

文章编号: 1000-4750(2015)06-0183-09

考虑膜材各向异性的膜结构褶皱分析

于磊¹, 赵阳¹, 王震²

(1. 浙江大学空间结构研究中心, 杭州 310058; 2. 浙江省建筑设计研究院, 杭州 310006)

摘 要: 推导了应用于向量式有限元三角形膜单元的各向异性膜材本构矩阵; 进一步推导了各向异性膜材褶皱状态下的修正本构矩阵, 并提出更为合理的主偏夹角计算方法。在此基础上编制了考虑膜材各向异性的膜结构荷载分析与褶皱分析程序, 并进行了算例验证。算例分析表明, 所编制的向量式有限元程序可以很好地完成各向异性膜结构的荷载分析与褶皱分析, 验证了理论推导的正确性和分析程序的可靠性。分析结果还表明膜材的各向异性与褶皱效应对膜结构的受力性能产生显著影响。

关键词: 膜结构; 向量式有限元; 各向异性; 褶皱分析; 本构矩阵

中图分类号: TU383 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2013.12.1180

WRINKLING ANALYSIS OF MEMBRANE STRUCTURES ACCOUNTING FOR ANISOTROPIC PROPERTY

YU Lei¹, ZHAO Yang¹, WANG Zhen²

(1. Space Structure Research Center, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China;

2. Zhejiang Province Institute of Architectural Design and Research, Hangzhou 310006, China)

Abstract: The constitutive matrix of an anisotropic membrane material applied to triangular membrane elements of Vector Form Intrinsic Finite Element (VFIFE) is derived. The modified constitutive matrix of a wrinkled anisotropic membrane is also derived, and a more reasonable method is proposed for the calculation of the angle between principle stress and local coordinate system. On this basis, a computer program for loading analysis and wrinkling analysis of anisotropic membrane structures is developed, and numerical examples are provided. It is shown from numerical results that both loading analysis and wrinkling analysis of anisotropic membrane structures can be performed well by the developed VFIFE program, verifying the validity of the theoretical derivation and the reliability of the computer program. It is also indicated that anisotropic properties and the wrinkling effect in membrane materials have a significant influence on the structural behavior of membrane structures.

Key words: membrane structures; vector form intrinsic finite element; anisotropic; wrinkling analysis; constitutive matrix

建筑膜材料是一种在织物基体上涂敷涂层材料而制成的柔性复合材料, 呈现各向异性力学特性, 该性能对膜结构荷载分析和裁剪设计有着直接影响。而由于膜材只能受拉不能抗压的物理特性,

膜结构在荷载作用下容易发生褶皱, 影响膜结构的外观和安全。

非线性有限元是目前膜结构分析中最常用的方法^[1], 如 Bletzinger 和 Ramm^[2]利用非线性有限元

收稿日期: 2013-12-18; 修改日期: 2014-10-24

基金项目: 国家自然科学基金项目(51378459); 浙江省重点科技创新团队项目(2010R50034)

通讯作者: 赵阳(1970—), 男, 浙江绍兴人, 教授, 博士, 博导, 从事钢结构、薄壳结构、空间结构研究(E-mail: cezyzhao@zju.edu.cn).

作者简介: 于磊(1989—), 男, 甘肃天水人, 硕士生, 从事钢结构、膜结构研究(E-mail: yulei070732@126.com);

王震(1985—), 男, 浙江台州人, 工程师, 博士, 从事钢结构、空间结构研究(E-mail: wzjgpc@163.com).

对膜结构找形分析, Valdés 等^[3]考虑了膜材的各向异性, 对膜结构进行荷载与褶皱分析。非线性有限元适用性广计算精度高, 但往往需要反复迭代求解大型方程, 具有较强非线性的膜结构在分析中往往会出现迭代不收敛的情况。动力松弛法^[4]和力密度法^[5]也是膜结构分析中较为常用的方法。动力松弛法对各节点施加激振力使之围绕平衡点振动, 施加阻尼使之达到平衡状态, 该方法无须求解非线性方程, 但往往需要大量反复计算才能得到精确结果。力密度法通过设置力密度建立静力平衡方程, 将非线性问题用线性方法解决, 极大提高了运算效率, 但计算结果往往不够精确。周树路和叶继红^[6]引入动力松弛法的思想改进了力密度法, 使其计算效率和计算精度得到提升。动力松弛法与力密度法均将膜结构离散为索网结构模型, 只需调整各方向索网刚度即可考虑膜材的各向异性。而非线性有限元方法在考虑膜材各向异性时需根据膜材铺设方向对各个单元设置局部坐标系, 过程较为繁琐。

最早的膜结构褶皱分析方法是由 Wagner 提出的张力场理论^[7]。后来, Roddeman 等^[8]通过修改薄膜应变张量使膜材产生单向褶皱, Lu 等^[9]对该方法进行改进, 通过采用曲线坐标得到薄膜应力和切线刚度矩阵的简明表达式。Fujikake 等^[10]针对张拉膜结构提出修正本构矩阵的方法, 谭锋等^[11]考虑初始预应力产生的应变, 结合主应力-主应变判定准则提出了更为合理的修正本构矩阵方法。

向量式有限元^[12-14]是一种基于向量力学理论的新型数值计算方法, 该方法对构件的空间位置和时间历程均采用点值描述, 通过对每个质点建立牛顿运动方程直接求解。由于计算过程中无须建立刚度矩阵及求解大型非线性方程, 有效避免了非线性有限元在对大变形大转动的结构和机构运动进行计算时出现的矩阵奇异或迭代不收敛问题, 非常适用于膜结构大变形大转角的找形与荷载分析。彭涛^[15]将主应力-主应变判定准则和文献^[11]提出的修正本构矩阵方法引入向量式有限元三角形膜单元, 并编制了程序。本文首先推导了应用于向量式有限元的各向异性膜材的本构矩阵, 然后在文献^[15]的基础上考虑膜材的各向异性, 推导了各向异性膜材褶皱状态下的修正本构矩阵, 并采取了更合理的主偏夹角计算方法。以此为理论基础编制了考虑膜材各向异性的膜结构荷载计算与褶皱分析程序, 并进行算例验证与分析。

1 向量式有限元三角形膜单元

利用向量式有限元进行膜结构分析时, 通常可将结构离散为三角形平面膜单元, 将结构的质量按照一定的方式分配到膜单元节点上, 用一组时间点的点值来描述各质点的运动过程, 质点的运动方程满足牛顿第二定律。向量式有限元将各时间步长内的结构单元的变形区分为两部分: 刚体位移和纯变形。刚体位移通过单元的逆向运动扣除, 即可得到膜单元的纯变形量, 进而根据膜单元的应力应变关系, 求得各质点的不平衡力, 以用于下一时间步长质点位移的计算。基于向量式有限元的三角形膜单元基本理论公式详见文献^[15]。

2 各向异性膜材的本构矩阵

在向量式有限元中, 膜单元的纯变形量通常为局部坐标系下的应变 $\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}$, 但由于通常以单元一边为 x 轴建立局部坐标系, 与弹性主轴方向不一致, 因此需要对本构关系进行坐标转换求出直接用于局部坐标系的本构矩阵。

常用的建筑膜材料为正交异性材料, 以膜材经向为 x' 轴, 纬向为 y' 轴建立弹性坐标系 $ox'y'$, 各向异性膜材的应力-应变关系为:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_{x'}}{1-\nu_x'\nu_{y'}} & \frac{\nu_{y'}E_{x'}}{1-\nu_x'\nu_{y'}} & 0 \\ \frac{\nu_x'E_{y'}}{1-\nu_x'\nu_{y'}} & \frac{E_{y'}}{1-\nu_x'\nu_{y'}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}' \quad (1)$$

式中: $E_{x'}$ 、 $E_{y'}$ 分别为经、纬向膜材弹性模量; $\nu_{x'}$ 、 $\nu_{y'}$ 分别为经、纬向膜材泊松比; $G_{xy'}$ 为膜材剪切模量。

如图 1 所示, 每一时间步内局部坐标系 oxy 与弹性坐标系 $ox'y'$ 夹角为 θ (逆时针为正)。则弹性坐标系与局部坐标系的应力关系为:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} \quad (2)$$

其中: $c = \cos \theta$; $s = \sin \theta$; \mathbf{A} 被称作变换矩阵,

并且是一个正交矩阵。

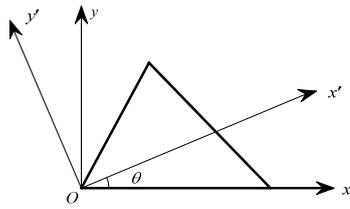


图 1 局部坐标系与弹性坐标系

Fig.1 Local coordinate system and elastic coordinate system

由于向量式有限元每一步时间步长很小，每个时间步长内单元变形符合大变形小应变假定。因此弹性坐标系与局部坐标系应变有相似关系：

$$\left\{ \varepsilon_{x'} \quad \varepsilon_{y'} \quad \frac{1}{2} \gamma_{x'y'} \right\}^T = \mathbf{A} \left\{ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \frac{1}{2} \gamma_{xy} \right\}^T \quad (3)$$

引入鲁塔矩阵：

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

式(3)可化为：

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5)$$

将式(2)、式(5)代入式(1)，得：

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}^T \mathbf{D} \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6)$$

因此局部坐标系下各向异性膜材的本构关系为：

$$\mathbf{D}' = \mathbf{A}^T \mathbf{D} \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{R}^{-1} \quad (7)$$

3 各向异性膜材的褶皱处理

3.1 褶皱状态判别

膜材受力状态包括纯拉、单向褶皱和双向褶皱，需要进行膜材受力状态判别后再进行不同本构关系修正。目前最常用的判别方法包括主应力准则、主应变准则和主应力-主应变准则。本文采用 Roddeman 等提出的最适用于正交各向异性膜材的主应力-主应变准则^[8]进行褶皱状态判别。设膜材内主应力为 σ_1 和 σ_2 ($\sigma_2 \leq \sigma_1$)，主应变为 ε_1 和 ε_2 ($\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$)，可将主应力-主应变准则表述如下：

- 1) 当 $\sigma_2 > 0$ 时，膜材处于纯拉状态；
- 2) 当 $\sigma_2 \leq 0$ 且 $\varepsilon_1 > 0$ 时，膜材处于单向褶皱状态；
- 3) 当 $\varepsilon_1 \leq 0$ 时，膜材处于双向褶皱状态。

3.2 各向异性膜材褶皱状态下的修正本构矩阵

当判断膜材处于单向褶皱状态时，各向异性膜材只在最大主应力方向存在刚度，因此首先需要判

$$a = \frac{\bar{D}_{11}(\bar{D}_{32}\bar{D}_{23} - \bar{D}_{22}\bar{D}_{33}) + \bar{D}_{12}(\bar{D}_{21}\bar{D}_{33} - \bar{D}_{23}\bar{D}_{31}) + \bar{D}_{13}(\bar{D}_{31}\bar{D}_{22} - \bar{D}_{21}\bar{D}_{32})}{\bar{D}_{32}\bar{D}_{23} - \bar{D}_{22}\bar{D}_{33}} \quad (11)$$

断三角形单元中的最大主应力方向。以最大主应力方向为 x'' 轴建立主应力坐标系，局部坐标系与主应力坐标系的主偏夹角(逆时针为正)可由下式求得^[16]：

$$\tan 2\varphi = (-2\tau_{xy}) / (\sigma_x - \sigma_y) \quad (8)$$

将各单元应力值代入式(8)后，得到分子、分母只有四种情况：

- 1) $\tan 2\varphi = \text{正/正}$ (第 1 象限)，则 $\varphi = \frac{1}{2} \arctan |(-2\tau_{xy}) / (\sigma_x - \sigma_y)|$ ；
- 2) $\tan 2\varphi = \text{正/负}$ (第 2 象限)，则 $\varphi = \pi - \frac{1}{2} \arctan |(-2\tau_{xy}) / (\sigma_x - \sigma_y)|$ ；
- 3) $\tan 2\varphi = \text{负/负}$ (第 3 象限)，则 $\varphi = \pi + \frac{1}{2} \arctan |(-2\tau_{xy}) / (\sigma_x - \sigma_y)|$ ；
- 4) $\tan 2\varphi = \text{负/正}$ (第 4 象限)，则 $\varphi = -\frac{1}{2} \arctan |(-2\tau_{xy}) / (\sigma_x - \sigma_y)|$ 。

由于主偏夹角每一步都需要重新计算，求得的主应力方向又存在两个，需要进一步判断以选取最大主应力方向，编程不当很容易出现判断错误或数值溢出，这使得主偏夹角的计算成为褶皱状态下本构关系修正的计算难点。上述方法的优点在于直接求得最大主应力方向，无须再进行判断控制，反三角函数自变量均为正值，程序简洁，数值不易溢出。

与各向异性膜材本构关系的推导过程类似，主应力坐标系下各向异性膜材的本构矩阵为：

$$\bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} & \bar{D}_{13} \\ \bar{D}_{21} & \bar{D}_{22} & \bar{D}_{23} \\ \bar{D}_{31} & \bar{D}_{32} & \bar{D}_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{A}' \mathbf{D}' \mathbf{R}' \mathbf{A}'^T \mathbf{R}'^{-1} \quad (9)$$

其中： \mathbf{R} 为鲁塔矩阵； \mathbf{A}' 同样为变换矩阵，其形式与式(2)中的变换矩阵 \mathbf{A} 一致，只需将其中的 θ 改为主偏夹角 φ ，即 $c = \cos \varphi$ ， $s = \sin \varphi$ 。

在主应力坐标系下，发生单向褶皱时， $\sigma_2 = 0$ ，应将本构关系修正为^[11]：

$$\tilde{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a\eta & 0 \\ 0 & 0 & a\eta \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中：

η 为一微小量,传统有限元中引入该量是为了防止病态矩阵的出现^[11]。本文采用向量式有限元法无须求解线性方程组,不存在矩阵病态问题,但在此处同样不可将 η 置为0。单向褶皱区域若取 $\eta=0$,褶皱单元受压时刚度为0,褶皱区域边缘的压应力无法向褶皱区域中部传递,会对褶皱区域的判断产生不可忽略的误差。因此虽与传统有限元原因不同,但同样 η 值不得为0,以保证计算效率和精度。

最后将本构关系修正回局部坐标系下,可得单向褶皱状态下各向异性膜材的本构矩阵:

$$D'' = A'^T \tilde{D} R A' R^{-1} \quad (12)$$

在双向褶皱状态下, $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0$, 在主应力坐标系下将本构矩阵修正为:

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} \eta a & 0 & 0 \\ 0 & \eta a & 0 \\ 0 & 0 & \eta a \end{bmatrix} \quad (13)$$

同样,这里 η 也不可置为0。将式(13)代入式(12)即可求得双向褶皱状态下各向异性膜材的本构矩阵 D'' 。

3.3 各向异性膜材褶皱判断处理流程

根据上述理论,可在向量式有限元分析中对各向异性膜材的褶皱状态进行判断处理,其流程如图2所示。

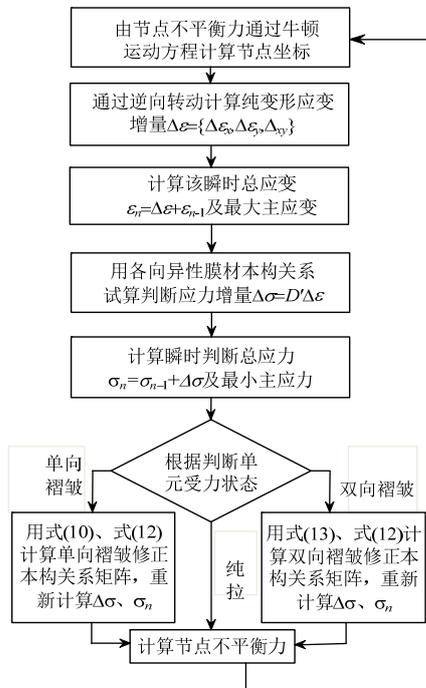


图2 各向异性膜材褶皱状态判断流程图

Fig.2 Flow chart of wrinkle judgment for anisotropic membrane

4 算例分析

以文献[15]的向量式有限元三角形膜单元基本公式为基础,结合本文上述理论推导,采用MATLAB编制了考虑膜材各向异性的膜结构荷载计算与褶皱分析程序,下面进行算例验证与分析。

算例 1. 双抛物线曲面一膜片,初始形状由以下函数所确定:

$$z = \frac{16f}{a^2 b^2} \left[\left(\frac{a}{2} \right)^2 - \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{b}{2} \right)^2 - \left(y - \frac{b}{2} \right)^2 \right], \quad 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b \quad (14)$$

如图3所示,本算例取矩形膜片边长 $a=b=1\text{m}$,矢高 $f=0.1\text{m}$,四边固定。膜材厚度 $t=0.001\text{m}$,质量密度 $\rho=1.0 \times 10^7 \text{kg/m}^3$ 。考虑各向异性膜材,经纬向弹性模量分别为 $E_x=8000\text{MPa}, E_y=4000\text{MPa}$,泊松比分别为 $\nu_{xy}=0.6, \nu_{yx}=0.3$,剪切模 $G_{xy}=200\text{MPa}$ 。将膜片划分为200个三角形膜单元。对膜片施加1.5MPa 竖直向上内压。

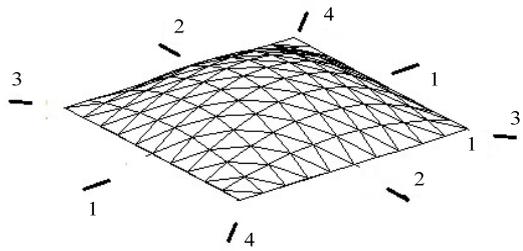
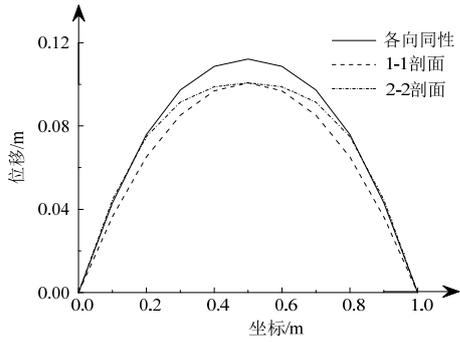


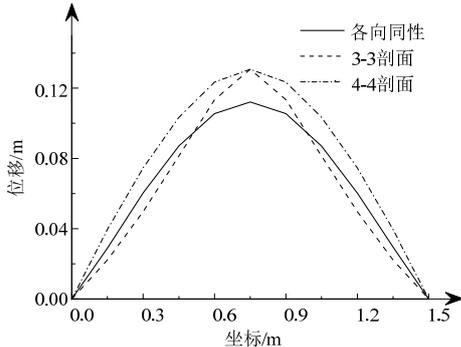
图3 双抛物线膜片初始状态及网格划分

Fig.3 Initial shape and model meshing of double parabolic membrane

图4比较了各向异性膜材与各向同性膜材(取 $E_x=E_y=6000\text{MPa}$)的节点位移计算结果。其中图4(a)中膜材的经、纬向分别沿膜片边界的平行方向布置,图中给出了与边界平行的两条中线,即1-1、2-2剖面(剖面位置示于图3)上的节点竖向位移;图4(b)中膜材的经纬向沿膜片对角线方向布置,图中给出了两对角线,即3-3、4-4剖面上的节点竖向位移。显然,各向同性膜材在1-1剖面、2-2剖面以及3-3、4-4剖面上的位移是完全一致的,而考虑各向异性后位移出现明显差异,刚度较大的膜材经向1-1、3-3剖面上的位移小于刚度较小的纬向2-2、4-4剖面上的位移,最大差异约50%。可见膜材各向异性对膜材的受力性能产生较大影响,分析中应予考虑。



(a) 膜材经纬向沿边界平行方向布置



(b) 膜材经纬向沿对角线方向布置

图4 各向异性与各向同性膜材的位移计算结果

Fig.4 Displacements of anisotropic and isotropic membrane

在常用的通用有限元软件如 ANSYS、ABAQUS 中，膜单元默认为各向同性，考虑各向异性膜材需要建立局部坐标对膜材进行特殊定义，过程较为繁琐。本文方法在膜结构分析中考虑膜材的各向异性，操作简单，计算准确。

算例 2. 图 5 所示矩形膜片，沿 AB、CD 两对边作用有均布拉力 N_y ，在 AC、BD 两对边作用有拉力 P 和弯矩 M。当 $M=0$ 时，整个膜材处于纯拉状态，随着 M 的增大，膜材底部会出现沿 y 方向的单向褶皱，并且褶皱区域 EFDC 会随着 M 的增大而不断变大。

本算例是验证膜材褶皱效应的经典算例，国内外学者对其进行了许多研究，其中文献[17]给出了褶皱高度与外荷载关系的理论解：

$$\frac{b}{h} = \begin{cases} 0 & \frac{M}{Ph} < \frac{1}{6}, \text{ 膜片处于纯拉状态} \\ \frac{3M}{Ph} - \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \leq \frac{M}{Ph} < \frac{1}{2}, \text{ 膜片处于单向褶皱状态} \end{cases}$$

考虑膜材为各向同性材料，弹性模量 $E=300\text{MPa}$ ，泊松比 $\nu=0.3$ 。膜片宽 $l=5.0\text{m}$ ，高 $h=3.0\text{m}$ ，厚度 0.001m ，密度 $\rho=4000\text{kg/m}^3$ 。

采用三角形膜单元进行网格划分，见图 6。将外荷载 N_y 、P 和 M 都等效为节点荷载。加载时首先

缓慢加载竖直方向均布拉力 $N_y=0.02\text{MPa}$ 和水平方向拉力 $P=60\text{N}$ ，随后保持 N_y 和 P 不变，逐步增大弯矩 M 以计算不同荷载下的褶皱区域高度。

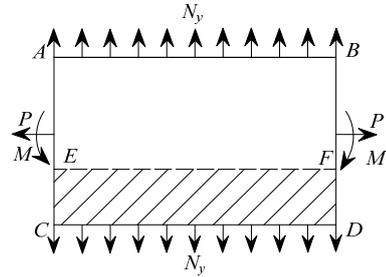


图 5 矩形膜片

Fig.5 Rectangular membrane

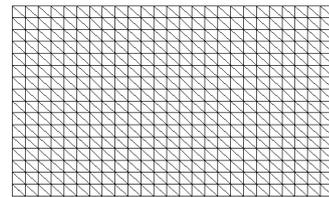


图 6 矩形膜片网格划分

Fig.6 Model meshing of rectangular membrane

膜片中间域褶皱区域高度的计算结果及与理论解对比如图 7 所示。可以看出，在大部分情况下本文向量式有限元计算结果和理论值一致，仅在弯矩较大时本文求得的褶皱高度略小于理论计算高度。这是由于膜结构受到平面内荷载时产生褶皱区域，受压刚度修正为极小值，导致收敛缓慢造成的误差。计算表明，膜结构宽度越小，产生的误差越小。

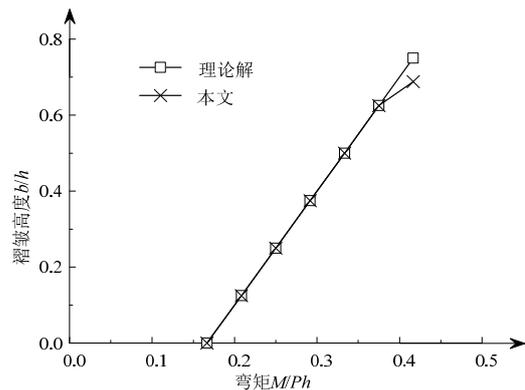


图 7 褶皱区域高度

Fig.7 Height of wrinkled area

算例 3. 图 7 所示等边六边形气枕，边长 $L=0.25\text{m}$ ，厚度 $t=0.001\text{m}$ ，初始状态水平放置，在均匀气压下以 50Pa/s 的速率充气膨胀直到 200Pa 。气枕结构常用 ETFE 各向同性材料， $E=7.0\text{MPa}$ ， $\nu=0.3$ ， $\rho=4000\text{kg/m}^3$ 。采用三角形膜单元进行网格划分，如

图 8 所示，上下两片膜片共 1200 单元。

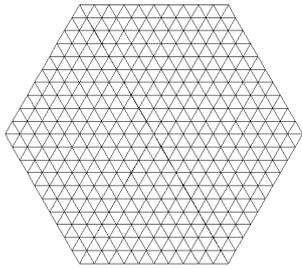


图 8 六边形充气膜初始状态及网格划分

Fig.8 Initial shape and model meshing of hexagonal air cushion

目前大部分程序在气枕充气计算时均未考虑膜材的褶皱效应，本算例在考虑褶皱效应的前提下对六边形充气膜进行分析。图 9 为本文分析程序跟踪出的褶皱单元数量变化曲线，图 10 为若干典型时刻的褶皱分布图，其中白色单元表示处于纯拉状态，灰色单元处于单向褶皱状态，黑色单元处于双向褶皱状态。可以看出，随着荷载的增大，单向褶皱和双向褶皱单元的数量不断增加，曲线趋势总体呈正相关。褶皱开始从六边形边部出现并逐渐向内扩展。当充气至 0.6s，荷载达到 30Pa 左右时，褶皱数量达到驻值，充气膜中部出现大量褶皱单元。随后荷载增大，充气膜中间隆起进入纯拉状态，气枕中部褶皱数量减少，但边上的褶皱区域不断向中间扩展，因此总体褶皱数量减少后又开始持续增加。当荷载达到 100Pa 时，褶皱单元达到 750 个左右，超过了单元总数的 60%，此时褶皱单元数达到最大值，充气膜形状不再有较大改变，除了中间部分处于纯拉状态外，边部区域基本处于褶皱状态。荷载持续增大，少量褶皱区域在气体压力下变为纯拉，褶皱单元数量缓慢减少，并逐渐稳定在 700 左右。

本例的气枕充气过程中，首先在中心及周边出现大量细小的局部褶皱凹陷，随后往周边区域转移；充满气压后最终褶皱形状(图 10(f))呈现为周边上下膜面交界处的多条(2 条~3 条)垂直交界线的波纹凹陷，并由于周边附近单向褶皱单元的存在而延伸至交界附近一定范围。至于波纹条数、凹陷幅值等褶皱形状具体参数可通过加密网格模型由本文方法分析获得。由于褶皱形状与气枕尺寸、充气气压大小等因素密切相关，而这并非本文关注的重点，因而未作进一步具体分析。膜面中心区域除开始的局部褶皱外均为正高斯曲面形状，这是一种不稳定的曲面形状；但由于最终气枕是在充满气压情况下承载，并不会由于大的机构变形而丧失结构的形状稳定性。

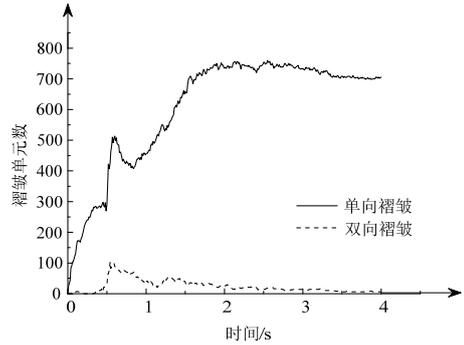


图 9 六边形充气膜褶皱单元数

Fig.9 Number of wrinkled elements in hexagonal air cushion

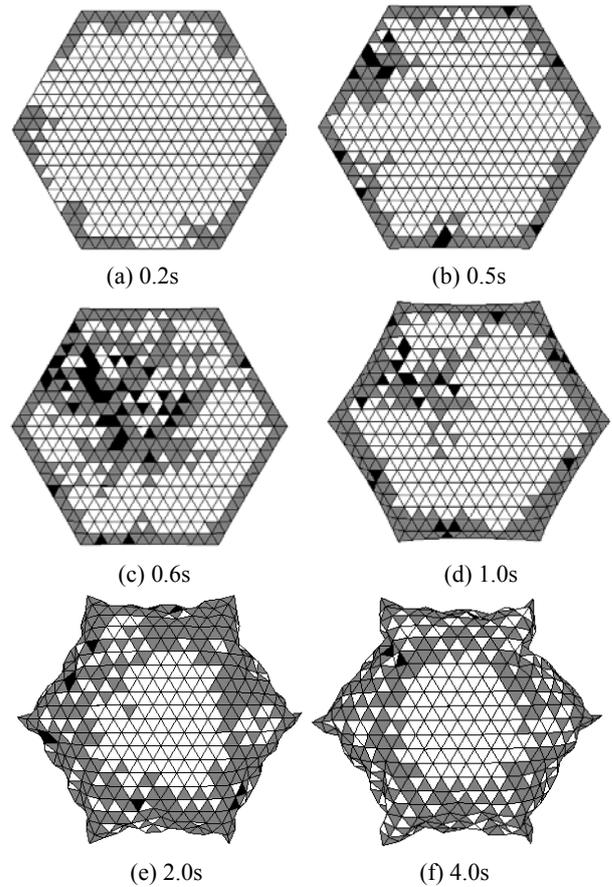


图 10 六边形充气膜的结构变形及褶皱单元分布
Fig.10 Structural deformation and wrinkled element distribution in hexagonal air cushion

图 11 比较了考虑及不考虑褶皱效应时气枕中心点的竖向位移。可以看出，本算例在充气过程中考虑褶皱效应的位移接近不考虑褶皱效应的 1.5 倍，可见考虑褶皱与否对气枕充气结果影响很大，分析中应充分考虑褶皱效应的影响。

本算例应用向量式有限元分析方法，引入褶皱判断和处理机制，详细给出了薄膜结构在荷载作用下的单向、双向褶皱形成和分布情况，体现了本文方法在褶皱问题分析中的有效性和优势。算例 4 将

进一步讨论材料各向异性对褶皱形成和分布的影响。

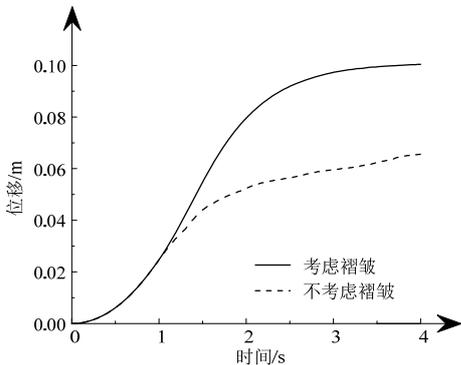


图 11 气枕中点的位移

Fig.11 Displacement of central point in air cushion

算例 4. 图 12 所示马鞍形膜结构，平面投影为对角线长 6m 的菱形，四边固定，高点与低点之间的高差为 1m。结构划分为 200 个三角形膜单元。两条对角线中两高点连线方向为膜材的经向，两低点连线方向为膜材的纬向。纬向弹性模量 E_2 保持为 600MPa，经向弹性模量 E_1 分别取 1200MPa、1050MPa、900MPa、750MPa、600MPa 和 450MPa 以考察膜材刚度变化对膜结构受力性能的影响，剪切模量 $G=20\text{MPa}$ ，泊松比为 $\nu_{12}=0.6$ ， $\nu_{21}=(E_2/E_1)\nu_{12}$ ，厚度 $t=1\text{mm}$ ，预应力 $\sigma_x=\sigma_y=2\text{kN/m}^2$ ，逐步以 1Pa/s 的速率施加 40kN/m^2 均布向上的荷载。

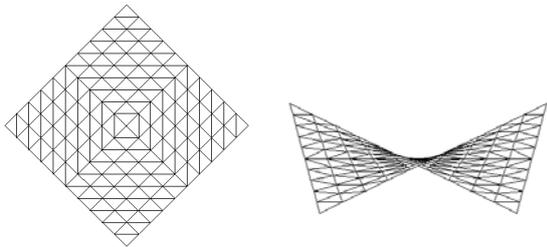


图 12 马鞍形膜结构初始状态和网格划分

Fig.12 Initial shape and model meshing of saddle-shaped membrane

图 13 所示为褶皱单元数随荷载的变化曲线，可以看出不同材料时马鞍形膜结构随荷载增大出现的褶皱变化趋势。当 E_1 取 1200MPa、1050MPa、900MPa、750MPa 时膜结构褶皱单元数变化趋势大体相同。当荷载增加到 0.3kN/m^2 左右开始出现单向褶皱，褶皱单元数急剧增大，并很快达到峰值。经向刚度越大，褶皱单元数峰值越大。之后随荷载的增大，褶皱单元数缓慢下降。当马鞍形曲面突变为向上突起时，褶皱单元数急剧减小，褶皱单元数变化曲线上可观察到下降陡坡。经向刚度越小，下降

陡坡越不明显。之后随着荷载增大，膜面中间鼓起区域逐渐增大，褶皱区域变为纯拉，褶皱单元数逐渐减小。最后不同刚度膜结构的褶皱单元数基本相同，均为 20 个~30 个。当材料为各向同性($E_1=600\text{MPa}$)时，膜结构产生的褶皱单元很少，且达到峰值后不再变化；当 $E_1=450\text{MPa}$ 时，结构不产生褶皱单元。分析结果表明，马鞍形膜结构高点连线方向刚度越大，越容易产生褶皱；刚度越小，越不容易产生褶皱。

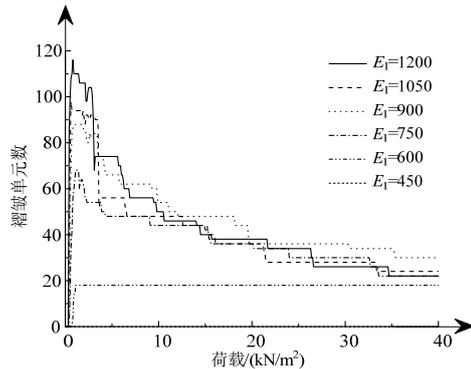


图 13 马鞍形膜结构褶皱单元数

Fig.13 Number of wrinkled elements in saddle-shaped membrane

图 14 为 $E_1=1050\text{MPa}$ 时马鞍形膜结构若干典型时刻的褶皱分布和结构形态。褶皱单元最早出现于膜结构高点连线上，并随着荷载增大，褶皱的宽度迅速增大。当荷载达到 0.6kN/m^2 时，膜结构中部区域几乎全部发生单向褶皱。当荷载达到 4.0kN/m^2 时，曲面已不再呈现马鞍形，中部膜片向上鼓起，膜片中部的褶皱部分重新变为纯拉状态。随着荷载的增大，中部纯拉区域越来越大，当荷载达到 40kN/m^2 时，仅在两高点附近区域存在少量褶皱单元。

本例的马鞍面向上受力变形过程中，开始在两侧高点附近区域出现大量细小的局部褶皱凹陷，随后向中部扩展；在开始反向变形时(图 14(c))中部区域出现了 2 条较大的波纹凹陷形状，最终反向变形状态下褶皱凹陷仍是集中于高点两侧附近(图 14(d))。马鞍面初始预应力作用下为稳定的负高斯曲面形状，向上荷载作用下出现单向和双向褶皱，最终形状为不稳定的正高斯曲面，此时膜面虽然能够继续承载，但当荷载改变方向或受水平力时，将发生大的机构变形而丧失结构的形状稳定性。

本算例褶皱分布计算结果的对称性较好，这是由于模型单元总数较少且初始施加有预应力，因而不易由于数值误差造成不对称现象(算例 3 初始不对称褶皱分布较为明显且最终状态仍有局部不对

称); 另外向量式有限元法理论本身是基于质点运动求解结构变化, 各质点相互独立, 不存在迭代收敛问题, 并有内力和变形误差自调整机制, 相对于传统有限元方法, 数值误差引起的不对称性影响较小。

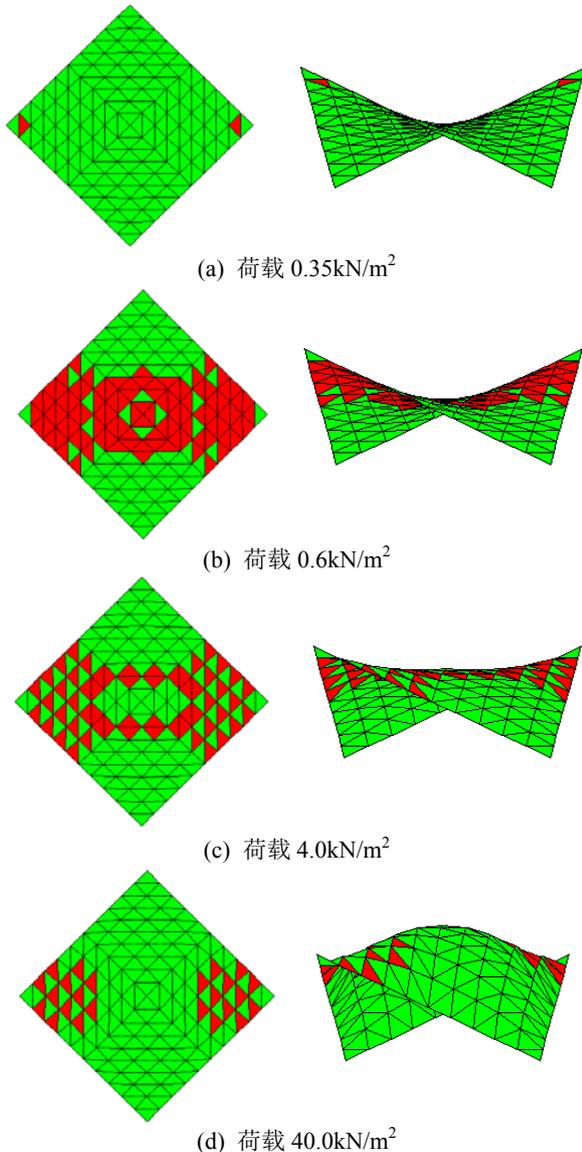


图 14 马鞍形膜的结构变形及褶皱单元分布
Fig.14 Structural deformation and wrinkled element distribution in saddle-shaped membrane

在实际工程中, 膜结构不能承受面内压力, 由于找形、荷载以及裁剪误差等因素而不可避免地会产生褶皱现象。膜结构褶皱后的继续承载, 由于褶皱产生膜面不平整将引起应力的重分布, 继而导致局部应力集中现象; 局部褶皱凹陷的荷载汇集效应(如雨、雪等)也会进一步引起局部凹陷的持续增长, 甚至导致膜结构断裂和坍塌。算例 2 验证了本文方法用于膜结构褶皱分析的准确性, 而算例 3 表明褶

皱的影响有时可达到 50%以上。因而对于实际工程跨度较大的膜结构, 褶皱精确模拟与否对结构整体性能具有较大的影响。

5 结论

(1) 基于向量式有限元三角形膜单元, 推导了各向异性膜材的本构矩阵以及各向异性膜材褶皱状态下的修正本构矩阵, 并提出了更为合理的主偏夹角计算方法, 物理概念清晰, 便于编程实现。

(2) 所编制的向量式有限元程序可以很好地完成各向异性膜结构的荷载计算与褶皱分析, 验证了理论推导的正确性和分析程序的可靠性。

(3) 向量式有限元避免了矩阵奇异等收敛问题, 分析结构大变形大转动问题具有一定的优势, 在膜结构褶皱分析方面具有本构关系修正简单, 判断简单明确, 计算量小等优点。

参考文献:

- [1] Haug E, Powell G H. Finite element analysis of nonlinear membrane structures [C]// IASS Pacific Symposium Part II: on Tension Structures and Space Frames, Tokyo and Kyoto, Japan, 1972: 83—92.
- [2] Bletzinger K U, Ramm E. A general finite element approach to the form finding of tensile structures by the updated reference strategy [J]. International Journal of Space Structures, 1999, 14(2): 131—145.
- [3] Valdés J G, Miquel J, Oñate E. Nonlinear finite element analysis of orthotropic and prestressed membrane structures [J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2009, 45(6/7): 395—405.
- [4] Barnes M R. Form finding and analysis of tension structures by dynamic relaxation [J]. International Journal of Space Structures, 1999, 14(2): 89—104.
- [5] Maurin B, Motro R. The surface stress density method as a form-finding tool for tensile membranes [J]. Engineering Structures, 1988, 20(8): 712—719.
- [6] 周树路, 叶继红. 膜结构找形方法-改进力密度法[J]. 应用力学学报, 2008, 25(3): 421—425.
Zhou Shulu, Ye Jihong. Modified force-density method for form-finding of membrane structures [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2008, 25(3): 421—425. (in Chinese)
- [7] Wagner H. Flat sheet girder with very thin metal web [J]. Z Flugtech Motorluftschiffahrt, 1929, 20 : 200—207.
- [8] Roddeman D G, Drukker J, Oomens C W, et al. The wrinkling of thin membrane: Part I - theory [J]. Journal of Applied Mechanics, ASME, 1987, 54 : 884—887.
- [9] Lu K, Accorsi M, Leonard J. Finite element analysis of membrane wrinkling [J]. International Journal of

- Numerical Methods in Engineering, 2001, 50 : 1017—1038.
- [10] Fujikake M, Kojima O, Fukushima S. Analysis of fabric tension structures [J]. Computers & Structures, 1989, 32(3/4): 537—547.
- [11] 谭锋, 杨庆山, 李作为. 薄膜结构分析中的褶皱判别准则及其分析方法[J]. 北京交通大学学报, 2006, 30(1): 35—39.
Tan Feng, Yang Qingshan, Li Zuowei. Wrinkling criteria and analysis method for membrane structures [J]. Journal of Beijing Jiaotong University, 2006, 30(1): 35—39. (in Chinese)
- [12] Ting E C, Shih C, Wang Y K. Fundamentals of a vector form intrinsic finite element: Part I. Basic procedure and a plane frame element [J]. Journal of Mechanics, 2004, 20(2): 113—122.
- [13] Ting E C, Shih C, Wang Y K. Fundamentals of a vector form intrinsic finite element: Part II. Plane solid elements [J]. Journal of Mechanics, 2004, 20(2): 123—132.
- [14] Ting E C, Shih C, Wang Y K. Fundamentals of a vector form intrinsic finite element: Part III. Convected material frame and examples [J]. Journal of Mechanics, 2004, 20(2): 133—143.
- [15] 彭涛. 向量式有限元在索膜结构分析中的应用[D]. 杭州: 浙江大学, 2011.
Peng Tao. application of vector form intrinsic finite element method in the analysis of cable membrane structures [D]. Hangzhou: Zhejinag University, 2011. (in Chinese)
- [16] 王瑞章. 二向应力状态最大主应力方向的最简判别[J]. 力学与实践, 1991, 13(5): 65—66.
Wang Ruizhang. A simple criteria method of two identification of maximal principal stress and its orientation [J]. Mechanics and Engineering, 1991, 13(5): 65—66. (in Chinese)
- [17] Miller R K, Hedgepeth J M. Finite element analysis of partly wrinkled membranes [J]. Computers & Structures, 1985, 20(1/2/3): 631—639.

(上接第 176 页)

- [7] Russell B P, Liu T, Fleck N A, Deshpande V S. The soft impact of composite sandwich beams with a square-honey-comb core [J]. International Journal of Impact Engineering, 2012, 48(1): 65—81.
- [8] 张旭红, 王志华, 赵隆茂. 爆炸载荷作用下铝蜂窝夹芯板的动力响应[J]. 爆炸与冲击, 2009, 29(4): 356—360.
Zhang Xuhong, Wang Zhihua, Zhao Longmao. Dynamic response of sandwich plates with aluminum honeycomb cores subjected to blast loading [J]. Explosion and Shock Waves, 2009, 29(4): 356—360. (in Chinese)
- [9] Dharmasena K P, Wadley H N G, Xue Z Y, Hutchinson J W, et al. Mechanical response of metallic honeycomb sandwich panel structures to high-intensity dynamic loading [J]. International Journal of Impact Engineering, 2008, 35(9): 1063—1074.
- [10] Radford D D, McShane G J, Deshpande V S, Fleck N A. Dynamic compressive response of stainless-steel square honeycombs [J]. Transaction of the ASME, 2007, 74(4): 658—667.
- [11] ABAQUS/Explicit User's Manual, Version 6.12 [CP]. Hibbit, Karlsson and Sorensen Inc, 2012.
- [12] 李志强, 陈维毅, 王志华. 子弹长度对 SHPB 测试影响的研究[J]. 机械强度, 2010, 32(6): 942—945.
Li Zhiqiang, Chen Weiyi, Wang Zhihua. Study on the effect of striker bar length on the SHPB measurements [J]. Journal of Mechanical Strength, 2010, 32(6): 942—945. (in Chinese)