Bmatrix} = \mathbf{U}_{cb}^d \tilde{\mathbf{p}}^d \quad (24)$$

式中:

$$\mathbf{U}_{cb}^d = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{B}} \text{diag}[\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_d^h] & \hat{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{B}} \text{diag}[\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_d^h] \\ 0 & \hat{\mathbf{F}} \end{bmatrix}, \quad h=0, \dots, p \quad (25)$$

其中： \hat{F} 为实值 Fourier 矩阵^[13]。

则可得轮盘子结构减缩后的质量和刚度矩阵为：

$$\tilde{M}^d = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \tilde{M}_{dc} \\ \tilde{M}_{dc} & \tilde{M}_{d,cc} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\tilde{K}^d = \begin{bmatrix} \tilde{A}_d & 0 \\ 0 & \tilde{K}_{d,cc} \end{bmatrix} \quad (27)$$

其中：

$$\tilde{M}_{dc} = \tilde{B} \text{diag}[\tilde{\Phi}_d^{hT} [\tilde{M}_{d,SS}^h \tilde{\Psi}_d^h + \tilde{M}_{d,SR}^h],$$

$$\tilde{M}_{d,cc} = \tilde{B} \text{diag}[\tilde{\Psi}_d^{hT} [\tilde{M}_{d,SS}^h \tilde{\Psi}_d^h + \tilde{M}_{d,SR}^h] +$$

$$\tilde{M}_{d,SR}^{hT} \tilde{\Psi}_d^h + \tilde{M}_{d,IR}^h],$$

$$\tilde{K}_{d,cc} = \tilde{B} \text{diag}[\tilde{K}_{d,SR}^{hT} \tilde{\Psi}_d^h + \tilde{K}_{d,IR}^h].$$

1.3 混合界面叶盘子结构减缩模型

子结构之间连接的协调条件是影响子结构方法求解精度的关键因素，子结构间的实际连接方式是多种多样的，典型的有螺栓连接、焊接、铆接及扣接等，在有限元求解中，其连接方式可以处理为刚性连接、柔性连接，或者是简单的位移连续条件来实现，本文采用界面位移和力双协调条件，即：

$$\mathbf{x}_r^b = \bar{\mathbf{x}}_r^d, \quad \mathbf{f}_r^b + \mathbf{f}_r^d = 0 \quad (28)$$

由式(10)和式(24)，得：

$$\mathbf{x}_r^b = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{r,1}^b \\ \mathbf{x}_{r,2}^b \\ \dots \\ \mathbf{x}_{r,N}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{c,1}^b \\ \mathbf{p}_{c,2}^b \\ \dots \\ \mathbf{p}_{c,N}^b \end{bmatrix} = \mathbf{p}_c^b = \hat{F} \bar{\mathbf{p}}_c^d = \bar{\mathbf{x}}_r^d \quad (29)$$

子结构耦合约束变化表示为：

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_d^d \\ \tilde{\mathbf{p}}_c^d \\ \bar{\mathbf{p}}_b^b \\ \bar{\mathbf{p}}_c^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \hat{F} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_d \\ \tilde{\mathbf{p}}_c \\ \bar{\mathbf{p}}_b \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{cb} \mathbf{p}_{cb} \quad (30)$$

则叶盘结构的综合质量和刚度矩阵为：

$$\mathbf{M}^{cb} = \mathbf{T}_{cb}^T \begin{bmatrix} \tilde{M}^d & 0 \\ 0 & \tilde{M}^b \end{bmatrix} \mathbf{T}_{cb} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \tilde{M}_{dc} & 0 \\ \tilde{M}_{dc}^T & \tilde{M}_{d,cc} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{M}_{b,cc} & \hat{F}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{M}_{bc}^T) \\ 0 & (\mathbf{I} \otimes \mathbf{M}_{bc}) \hat{F} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\mathbf{K}^{cb} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_d & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{K}_{d,cc} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{K}_{b,cc} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \otimes \mathbf{A}_b \end{bmatrix} \quad (32)$$

2 阶次激励力

由于发动机的阶次激励时间上是简谐的，在叶片与叶片之间仅有相位的差别。

设第 n 个叶片的相位 φ_n 为：

$$\varphi_n = \frac{2\pi C(n-1)}{N} \quad (33)$$

其中， C 为发动机激励阶次。

则物理坐标下的外力矢量表示为：

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_B \\ \mathbf{Q}_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{N} \mathbf{e}_{C+1} \otimes \mathbf{f}_B^b \\ \sqrt{N} \mathbf{e}_{C+1} \otimes \mathbf{f}_r^b \end{Bmatrix} \quad (34)$$

式中： \mathbf{e}_{C+1} 为复 Fourier 矩阵的第 $C+1$ 列^[13]； \mathbf{f}_B^b 和 \mathbf{f}_r^b 分别为作用于叶片内部和界面自由度力，其中 \mathbf{f}_B^b 作用于如图 3 叶片 B 处。

由式(10)、式(24)、式(30)得模态力为：

$$\mathbf{F}^{cb} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}_c^{cb} \\ \mathbf{F}_b^{cb} \end{Bmatrix} \quad (35)$$

式中：

$$\mathbf{F}_c^{cb} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \sqrt{N} \mathbf{f}_{C,c}^T \mathbf{e}_{C+1} \otimes \{\Psi_b^T \mathbf{f}_B\} + \mathbf{f}_r \\ \sqrt{N} \mathbf{f}_{C,s}^T \mathbf{e}_{C+1} \otimes \{\Psi_b^T \mathbf{f}_B\} + \mathbf{f}_r \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (36)$$

$$\mathbf{F}_b^{cb} = \sqrt{N} \mathbf{e}_{C+1} \otimes \Phi_b^T \mathbf{f}_B \quad (37)$$

3 叶盘结构的失谐模拟

设轮盘为谐调结构，叶片为失谐结构，将其失谐模拟为叶片刚度偏离或叶片弹性模量对其公称值的偏离，实际等价于固有频率的偏离。对于第 n 个叶片第 k 阶叶片模态的失谐模态刚度表示为：

$$\bar{A}_{b,n}^k = (\bar{\omega}_{b,n}^k)^2 = (1 + \delta_n^k) \mathbf{A}_b^k, \quad n=1, \dots, N, \quad k=1, \dots, m_b \quad (38)$$

式中： \mathbf{A}_b^k 为第 k 阶叶片模态的谐调模态刚度； δ_n^k 为第 n 个叶片的失谐参数； m_b 为模态截断后所选叶片模态数。

则失谐刚度矩阵表示为：

$$\mathbf{K}^{cb} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_d & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{K}}_{d,cc} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{K}_{b,cc} & 0 \\ 0 & 0 & \text{Bdiag}[\text{diag}[(1 + \delta_n^k) \mathbf{A}_b^k]] \end{bmatrix} \quad (39)$$

4 失谐叶盘结构的减缩动力学模型

4.1 传统减缩动力学模型

由式(30)、式(31)、式(35)、式(39)得失谐叶盘结构在模态坐标 \mathbf{p}_{cb} 下动力学方程表示为:

$$\mathbf{M}^{cb} \ddot{\mathbf{p}}_{cb} + \mathbf{C}^{cb} \dot{\mathbf{p}}_{cb} + \mathbf{K}^{cb} \mathbf{p}_{cb} = \mathbf{F}^{cb} \quad (40)$$

式中: \mathbf{C}^{cb} 为黏性模态阻尼, 且

$$\mathbf{C}^{cb} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \otimes \text{diag}[2\zeta^k] \sqrt{\mathbf{A}_b} \end{bmatrix} \quad (41)$$

由于叶盘结构维数为各叶片子结构的主模态数 m_b 、轮盘子结构的各次谐波主模态数 m_d 和各界面自由度数(约束模态) m_r 之和, 而主模态都大大小于各子结构物理自由度数。因此, 最后得到了自由度数大大降低的减缩模型。

4.2 改进的减缩动力学模型

若不考虑阻尼, 则方程变为:

$$\mathbf{M}^{cb} \ddot{\mathbf{p}}_{cb} + \mathbf{K}^{cb} \mathbf{p}_{cb} = \mathbf{F}^{cb} \quad (42)$$

其特征方程为:

$$([\mathbf{K}^{cb}] - \omega^2 [\mathbf{M}^{cb}]) \{\phi\} = 0 \quad (43)$$

求解上述特征方程可以求得 $m_b + m_d + m_r$ 个特征值, 即: $\omega_1^2, \dots, \omega_i^2, \dots, \omega_b^2, \dots, \omega_{b+d}^2, \dots, \omega_{b+d+r}^2$ 。

对应的特征向量为:

$$\{\phi_1, \dots, \phi_i, \dots, \phi_b, \dots, \phi_{b+d}, \dots, \phi_{b+d+r}\} \quad (44)$$

若令 $b+d+r = \alpha$, 则模态矩阵为:

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_\alpha] \quad (45)$$

由于模态矩阵 Φ 对刚度和质量矩阵 \mathbf{K}^{cb} , \mathbf{M}^{cb} 具有正交性, 即有:

$$[\mathbf{M}^{cb}]^T \mathbf{M}^{cb} \Phi = \bar{\mathbf{M}}^{cb} \quad (46)$$

$$\Phi^T \mathbf{K}^{cb} \Phi = \bar{\mathbf{K}}^{cb} \quad (47)$$

则结构模态方程变为:

$$\bar{\mathbf{M}}^{cb} \ddot{\mathbf{p}}_{cb} + \bar{\mathbf{C}}^{cb} \dot{\mathbf{p}}_{cb} + \bar{\mathbf{K}}^{cb} \mathbf{p}_{cb} = \bar{\mathbf{F}}^{cb} \quad (48)$$

设结构在动载荷作用下的响应 \mathbf{p}_{cb} 由 α 个线性无关的向量 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_\alpha$ 表示为:

$$\mathbf{p}_{cb} = x_1 \phi_1 + x_2 \phi_2 + \dots + x_n \phi_\alpha \quad (49)$$

则式(48)变为:

$$\bar{\mathbf{M}}^{cb} \ddot{\mathbf{X}} + \bar{\mathbf{C}}^{cb} \dot{\mathbf{X}} + \bar{\mathbf{K}}^{cb} \mathbf{X} = \bar{\mathbf{F}}^{cb} \quad (50)$$

即:

$$\begin{bmatrix} m_1 & & & & \\ & m_2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & m_\alpha & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \dots \\ \ddot{x}_\alpha \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & & & & \\ & c_2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & c_\alpha & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_\alpha \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & & & & \\ & k_2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & k_\alpha & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_\alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_1^{cb} \\ \bar{\mathbf{F}}_2^{cb} \\ \dots \\ \bar{\mathbf{F}}_\alpha^{cb} \end{Bmatrix} \quad (51)$$

得到尚未连接的整个结构的运动方程。

由振动理论知, 结构动力特性主要由少数低阶模态决定, 当减缩后的自由度数仍然很高时, 则式(49)可进一步表示为:

$$\mathbf{p}_{cb} = x_1 \phi_1 + x_2 \phi_2 \dots + x_\beta \phi_\beta = \sum_{i=1}^{\beta} x_i \phi_i, \quad \beta < \alpha \quad (52)$$

将式(52)代入式(50)或式(51)中, 则方程变为:

$$[\bar{\mathbf{M}}^{cb}]_{\beta \times \beta} \{\ddot{\mathbf{X}}\}_{\beta \times 1} + [\bar{\mathbf{C}}^{cb}]_{\beta \times \beta} \{\dot{\mathbf{X}}\}_{\beta \times 1} + [\bar{\mathbf{K}}^{cb}]_{\beta \times \beta} \{\mathbf{X}\}_{\beta \times 1} = \{\bar{\mathbf{F}}^{cb}\}_{\beta \times 1} \quad (53)$$

式中: $[\bar{\mathbf{M}}^{cb}]_{m \times m}$ 、 $[\bar{\mathbf{C}}^{cb}]_{m \times m}$ 、 $[\bar{\mathbf{K}}^{cb}]_{m \times m}$ 分别为二次减缩模态质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵:

$$\begin{cases} [\bar{\mathbf{M}}^{cb}]_{\beta \times \beta} = \Phi_{\alpha \times \beta}^T \bar{\mathbf{M}}_{\alpha \times \alpha}^{cb} \Phi_{\alpha \times \beta} \\ [\bar{\mathbf{C}}^{cb}]_{\beta \times \beta} = \Phi_{\alpha \times \beta}^T \bar{\mathbf{C}}_{\alpha \times \alpha}^{cb} \Phi_{\alpha \times \beta} \\ [\bar{\mathbf{K}}^{cb}]_{\beta \times \beta} = \Phi_{\alpha \times \beta}^T \bar{\mathbf{K}}_{\alpha \times \alpha}^{cb} \Phi_{\alpha \times \beta} \end{cases} \quad (54)$$

由于子结构的综合是在各子结构模态坐标 \mathbf{p} 的集合 \mathbf{p}_{cb} 中进行的, 所以约束条件应该用 \mathbf{p}_{cb} 来表示。显然, \mathbf{p}_{cb} 与模态矩阵 Φ 有关, 选用不同的 Φ , 约束条件的表达式也有所不同。

设已知连接界面点的位移在物理坐标中的相容方程为:

$$\mathbf{H} \mathbf{p}_{cb} = 0 \quad (55)$$

式中, \mathbf{H} 为约束方程系数矩阵。

$$\text{即: } \mathbf{H} \Phi_{\beta \times \beta} \mathbf{X}_{\beta \times 1} = 0 \quad (56)$$

$$\text{令 } \mathbf{B} = \mathbf{H} \Phi \quad (57)$$

$$\text{即 } \mathbf{B} \mathbf{X}_{\beta \times 1} = 0 \quad (58)$$

将式(53)、式(58)联立起来即得到子结构连接后的整体结构的运动方程。由于子结构之间的相互约束, 因此式中已含有不独立的坐标, 若将 \mathbf{X} 分解为独立坐标 \mathbf{X}_i 和非独立坐标 \mathbf{X}_f , 则式(58)变为:

$$[B_i \ B_f] \begin{Bmatrix} X_i \\ X_f \end{Bmatrix} = 0 \quad (59)$$

则 X 表示为:

$$X = \begin{Bmatrix} X_i \\ X_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -B_f^{-1}B_i \end{bmatrix} X_i = SX_i \quad (60)$$

将式(60)代入式(53)且左乘 $[S]^T$, 得:

$$M^* \ddot{X}_i + C^* \dot{X}_i + K^* X_i = F^{*cb} \quad (61)$$

式中:

$$\begin{aligned} M^* &= S^T \bar{M}^{*cb} S, \\ C^* &= S^T \bar{C}^{*cb} S, \\ K^* &= S^T \bar{K}^{*cb} S. \end{aligned}$$

式(61)实质为 m 个独立的微分方程, 则可求得整体结构的固有频率以及主模态、频率响应、运动情况等。

5 失谐叶盘结构的模态分析

5.1 模态综合法的分析流程

模态综合法是求解大型复杂结构一种十分有效的手段, 主要是通过把整体结构分为若干子部件来进行分析, 将结构的特征矩阵进行缩聚, 再组装求解其模态频率, 其分析流程如图 1 所示。

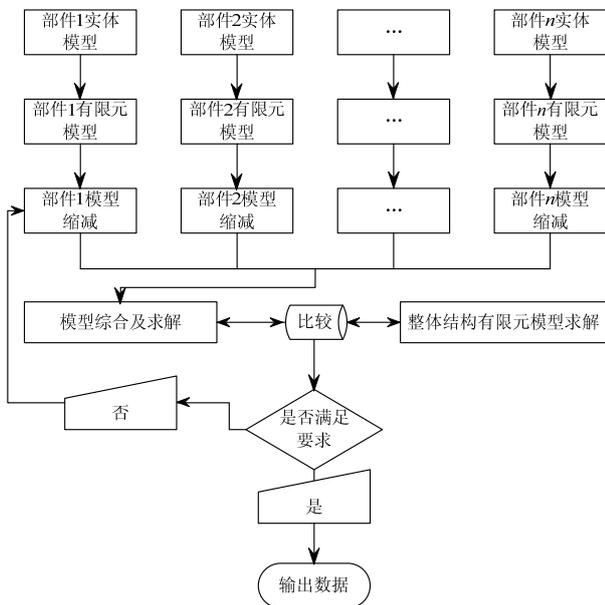


图 1 模态综合法分析流程图

Fig.1 Flow chart of the component modal synthesis

5.2 航空发动机叶盘结构的组合结构建模

航空发动机叶盘结构主要是由轮盘和叶片这两个重要结构和众多附件组成, 其性能的优劣主要受组合结构性能的影响, 所以研究发动机的组合结构的建模及其动态性能有着重要的意义, 轮盘+叶

片组合结构的子结构层次如图 2 所示。

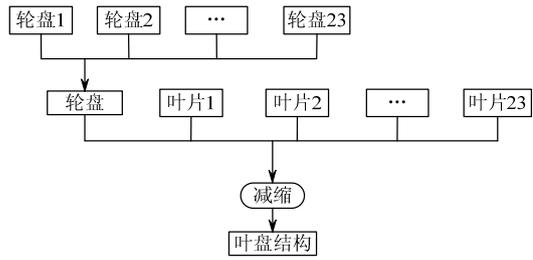


图 2 轮盘+叶片的子结构层次图

Fig.2 Substructure level hierarchy chart of the blades and disks

5.3 叶盘结构的子结构有限元模型

以某型发动机的一级压气机转子为例进行分析, 采用改进的混合界面子结构模态综合法建立有限元模型, 并把它们有效地、动态地连接起来, 各子结构的材料参数列于表 1 中, 综合过程如图 3 所示。

表 1 子结构的材料参数

Table 1 Material parameters of the substructures

子结构	$E/(\times 10^5 \text{MPa})$	μ	$\rho/(t/\text{mm}^3)$
叶片	1.01	0.32	4.48×10^{-9}
轮盘	1.84	0.3143	8.56×10^{-9}

注: E 为弹性模量; μ 为泊松比; ρ 为密度

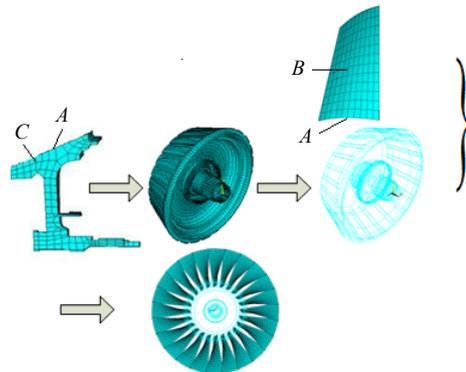


图 3 子结构的综合过程

Fig.3 Combination process of the substructures

由于加工误差、材料分散等因素的影响, 实际制造出来的各个叶片其材料性能可能会存在一定的差异, 通过改变叶片弹性模量的方式进行模拟。实际为叶片刚度的失谐, 而其它结构参数保持不变, 在此设随机第 j 个叶片的失谐量为 3%。

5.4 模态分析

对于求解航空发动机叶盘这样大型的复杂机械结构, 虽然矢量迭代法及 Rayleigh-Ritz(R-R)法等可以求解, 但不能保证较好的精度。子空间迭代法不但保证了一定的精度, 且比较经济, 但 Lanczos 法计算过程大大简化, 对于同样的问题比子空间迭

法快出 5 倍~10 倍,是一种计算效率更高的求解法。故本文采用该方法计算,当转速为 11000r/min 时,比较分析了相对典型的模态频率,如表 2 所示。

表 2 各种方法求得模态及其偏差对比

Table 2 Modal and deviation analysis of the improved hybrid interface substructure CMS method to compare with the traditional and the overall structure FEM

阶数	整体法/	传统混合界面模态综合法		改进混合界面模态综合法	
	Hz	模态/Hz	误差/(%)	模态/Hz	误差/(%)
1	263.5	263.5	0	263.5	0
3	285.7	285.7	0	285.7	0
5	342.5	342.5	0	342.5	0
10	374.6	374.1	0.13	373.9	0.19
26	411.3	410.5	0.19	410.4	0.22
28	442.6	442.6	0	442.1	0.11
30	692.6	690.2	0.34	690.1	0.36
33	786.7	783.4	0.42	784.2	0.32
50	788.2	784.5	0.47	783.7	0.57
51	972.6	968.4	0.43	969.6	0.31
60	1115.7	1111.4	0.39	1110.2	0.49
70	1116.8	1111.3	0.49	1115.1	0.15
80	1203.7	1201.8	0.16	1201.1	0.22

由表 2 可以看出采用改进混合界面子结构模态综合法和传统的混合界面子结构模态综合法的精度计算精度与整体法相比都有一定的误差,但是都在合理的范围内,不论是对于理论研究还是实际工程的应用中都是可接受的。

为研究采用改进混合界面子结构模态综合法在计算不同模态阶数时对计算效率的影响,在相同配置的计算机上,分别采用整体法,传统法以及该方法计算了叶盘结构的前 10 阶、20 阶、30 阶、40 阶、50 阶、60 阶、70 阶模态,将他们的计算时间进行对比,如表 3 所示。

表 3 各种方法求得不同阶数的计算时间及节省率

Table 3 Computational time and saving rates of the improved hybrid interface substructure CMS method to compare with the traditional and the overall structure FEM

阶数	整体法计	传统混合界面模态综合法		改进混合界面模态综合法	
	算时间/min	计算时间/min	节省率/(%)	计算时间/min	节省率/(%)
10	12.3	10.5	14.63	9.2	25.20
20	17.6	14.8	15.91	13.4	23.86
30	25.7	18.7	27.23	17.6	31.52
40	53.7	40.2	25.14	37.8	29.60
50	82.4	65.2	20.87	61.7	25.12
60	100.7	71.3	29.20	68.4	32.08
70	120.2	85.9	28.54	80.7	32.86

由表 2 和表 3 发现改进和传统的混合界面子结构模态综合法的计算结果与整体有限元模型相比,模态频率十分接近,误差分别为 0~0.49%、0~0.57%,

计算精度较高,满足工程要求;从计算效率来看,在相同的工作环境下的计算时间都有所降低,分别节省时间 14.63%~29.20%、23.86%~35.74%,可见本文采用的改进的混合界面模态综合法在保证精度的前提下,计算效率更高。

6 结论

(1) 分析推导了改进混合界面子结构模态综合法的基本理论,包括固定界面叶片子结构的减缩模型、自由界面轮盘子结构减缩模型、混合界面叶盘结构的减缩模型的综合,给出了阶次激励力而且对叶盘结构进行了失谐模拟,在模态综合过程中,引入了位移和力的双协调条件,使得分析更切合实际,更加准确。

(2) 给出了失谐叶盘结构的减缩模型的动力学方程,该方程解决了传统模型中可能存在减缩后规模大的问题,使得模型在保持精度的条件下,计算效率大大提高。

(3) 采用改进混合界面子结构模态综合法对航空发动机失谐叶盘结构进行了模态分析,研究发现,与整体结构有限元模型相比,固有频率的相对误差小于 0.57%,满足工程要求,且本文提出的方法在计算效率上却比传统混合界面子结构模态综合法提高了大约 6.54%~9.23%,因此采用该方法建立大型复杂组合结构的有限元模型进行模态分析是可行的。

参考文献:

- [1] Craig R R, Bampton M C C. Coupling of substructures for dynamic analyses [J]. AIAA Journal, 1968, 6: 1313—1319.
- [2] Hurry W C. Vibration of structural systems by component mode synthesis [J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 1960, 86: 51—69.
- [3] Hurty W C. Dynamic analysis of structural systems using component modes [J]. AIAA Journal, 1965, 3(4): 678—685.
- [4] Beck J A, Brown J M, Slater J C, et al. Probabilistic mistuning assessment using nominal and geometry based mistuning methods [J]. Journal of Turbomachinery, 2013, 135, 051004: 1—9.
- [5] 向树红, 邱吉宝, 王大钧. 模态分析与动态子结构方法新进展[J]. 力学进展, 2004, 34(3): 289—303.
Xiang Shuhong, Qiu Jibao, Wang Dajun. The resent progresses on modal analysis and dynamic sub-structure methods [J] Advances in Mechanics, 2004, 34(3): 289—303. (in Chinese)

(参考文献[6]—[14]转第 205 页)

寿命、开裂位置和开裂方位。预测疲劳寿命与橡胶隔振器实测疲劳寿命的对比结果表明,基于本文橡胶多轴疲劳寿命方法预测寿命分布在实测寿命 2 倍分散因子之内,满足工程疲劳实际的要求。

参考文献:

- [1] Gent A N, Lindley P B, Thomas A G. Cut growth and fatigue of rubbers. I. The relationship between cut growth and fatigue [J]. *Journal of Applied Polymer Science*, 1964, 8: 455—466.
 - [2] Busfield J J C, Jha V, Liang H, Papadopoulos I C, et al. Prediction of fatigue crack growth using finite element analysis techniques applied to three-dimensional elastomeric components [J]. *Plastics, Rubbers and Composites*, 2005, 34(8): 349—356.
 - [3] Mars W V, Fatemi A. A literature survey on fatigue analysis approaches for rubber [J]. *International Journal of Fatigue*, 2002, 24: 949—961.
 - [4] Mars W V. Cracking energy density as a predictor of fatigue life under multiaxial conditions [J]. *Rubber Chemistry and Technology*, 2002, 75: 1—17.
 - [5] At-Bachir M, Mars W V, Verron E. Energy release rate of small cracks in hyperelastic materials [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2012, 47: 22—29.
 - [6] Mars W V. *Multiaxial fatigue of rubber* [D]. USA: The University of Toledo, 2001: 8.
 - [7] Zine A, Benseddiq N, Abdelaziz M N, et al. Prediction of rubber fatigue life under multiaxial loading [J]. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structure*, 2006, 29: 267—278.
 - [8] Zine A, Benseddiq N, Abdelaziz M N. Rubber fatigue life under multiaxial loading: Numerical and experimental investigations. *International Journal of Fatigue*, 2011, 33: 1360—1368.
 - [9] Ayoub G, Naït-abdelaziz M, Zatria F, et al. A continuum damage model for the high-cycle fatigue life prediction of styrene-butadiene rubber under multiaxial loading [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2011, 48: 2458—2466.
 - [10] Holzapfel G A. *nonlinear solid mechanics. A continuum approach for engineering* [M]. Chichester: Wiley, 2000: 205—251.
 - [11] Dassault systèmes simulia corp. *ABAQUS 6.10. theory manual* [M]. Villacoublay: Dassault Systèmes, 2010: 1. 2. 1—3. 2. 9.
 - [12] 王小莉, 上官文斌, 刘泰凯, 等. 填充橡胶材料单轴拉伸疲劳试验及疲劳寿命模型研究[J]. *机械工程学报*, 2013, 49(14): 65—73.
Wang Xiaoli, Shangguan Wenbin, Liu Taikai, et al. Experiment of uniaxial tension fatigue and modeling of fatigue life for filled natural rubbers [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2013, 49(14): 65—73. (in Chinese)
 - [13] Shangguan Wenbin, Liu Taikai, Wang Xiaoli, et al. A method for modeling of fatigue life for rubbers and rubber isolators [J]. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 2014, 37: 623—636.
-
- (上接第 184 页)
- [6] Jung C, Saito A, Epureanu B I. Detection of cracks in mistuned bladed disks using reduced-order models and vibration data [J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2012, 6(134): 1—10.
 - [7] Bladh R, Pierre C, Castanier M P, et al. Dynamic response predictions for a mistuned industrial turbomachinery rotor using reduced-order modeling [J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2002, 124(2): 311—324.
 - [8] Bhartiya Y, Sinha A. Reduced order modeling of a bladed rotor with geometric mistuning via estimated deviations in mass and stiffness matrices [J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2013, 5(135): 1—8.
 - [9] McGee III O G, Fang C. Three-dimensional tailored vibration response and flutter control of high-bypass shroudless aeroengine fans [J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2013, 2(135): 1—26.
 - [10] 吴庆雄, 王文平, 陈宝春. 索梁结构非线性振动有限元分析[J]. *工程力学*, 2013, 30(3): 347—354, 382.
Wu Qingxiong, Wang Wenping, Chen Baochun. Finite element analysis for nonlinear vibration of cable-beam structure [J]. *Engineering Mechanics*, 2013, 30(3): 347—354, 382.
 - [11] 汪晓虹, 安方, 曹立娟, 等. 模态综合的直接变换法[J]. *航空学报*, 2009, 30(1): 92—98.
Wang Xiaohong, An Fang, Cao Lijuan, et al. Direct transformation method for mode synthesis [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2009, 30(1): 92—98. (in Chinese)
 - [12] Marinescu O, Epureanu B I, Banu M. Reduced order models of mistuned cracked bladed disks [J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2011, 5(133): 051014.1—051014.9.
 - [13] Bladh R, Castanier M P, Pierre C. Component-mode-based reduced order modeling techniques for mistuned bladed disks. part I: Theoretical models [J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2001, 123(1): 89—99.
 - [14] Guyen R J. Reduction of stiffness and mass matrices [J]. *AIAA Journal*, 1965, 3(2): 380—382.