

文章编号: 1000-4750(2015)06-0238-05

温度场中输流碳纳米管的热弹性参数振动稳定性分析

梁 峰, 包日东

(沈阳化工大学能源与动力工程学院, 辽宁, 沈阳 110142)

摘 要: 应用非局部粘弹性欧拉梁模型研究不同温度场中输送脉动流碳纳米管的热弹性参数振动稳定性问题。包含有小尺度项和热效应项的控制方程通过 Galerkin 法离散后, 用平均法对其进行求解, 得到了管道稳定性边界的解析表达式。利用数值算例分析各参数对稳定性边界的影响发现: 纳米管在高温温度场中的参数振动稳定性要比低温场中降低很多; 提高温度变化量和非局部参数值, 在低温场中可以增强系统稳定性, 而在高温场中则会降低系统稳定性; 不论在高温还是低温场中, 提高纳米管粘弹性系数都会增强系统稳定性, 但在高温场中, 管材粘弹性的这种作用会比在低温场中降低很多。该文结论可为输流纳米机械的结构设计和热弹性振动分析提供理论基础。

关键词: 输流碳纳米管; 热弹性参数振动; 稳定性; 温度场; 非局部效应

中图分类号: O326 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2013.10.0984

THERMOELASTIC PARAMETRIC RESONANCE STABILITY OF A FLUID-CONVEYING CARBON NANOTUBE IN TEMPERATURE FIELDS

LIANG Feng, BAO Ri-dong

(School of Energy and Power Engineering, Shenyang University of Chemical Technology, Shenyang, Liaoning 110142, China)

Abstract: A nonlocal viscoelastic Euler-Bernoulli beam model is developed to investigate the thermoelastic parametric resonance stability of a pulsating-fluid-conveying carbon nanotube (CNT) in different temperature fields. After discretized by the Galerkin method, the governing equation with small scale and thermal effect terms is solved by the averaging method and the analytical expression of stability boundary is obtained. It is found through numerical examples that the stability of the CNT in higher temperature fields is much poorer than that in lower ones. Increase of temperature change and nonlocal parameter in lower temperature fields can enhance the stability of the CNT, but it will reduce in higher temperature fields. Increase of viscoelastic coefficient in higher and lower temperature fields can both enhance the stability of the CNT, but this viscoelastic effect of the material on the stability will decrease in higher temperature fields. The conclusions drawn in the present paper are expected to be helpful for the structural design and thermoelastic vibration analysis of fluid-conveying nanodevices.

Key words: fluid-conveying carbon nanotube; thermoelastic parametric resonance; stability; temperature field; nonlocal effect

碳纳米管作为一种新型的优质纳米材料, 目前已经引起了众多研究学者和工程技术人员的关注。

1991年, 日本电子显微镜专家饭岛在高分辨透射电子显微镜下检验石墨电弧设备中产生的球状碳分

收稿日期: 2013-10-19; 修改日期: 2014-04-29

基金项目: 国家自然科学基金项目(51275315); 辽宁省教育厅科学研究一般项目(L2013160)

通讯作者: 梁 峰(1979—), 男, 辽宁抚顺人, 讲师, 博士, 从事非线性动力学研究(E-mail: lf84411@163.com).

作者简介: 包日东(1967—), 男, 福建上杭人, 教授, 博士, 从事输流管道流固耦合振动研究(E-mail: baoridong@sina.com).

子时,意外发现了由管状的同轴纳米管组成的碳分子,即多壁碳纳米管(Carbon nanotube)。1993年,他又发现了单壁碳纳米管。研究表明,碳纳米管具有十分优异的力学、电磁学和化学性能,其弹性模量极高,可达1.0TPa,强度是钢的100倍,是已知材料中最高的,但密度仅为钢的1/6,无论是强度还是韧性都远远优于任何已知纤维材料。碳纳米管作为复合材料的增强体,表现出了良好的强度、弹性、抗疲劳性,同时还具有耐强酸、强碱,在空气中973K以下基本不被氧化等优良性质。目前,碳纳米管已经在物理、化学、生物、电子和材料等领域得到了广泛的研究和应用,而它所引发的碳纳米管力学也已在国际上形成了研究热点。Yoon等^[1]利用多弹性梁模型研究了孤立的多壁碳纳米管的振动问题,发现其非同轴振动将会大大影响碳纳米管的电子、光学等物理特性;Natsuki等^[2]利用连续欧拉梁模型研究了双壁碳纳米管的自由振动问题;Zhang等^[3]分析了小尺度效应对轴向载荷作用下碳纳米管屈曲稳定性的影响;Khosrozadeh等^[4]则对弹性介质中碳纳米管的非线性自由振动进行了深入研究。

由于碳纳米管具有小尺度、低密度、高强度和高硬度等特性,加之完美的空心圆柱形几何结构,使其成为纳米尺度下流体储藏与运输的重要载体。碳纳米管可以作为气体存储的纳米容器,输流流体的纳米管道,最小的毛细血管,纳米级化学试管等,还可以将液态金属填充在碳纳米管内部,使其成为纳米级温度计。由于碳纳米管具有良好的力学、电学和化学特性,其内壁又是极其光滑的,因此可以被用来快速和安全地输送液氢等燃料,为能源的输送提供新的解决办法。另外,植物细胞输水的过程、医学领域的药物流体在蛋白质中输送、生物体中选择性运输粒子流的特性都和碳纳米管输流流体的问题有着相似的动力学机理,都可以用碳纳米管输流流体的动力学模型来描述。

作为一种典型的小尺度高流速流固耦合系统,输流碳纳米管常常会表现出极其丰富的动力学现象。Yoon等^[5]和Reddy等^[6]应用单弹性梁模型研究了输流碳纳米管的自由振动和结构不稳定性,证明了纳米管道内部的高速流体对管道的振动频率和振幅衰减率有明显影响;基于此项研究,Wang等^[7]应用多弹性梁模型研究了输流双壁碳纳米管的固有频率和屈曲失稳特性,发现其共振频率决定于流体流速,当流速达到一定值时,碳纳米管就会发生

屈曲失稳;Yan等^[8-9]的研究结果也证明了内部高速流体和层间的范德华力是引起输流多壁碳纳米管失稳的重要原因。但总体来说,研究碳纳米管固体力学行为的文献很多,而关于碳纳米管内流体流动问题的研究则较少,有关流固耦合下,尤其是脉动内流作用下碳纳米管的动力学行为以及振动稳定性方面的研究报道就更少。随着纳米科技的发展,输流纳米结构在工业工程、生物、医疗等领域的应用日益广泛,而其力学问题也应该得到广泛关注。这也是本文研究的意义所在。

碳纳米管的纳米级壁厚使得其对温度具有相当的敏感性。而输流碳纳米管又常常工作在各种温度环境中,因此深入研究热效应对输流碳纳米管动力学特性的影响具有重要意义。目前,有部分文献对输送定常流碳纳米管的热弹性振动问题进行了研究。其中,Chang等^[10]研究了热效应对输流单壁碳纳米管屈曲稳定性的影响;Zhen等^[11]研究了生物软组织中输流双壁碳纳米管的热弹性振动问题;Ansari等^[12]则对弹性介质中输流单壁碳纳米管的考虑热效应的非线性振动问题进行了研究。实际上,不论是纳米管还是大尺度管道,其内部流体动力源大多为脉动形式,因此绝对的定常内流只是一种理想模型,而绝大多数管内流态都是脉动的。但目前尚未发现有对脉动流作用下碳纳米管的热弹性参数振动问题开展的研究。鉴于此,本文应用非局部粘弹性欧拉梁模型研究不同温度场中输送脉动流碳纳米管的参数振动稳定性问题,重点分析热效应、非局部效应及纳米管的粘弹性特性对系统稳定性的影响。所得结论可为工程输流纳米机械的设计分析提供一定的理论基础。

1 输流碳纳米管模型及控制方程

图1所示为两端铰支输流碳纳米管的力学模型。假定管内流体为均匀流,且管道只发生横向面内振动 $y(x, t)$,管道轴线沿 x 轴, t 为时间变量,则由非局部弹性和热弹性理论,并根据管道和流体单元的力和力矩的平衡,可以得到温度场中输流碳纳米管的横向振动控制方程为^[10]:

$$\left(1 + c \frac{\partial}{\partial t}\right) EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \left[MU^2 + M \frac{\partial U}{\partial t} (L - x) - N_1 \right] \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (M + m) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2MU \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} - (e_0 a)^2 [(M + m) \cdot$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + (MU^2 - N_t) \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 2MU \frac{\partial^4 y}{\partial x^3 \partial t} \Big] = 0 \quad (1)$$

式中： c 、 E 、 I 、 L 、 m 分别为管道的Kelvin-Voigt型粘弹性系数、弹性模量、截面惯性矩、长度、单位长度的质量； N_t 为由热效应引起的轴向常力； $e_0 a$ 为表征纳米尺度效应的非局部参数； M 为管内流体单位长度的质量， U 为流速。若 $N_t = e_0 a = 0$ ，则式(1)将退化为经典的欧拉型方程。此外，在研究纳米管中微流体的微流动特性时，通常主要考虑流体的小尺度效应，但在研究管道的振动特性时，流体的小尺度效应对其影响要远小于纳米管本身小尺度效应对其的影响，因此本文研究中暂不考虑流体的小尺度效应。

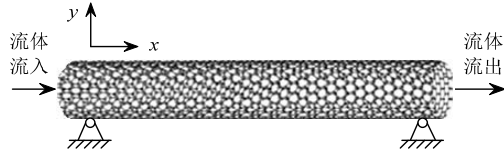


图1 两端铰支输流碳纳米管模型

Fig.1 Model of a pinned-pinned CNT conveying fluid

根据热弹性力学理论，轴向力 N_t 可表示为^[10-13]：

$$N_t = -\frac{EA}{1-2\nu} \alpha_x T \quad (2)$$

式中： ν 为管材泊松比； α_x 为管道轴向热膨胀系数； T 为温度变化量。

引入无量纲变量和参数：

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{y}{L}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \tau = \left(\frac{EI}{M+m} \right)^{1/2} \frac{t}{L^2}, \\ M_r &= \left(\frac{M}{M+m} \right)^{1/2}, \quad \alpha = \left(\frac{EI}{M+m} \right)^{1/2} \frac{c}{L^2}, \\ u &= \left(\frac{M}{EI} \right)^{1/2} LU, \quad e_n = \frac{e_0 a}{L}, \quad \bar{N}_t = \frac{N_t L^2}{EI} \end{aligned} \quad (3)$$

则式(1)可转化为如下无量纲形式：

$$\alpha \eta^{(4)} + \eta^{(4)} + [u^2 + M_r \dot{u}(1-\xi) - \bar{N}_t] \eta'' + \dot{\eta} + 2M_r u \dot{\eta}' - e_n^2 [\ddot{\eta} + (u^2 - \bar{N}_t) \eta^{(4)} + 2M_r u \dot{\eta}'''] = 0 \quad (4)$$

式中， $(\cdot)'$ 和 $(\cdot)^{\cdot}$ 分别表示 $\partial(\cdot)/\partial \xi$ 和 $\partial(\cdot)/\partial \tau$ 。考虑脉动流情况，设式(4)中流速为：

$$u = u_0 [1 + \mu \cos(\omega \tau)] \quad (5)$$

式中： u_0 为平均流速； ω 和 μ 分别为无量纲脉动频率和幅值($\mu \ll 1$)。将式(5)代入式(4)后用两振型 Galerkin 展开式：

$$\eta(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^2 q_i(\tau) \psi_i(\xi) \quad (6)$$

进行离散化处理，式中， $q_i(\tau)$ 为广义坐标， $\psi_i(\xi)$ 为两端铰支梁的振型函数。则由振型的正交性并经适当变换后可得一阶微分方程组：

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{S} \mathbf{q} + \mu \omega \mathbf{B}_1 \mathbf{q} \sin(\omega \tau) - \mu \mathbf{B}_2 \mathbf{q} \cos(\omega \tau) - \alpha \mathbf{B}_3 \mathbf{q} \quad (7)$$

式中， $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T$ ， $q_3 = \dot{q}_1$ ， $q_4 = \dot{q}_2$ ， $\alpha = \mu \bar{\alpha}$ ，而 \mathbf{S} 、 \mathbf{B}_1 、 \mathbf{B}_2 、 \mathbf{B}_3 的表达式因篇幅所限这里略去。

2 平均法求解

平均法作为一种简单有效的摄动法，已被广泛应用于各种动力学系统的振动分析中^[14-15]。本文采用该方法来分析输流碳纳米管的参数振动稳定性问题。为推导平均化方程，首先作变换 $\mathbf{q} = \sqrt{\mu} \mathbf{V} \mathbf{z}$ ， $\bar{\tau} = \omega \tau$ ，并代入式(7)中，可得：

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\omega} \mathbf{z} + \mu \left(\mathbf{A}_1 \sin \bar{\tau} - \frac{1}{\omega} \mathbf{A}_2 \cos \bar{\tau} - \frac{\bar{\alpha}}{\omega} \mathbf{A}_3 \right) \mathbf{z} \quad (8)$$

式中： (\cdot) 表示 $\partial(\cdot)/\partial \bar{\tau}$ ；转换矩阵 \mathbf{V} 由 \mathbf{S} 的特征向量组成，且 $\mathbf{z} = [z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4]^T$ ， $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{V}$ ， $\mathbf{A}_i = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{B}_i \mathbf{V}$ ($i=1,2,3$)。考虑脉动流频率 ω 在某一固定频率 ω_0 附近变化，可通过引入小参数 $\lambda = \mu \bar{\lambda}$ 表示为： $\omega = (1 + \lambda) \omega_0$ 。作变换：

$$z_{2i-1} = a_i \cos \beta_i, \quad z_{2i} = a_i \sin \beta_i, \quad i=1,2 \quad (9)$$

式中， $\beta_i = n_i \bar{\tau} + \theta_i$ ， $n_i = \omega_i / \omega_0$ ， ω_1 和 ω_2 为系统前两阶固有频率， a_1 、 a_2 、 θ_1 和 θ_2 均为 $\bar{\tau}$ 的函数。利用平均化算子 $\lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_0^T (\cdot) d\bar{\tau}$ 对变换后所得等式的右端进行平均，则可以得到幅值—相角形式的平均化方程。当 n_i 取不同值时，可以发生几种不同形式的参数共振。本文研究 $\omega_0 = 2\omega_1$ ($n_1 = 1/2$)，即第一阶主参数共振的情况。

当 $n_1 = 1/2$ 时，系统平均化方程为：

$$\begin{cases} \dot{a}_1 = (\mu/4)(U_1^2 + V_1^2)^{1/2} a_1 \sin(2\theta_1 + 2\theta_{10}) - \alpha A_1 a_1 / (2\omega_0) \\ \dot{\theta}_1 = (\mu/4)(U_1^2 + V_1^2)^{1/2} \cos(2\theta_1 + 2\theta_{10}) - \alpha (A_3^{21} - A_3^{12}) / (2\omega_0) - \lambda / 2 \\ \dot{a}_2 = -\alpha A_2 a_2 / (2\omega_0) \\ \dot{\theta}_2 = -\lambda n_2 - \alpha (A_3^{43} - A_3^{34}) / (2\omega_0) \end{cases} \quad (10)$$

式中： A_n^{ij} 代表矩阵 A_n ($n=1,2,3$)的第 i 行第 j 列； U_1 和 V_1 是 A_n^{ij} 的函数； $A_1 = A_3^{11} + A_3^{22}$ ； $A_2 = A_3^{33} + A_3^{44}$ ； $2\theta_{10} = \arctan(V_1 / U_1)$ 。从式(10)中可以看出，此时第一和第二振型运动是相互解耦的。而通过数值计算可以知道，当 $u_0 < u_{cr}$ (发散失稳临界流速)时，

$A_3^{33} + A_3^{44} > 0$, $A_3^{11} + A_3^{22} > 0$, 所以由式(10)中第三式可知, 第二振型的运动将因逐渐衰减而停止, 管道的动态稳定性最终将取决于由式(10)的前两式决定的第一振型运动的稳定性。通过对前两式进行适当变换后, 可得到第一振型零解的稳定条件为:

$$(\omega - 2\omega_1)^2 - \mu^2 \omega_1^2 (U_1^2 + V_1^2) + \alpha^2 A_1^2 > 0 \quad (11)$$

若系统不满足式(11)条件, 则将发生第一阶主参数共振。

3 结果分析和讨论

本节中将通过数值算例来分析碳纳米管在脉动内流作用时的参数振动稳定性。算例中的碳纳米管采用以下几何和物理参数^[10,13]: 纳米管密度 $\rho_t = 2.3 \text{g/cm}^3$, 外半径 $R_o = 3.5 \text{nm}$, 壁厚 $h = 0.34 \text{nm}$, 长径比 $L/(2R_o) = 100$, $E = 1 \text{TPa}$, $\nu = 0.3$, 内流密度 $\rho_w = 1 \text{g/cm}^3$ 。由Jiang等^[16]的研究可知, 纳米管的热膨胀系数在低温或室温环境中为负值, 而在高温环境中为正值。本文低温场中取 $\alpha_x = -1.6 \times 10^{-6} \text{K}^{-1}$ ^[17], 高温场中取 $\alpha_x = 1.1 \times 10^{-6} \text{K}^{-1}$ ^[17]。其他系统参数值取为: $c = 0$, $e_0 a = 70 \text{nm}$, $U = 100 \text{m/s}$ (下面各图中未具体给定的参数值均取该组数值)。

图2给出了不同温度场中由式(11)确定的 ω - μ 平面上第一阶主参数共振边界曲线随温度变化量的变化。其中曲线内部为发生参数共振区域, 外部为稳定区域。图中同时给出了利用四阶Runge-Kutta数值方法计算的失稳边界。可以看出, 二者结果相当吻合, 证明了平均法在求解稳定性边界时的精确性。此外, 由图2可见, 不同温度场中温度变化对稳定性区域的影响是截然不同的。首先, 高温场中共振区域面积明显大于低温或室温场中相同参数下的共振区域面积, 说明高温场中引起参数共振的频率范围更大, 即管道在高温场中的稳定性要比低温场中降低很多。其次, 随着温度变化量的增加, 在高温场中, 共振区域将向低频方向移动, 表明共振频率降低, 而且共振区域也增大, 说明管道稳定性降低, 而在低温场中, 不仅共振频率升高, 而且共振区域也减小, 说明管道稳定性增强。可见, 周围温度环境对输流碳纳米管的参数共振稳定性有很重要的影响。

图3分析了不同温度场中管道稳定性区域随非局部参数的变化。图中除了再次反映出相同参数下管道在高温场中的稳定性要比低温场中弱外, 我们还可以发现, 增大非局部参数值, 在高温场中会降

低共振频率, 还会增大共振区域, 使管道稳定性降低; 而在低温场中, 虽然共振频率也会降低, 但共振区域却会明显减小, 即管道稳定性得到增强。这一结论表明, 系统参数对管道稳定性的影响规律会随着温度环境的改变而发生变化, 也再次体现了输流碳纳米管参数共振稳定性对周围温度环境的依赖性。

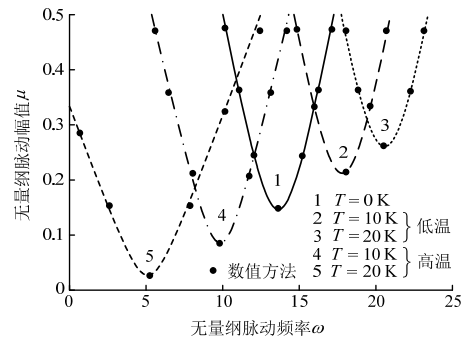


图2 不同温度场中碳纳米管稳定性区域随温度变化量 T 的变化

Fig.2 Variation of stability regions of the CNT with temperature change T in different temperature fields

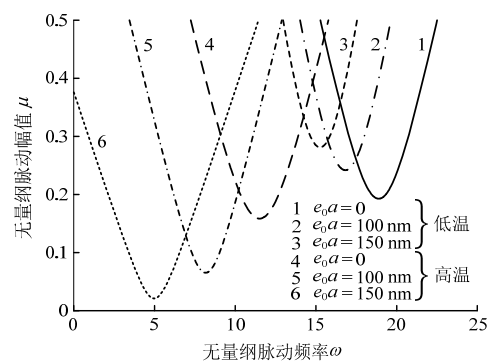


图3 不同温度场中碳纳米管稳定性区域随非局部参数 $e_0 a$ 的变化

Fig.3 Variation of stability regions of the CNT with nonlocal parameter $e_0 a$ in different temperature fields

图4分析了不同温度场中管道稳定性区域随管材粘弹性系数的变化。由图可见, 不论在哪种温度场中, 增强管材粘弹性都不会影响管道共振频率, 但会使管道稳定性增强, 然而相比之下, 改变相同的粘弹性系数值在高温场中使管道稳定性的增强程度远不如在低温场中, 这说明高温环境会削弱管材粘弹性对管道参数振动的抑制作用, 这对管道的稳定性是很不利的。

综上所述, 输流碳纳米管所处的温度场对其稳定性有重要的影响, 尤其是高温环境, 对其稳定性是相当不利的。这是输流碳纳米管一个很重要的特性。此外, 从控制式(1)和最后的结果中也可以看出, 环境温度的变化实质上是使管道产生了附加的轴

向力, 其不同温度场中会表现为拉力或压力, 这是导致管道固有频率和参数共振稳定性区域变化的主要原因。

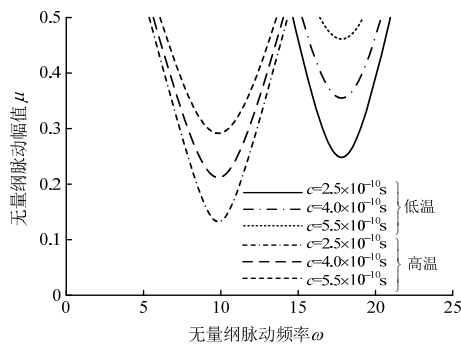


图4 不同温度场中碳纳米管稳定性区域随粘弹性系数 c 的变化

Fig.4 Variation of stability regions of the CNT with viscoelastic coefficient c in different temperature fields

4 结论

本文应用非局部粘弹性欧拉梁模型研究了不同温度场中输送脉动流碳纳米管的热弹性参数振动稳定性问题。通过文中分析, 可得到以下结论:

(1) 纳米管在高温温度场中的参数振动稳定性要比低温场中降低很多。

(2) 提高温度变化量和非局部参数值, 在低温场中可以增强系统稳定性, 而在高温场中却会降低系统稳定性。

(3) 增强纳米管粘弹性在各种温度场中均可以提高系统的稳定性, 但高温环境会明显削弱管材粘弹性对稳定性的这种作用。

总之, 高温环境无论对输流碳纳米管的本身稳定性还是对其他参数对稳定性作用的影响都是不利的。因此在进行输流纳米机械的设计时, 应着重考虑实际工况的温度条件, 尽量避免长时间高温工作, 以保证纳米管安全、稳定地工作, 延长纳米管的寿命。

参考文献:

[1] Yoon J, Ru C Q, Mioduchowski A. Noncoaxial resonance of an isolated multiwall carbon nanotube [J]. *Physical Review B*, 2002, 66(23): 233402.
 [2] Natsuki T, Lei X W, Ni Q Q, et al. Free vibration characteristics of double-walled carbon nanotubes embedded in an elastic medium [J]. *Physics Letters A*, 2010, 374(26): 2670–2674.
 [3] Zhang Y Q, Liu G R, Wang J S. Small-scale effects on buckling of multiwalled carbon nanotubes under axial

compression [J]. *Physical Review B*, 2004, 70(20): 205430.
 [4] Khosrozadeh A, Hajabasi M A. Free vibration of embedded double-walled carbon nanotubes considering nonlinear interlayer van der Waals forces [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2012, 36(3): 997–1007.
 [5] Yoon J, Ru C Q, Mioduchowski A. Vibration and instability of carbon nanotubes conveying fluid [J]. *Composites Science and Technology*, 2005, 65(9): 1326–1336.
 [6] Reddy C D, Lu C, Rajendran S, et al. Free vibration analysis of fluid-conveying single-walled carbon nanotubes [J]. *Applied Physics Letters*, 2007, 90(13): 133122.
 [7] Wang L, Ni Q, Li M. Buckling instability of double-wall carbon nanotubes conveying fluid [J]. *Computational Materials Science*, 2008, 44(2): 821–825.
 [8] Yan Y, Wang W Q, Zhang L X. Dynamical behaviors of fluid-conveyed multi-walled carbon nanotubes [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2009, 33(3): 1430–1440.
 [9] Yan Y, He X Q, Zhang L X, et al. Dynamic behavior of triple-walled carbon nanotubes conveying fluid [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 319(3/4/5): 1003–1018.
 [10] Chang T P. Thermal-mechanical vibration and instability of a fluid-conveying single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium based on nonlocal elasticity theory [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2012, 36(5): 1964–1973.
 [11] Zhen Y X, Fang B, Tang Y. Thermal-mechanical vibration and instability analysis of fluid-conveying double walled carbon nanotubes embedded in visco-elastic medium [J]. *Physica E*, 2011, 44(2): 379–385.
 [12] Ansari R, Hemmatnezhad M, Rezapour J. The thermal effect on nonlinear oscillations of carbon nanotubes with arbitrary boundary conditions [J]. *Current Applied Physics*, 2011, 11(3): 692–697.
 [13] Wang L, Ni Q, Li M, et al. The thermal effect on vibration and instability of carbon nanotubes conveying fluid [J]. *Physica E*, 2008, 40(10): 3179–3182.
 [14] Namachchivaya N S. Non-linear dynamics of supported pipe conveying pulsating fluid – I. Subharmonic resonance [J]. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 1989, 24(3): 185–196.
 [15] Namachchivaya N S, Tien W M. Non-linear dynamics of supported pipe conveying pulsating fluid – II. Combination resonance [J]. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 1989, 24(3): 197–208.
 [16] Jiang H, Hwang K C, Liu B, et al. Thermal expansion of single wall carbon nanotubes [J]. *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, 2004, 126(3): 265–270.
 [17] Yao X H, Han Q. Buckling analysis of multiwalled carbon nanotubes under torsional load coupling with temperature change [J]. *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, 2006, 128(3): 419–427.