

文章编号:1003-207(2015)06-0041-08

DOI:10.16381/j.cnki.issn1003-207x.2015.06.006

# 基于 Tsallis 分布及跳扩散过程的欧式期权定价

赵攀<sup>1,2,3</sup>, 肖庆宪<sup>1</sup>

(1. 上海理工大学管理学院, 上海 200093; 2. 皖西学院金融与数学学院, 安徽六安 237012;  
3. 皖西学院金融风险智能控制与预警研究中心, 安徽六安 237012)

**摘要:**准确描述资产价格的运行规律是进行衍生产品定价及风险控制的基础。受金融市场外部环境的影响, 资产收益率常常具有尖峰厚尾和偏尾的现象, 为了准确地描述资产价格的运动规律, 本文利用具有长程记忆及统计反馈性质的 Tsallis 熵分布和一类更新过程, 建立了跳-反常扩散的股票价格运动模型。利用随机微分和鞅方法, 在风险中性的条件下, 得到了欧式期权的定价公式, 该公式推广了文献 11 和 21 的相应结论。最后, 利用上证指数数据分别计算出了各模型的参数以及对资产收益率拟合的平均绝对误差, 数据分析结果表明本文模型与文献 11 和 21 相比其平均绝对误差分别减小了 10.4% 和 25.1%。说明了本文模型对资产收益率尖峰厚尾及偏尾等现象的捕捉更为准确。

**关键词:** Tsallis 熵; 期权定价; 跳; 反常扩散

**中图分类号:** F830.9 **文献标识码:** A

## 1 引言

期权定价问题一直是金融数学及金融工程学研究的核心问题之一。1973 年, Black 和 Scholes<sup>[1]</sup> 在假设股票价格服从几何布朗运动的假设下, 根据无套利原理, 得到了著名的 Black-Scholes 期权定价公式。但是, 资产价格服从几何布朗运动的假设, 意味着资产价格变化是相互独立的随机变量, 并且资产收益率的分布服从正态分布。然而, 近年来大量的研究表明, 资产收益率的分布具有“尖峰厚尾”的特征, 而且股价的变化也不是随机游走, 而是呈现不同程度的长期相关性。如 Fama<sup>[2]</sup> 指出资产收益率的分布具有明显的“厚尾”现象; Mandelbrot<sup>[3-4]</sup>, Benben 和 Ohowski<sup>[5]</sup>, Lo<sup>[6]</sup>, Evertsz<sup>[7]</sup> 发现了金融市场上股票收益率存在明显的长程相关性。因此, 为了更准确地贴近实际市场情况, 不少学者对 Black-Scholes 模型进行了改进, 如 Necula<sup>[8]</sup>, Xiao Weilin 等<sup>[9]</sup>, Gu, Hui 等<sup>[10]</sup> 利用具有自相似性和长期相关

性的分数布朗运动研究了期权的定价问题。Merton<sup>[11]</sup>, 刘国买<sup>[12]</sup>, 黄学军和吴冲锋<sup>[13]</sup> 等研究了带不同跳的期权定价模型。

1988 年, 巴西物理学家 Tsallis<sup>[14]</sup> 提出了非广延 Tsallis 熵理论, 从而开启了非广延统计的新篇章。Tsallis 理论把金融市场看作一个复杂的系统, 将资产的价格过程定义为反常扩散过程, 获得了简洁的分布函数形式, 该分布可以描述具有非线性、长程相互作用和长期记忆效应的复杂系统。近来, Tsallis 统计被广泛地应用到金融领域之中。如 Rak 等<sup>[15]</sup>, Kozaki 和 Sato<sup>[16]</sup>, Queirós 等<sup>[17]</sup>, Biró<sup>[18]</sup> 利用 Tsallis 统计理论研究了股票收益率的变化规律。Ishizaki<sup>[19]</sup> 利用非广延 Tsallis 统计研究了汇率的变化规律, Tapiero<sup>[20]</sup> 运用最大化 Tsallis 熵研究了股票期权的买卖价差问题。Borland<sup>[21]</sup> 利用 Tsallis 熵分布研究了欧式期权的定价问题。Katz 等<sup>[22]</sup> 利用 Tsallis 熵分布研究了资产的违约风险评估问题。

在 Merton<sup>[11]</sup> 的研究中, 作者把股票的价格过程看作两部分, 一部分是由市场系统内部各因素相互影响而产生的, 把它看作是连续的, 利用正态分布来刻画; 另一部分是由非系统因素冲击而产生的跳, 它是非连续的, 是用泊松过程来刻画的。但资产价格的运动是异常复杂的, 实际情况下连续部分未必

收稿日期: 2013-11-06; 修订日期: 2013-03-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11171221); 上海市一流学科(系统科学)项目(XTKX2012); 安徽省高校优秀青年基金项目(2012SQRL196); 安徽高等学校省级自然科学研究项目(KJ2011B210)

作者简介: 赵攀(1980-), 男(汉族), 安徽砀山人, 上海理工大学管理学院, 博士生, 研究方向: 金融工程。

是正态分布,跳跃部分也未必服从泊松分布,因此该模型对资产收益率“尖峰厚尾”的捕捉不够理想。Borland<sup>[21]</sup>,作者把资产价格的运动仅看作是连续的,利用对称“尖峰厚尾”的 Tsallis 熵分布来描述,但忽略了资产价格运动过程中因非对称跳跃而导致“偏尾”现象。本文综合考虑了资产收益率常见的“尖峰厚尾”及“偏尾”等现象,把股票的价格过程也看作连续和跳跃两部分,连续部分采用包含了正态分布的 Tsallis 熵分布来刻画;跳跃部分采用比泊松过程更为广泛的一类更新过程来刻画。建立了资产价格运动规律模型,在风险中性的条件下,获得了欧式期权的定价公式,Merton<sup>[11]</sup>和 Borland<sup>[21]</sup>中的模型及结论可以看作本文模型和结论的特例,被本文结论所包含。最后,通过对实际数据的分析,结果表明该模型可以更准确地刻画资产价格的运动规律,更好的捕捉资产收益率常见的“尖峰厚尾”及“偏尾”等现象。

## 2 资产价格模型的建立

定义 1 设随机变量序列  $\{X_k, k \geq 1\}$  是独立同分布,取值非负,分布函数为  $F(x)$ ,且  $F(0) <$

1,令  $S_0 = 0, S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ ,对  $t \geq 0$ ,记:

$$N(t) = \sup\{n: S_n \leq t\}$$

称  $\{N(t), t \geq 0\}$  为更新过程。

如果定义 1 中随机变量  $\{X_k, k \geq 1\}$  的分布函数相互独立,且服从同一个指数分布:  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad t > 0$ ,则更新过程便构成强度为  $\lambda$  的泊松过程。

定义 2 设随机变量序列  $\{X_k, k \geq 1\}$  是独立同分布,且服从  $Gamma(\alpha, \lambda), (\alpha > 0, \lambda > 0)$ ,令  $S_n$

$= \sum_{k=1}^n X_k$ ,则称计数过程:

$$N(t) = \sup\{n: S_n \leq t\}, t \geq 0$$

为  $Gamma$  族更新过程。

注:当函数  $Gamma(\alpha, \lambda)$  中的参数  $\alpha$  取 1 时上述更新过程便是参数为  $\lambda$  的泊松过程。

引理 1 若  $N(t), t \geq 0$  是定义 2 的  $Gamma$  族更新过程,则:

$$P(N(t) = n) = \frac{\lambda^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)} \int_0^t x^{n\alpha-1} e^{-\lambda x} dx - \frac{\lambda^{(n+1)\alpha}}{\Gamma((n+1)\alpha)} \int_0^t x^{(n+1)\alpha-1} e^{-\lambda x} dx, n = 0, 1, \dots \quad (1)$$

(1)当  $\alpha$  为正整数时,  $P(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^n$

$$\frac{(\lambda t)^{(n+1)\alpha-s}}{((n+1)\alpha-s)!}, n = 0, 1, \dots$$

(2)当  $\alpha = 1$  时,  $P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, n = 0, 1, \dots$

其中,  $\Gamma(\cdot)$  为  $Gamma$  函数。

证明 由  $Gamma$  分布的可加性,可知  $S_n =$

$\sum_{k=1}^n X_k \sim Gamma(n\alpha, \lambda)$ ,其密度函数为:

$$f(x) = \frac{\lambda^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)} x^{n\alpha-1} e^{-\lambda x}, x > 0$$

$$P(N(t) = n) = P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t) = \frac{\lambda^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)} \int_0^t x^{n\alpha-1} e^{-\lambda x} dx - \frac{\lambda^{(n+1)\alpha}}{\Gamma((n+1)\alpha)} \int_0^t x^{(n+1)\alpha-1} e^{-\lambda x} dx$$

当  $\alpha$  为正整数时:

$$P(N(t) = n) = \frac{\lambda^{n\alpha}}{(n\alpha-1)!} \int_0^t x^{n\alpha-1} e^{-\lambda x} dx - \frac{\lambda^{(n+1)\alpha}}{((n+1)\alpha-1)!} \int_0^t x^{(n+1)\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^{n\alpha}}{(n\alpha-1)!} \int_0^t x^{n\alpha-1} e^{-\lambda x} dx - \left( -e^{-\lambda t} \sum_{s=1}^{\alpha} \frac{(\lambda t)^{(n+1)\alpha-s}}{((n+1)\alpha-s)!} + \frac{\lambda^{n\alpha}}{(n\alpha-1)!} \int_0^t x^{n\alpha-1} e^{-\lambda x} dx \right) = e^{-\lambda t} \sum_{s=1}^{\alpha} \frac{(\lambda t)^{(n+1)\alpha-s}}{((n+1)\alpha-s)!}$$

当  $\alpha = 1$  时,代入上式便得  $P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$ 。

假设在金融市场上有两种可连续交易的证券:一种是无风险债券,其价格过程满足微分方程:

$$\begin{cases} dB(t) = rB(t)dt \\ B(0) = 1 \end{cases}$$

其中  $r$  为无风险利率;另一种是风险证券股票,假设在  $t$  时刻的股票价格  $S(t)$  满足随机微分方程:

$$dS(t) = S(t) \left( \mu dt - \nu d \sum_{n=0}^{+\infty} n P_n(t) + \sigma d\Omega(t) + \right.$$

$$\left. U dN(t) \right) \quad (2)$$

其中  $\mu$  是期望收益率;  $\sigma$  为无跳跃时股票价格的波动率;  $U(U > -1)$  为股票价格发生跳跃时跳跃的幅度,为随机变量;  $\nu d \sum_{n=0}^{+\infty} n P_n(t)$  是由更新跳跃所带来的平均增长,  $\nu = E(U)$ ,其中  $E(\cdot)$  为期望算子;  $d\Omega(t) = P_q(\Omega, t)^{\frac{1-q}{2}} dW(t)$ ,  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  是定义在概率空间  $(F, \{F_t\}_{t \geq 0}, P)$  上的标准布朗运动。

模型中  $\Omega(t)$  的概率分布  $P_q(\Omega, t)$  采用非广延

统计物理学中最大化 Tsallis 熵分布,即:

$$P_q(\Omega, t) = \frac{1}{z(t)} (1 - \beta(t)(1 - q)\Omega^2)^{\frac{1}{1-q}} \quad (3)$$

其中,  $z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - (1 - q)\beta(t)\Omega(t)^2)^{\frac{1}{1-q}}$

$$d\Omega(t) = ((2 - q)(3 - q)ct)^{\frac{1}{3-q}}, \beta(t) = c^{\frac{1-q}{3-q}}$$

$((2 - q)(3 - q)t)^{\frac{2}{3-q}}$ , 与  $q$  相关的常数  $c$  为  $c =$

$$\frac{\pi}{q-1} \frac{\Gamma^2(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2})}{\Gamma^2(\frac{1}{q-1})}$$

其中  $\Gamma(\cdot)$  为 Gamma 函数,

$$E[\Omega(t)] = 0, D[\Omega(t)] = \frac{1}{(5 - 3q)\beta(t)}, 1 < q <$$

5/3。

该概率密度函数满足非线性 Fokker-Planck 方程<sup>[21]</sup>:

$$\frac{\partial P_q(\Omega, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial P_q^{2-q}(\Omega, t)}{\partial \Omega^2} \quad (4)$$

其对应微观尺度下的 Ito-Langevin 方程为

$$\frac{dx}{dt} = K(x, t) + \sqrt{Qp(x, t)}^{1-q} \eta(t)$$

方程的扩散项依赖于最近取到的  $x$  的概率

$p(x, t)$ ,  $x$  的值又取决于扩散系数  $\sqrt{Qp(x, t)}^{1-q}$ ,

从而该方程具有一种统计反馈作用,当  $q > 1$  时如果某时刻异常值  $x$  出现,即概率很小的事件发生,则

$\sqrt{Qp(x, t)}^{1-q}$  就会因此而变大,导致下一时刻也会产生异常的  $x$  出现,这在资产价格运动过程中的外在表现就是波动率的聚集现象和记忆效应。当  $q =$

1 时,  $P_q(\Omega, t)$  便退化为均值为零的正态分布。因此,利用最大化 Tsallis 熵分布对股票价格的运动规律进行建模,可以有效的捕捉资产收益率的聚集和记忆等现象,是对传统几何布朗运动建模的一种改进。

引理 2 随机微分方程(2)的解为:

$$S(t) = S(0) \prod_{i=0}^{N(t)} (1 + U_i) \exp(\mu t - \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^t P_q^{1-q}(\Omega, s) ds - \nu \sum_{n=0}^{+\infty} n P_n(t) + \sigma \Omega(t)) \quad (5)$$

其中,  $U_i$  为  $t_i$  时刻股票价格相对跳跃的高度。

证明 由 Ito 公式可得:

$$d \ln s(t) = \frac{1}{s(t)} ds(t) - \frac{1}{2} \frac{1}{s^2(t)} (ds)^2(t)$$

把(2)式代入得:

$$d \ln s(t) = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 P_q^{1-q}(\Omega, s) \right) dt -$$

$$\nu \sum_{n=0}^{+\infty} n P_n(t) + \sigma P_q^{1-q}(\Omega, t)^{\frac{1-q}{2}} dW(t) + \ln(1 +$$

$$U(t)) dN(t)$$

两边积分、再取指数可得:

$$S(t) = S(0) \prod_{i=0}^{N(t)} (1 + U_i) \exp\left(\mu t - \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^t P_q^{1-q}(\Omega, s) ds - \nu \sum_{n=0}^{+\infty} n P_n(t) + \sigma \Omega(t)\right)$$

注:文中计算多次用到了  $d\Omega(t) = P_q(\Omega, t)^{\frac{1-q}{2}} dW(t)$ , 其中  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  是标准布朗运动。

引理 3 对任意时刻  $s$ , 随机变量  $\Omega(s)$  的概率密度函数  $P(\Omega(s), s)$  都可由固定时刻  $T$  时的随机变量  $\Omega(T)$  的概率密度函数  $P(\Omega(T), T)$  来表示,且表示形式为

$$P(\Omega(s), s) = \sqrt{\frac{\beta(s)}{\beta(T)}} P(\Omega(T), T)$$

证明 因为  $E[\Omega(t)] = 0, D[\Omega(t)] = \frac{1}{(5 - 3q)\beta(t)}$ , 所以  $\frac{\Omega(s)}{\sqrt{(3 - 5q)\beta(s)}}$  与  $\frac{\Omega(T)}{\sqrt{(3 - 5q)\beta(T)}}$

都是标准化的随机变量,因此有  $\Omega(s) =$

$$\sqrt{\frac{\beta(T)}{\beta(s)}} \Omega(T)$$

代入  $s$  时刻  $\Omega(s)$  的概率密度函数

$$P(\Omega(s), s) = \frac{1}{z(s)} (1 - \beta(s)(1 - q)\Omega(s)^2)^{\frac{1}{1-q}}$$

可得:

$$P(\Omega(s), s) = \frac{1}{z(s)} (1 - (1 - q)\beta(T)\Omega(T)^2)^{\frac{1}{1-q}} \quad (6)$$

$$\text{由 } z(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - (1 - q)\beta(s)\Omega(s)^2)^{\frac{1}{1-q}} d\Omega(s) =$$

$$\sqrt{\frac{\beta(T)}{\beta(s)}} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - (1 - q)\beta(T)\Omega(T)^2)^{\frac{1}{1-q}} d\Omega(T) =$$

$$\sqrt{\frac{\beta(T)}{\beta(s)}} Z(T)$$

代入(6)式可得:

$$P(\Omega(s), s) = \sqrt{\frac{\beta(s)}{\beta(T)}} \frac{1}{Z(T)} (1 - (1 - q)\beta(T)\Omega$$

$$(T)^2)^{\frac{1}{1-q}} = \sqrt{\frac{\beta(s)}{\beta(T)}} P(\Omega(T), T)$$

### 3 欧式期权的定价

定理 1 若所标的资产价格  $S(t)$  满足随机微分方程(2)式,则到期日为  $T$ , 执行价格  $K$  的欧式看涨及看跌期权在 0 时刻的价格为:

$$C_q(K, T) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(T) \epsilon_k^* \left[ S(0) \prod_{i=0}^k (1 + U_i) e^{-\frac{1}{2} \sigma^2 a T^{\frac{2}{3-q}} - \nu \sum_{n=0}^{+\infty} n P_n(T)} M_q(s_1, s_2) - e^{-rT} K N_q(s_1, s_2) \right] \quad (7)$$

$$P_q(K, T) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(T) \epsilon_k^* \left[ e^{-rT} K (1 - N_q(s_1, s_2)) - S(0) \prod_{i=0}^k (1 + U_i) e^{-\frac{1}{2} \sigma^2 \alpha T^{\frac{2}{3-q}} - v \sum_{n=0}^{+\infty} n P_n(T)} (M_q(-\infty, s_1) + M_q(s_2, +\infty)) \right] \quad (8)$$

其中记:

$$M_q(s_1, s_2) = \frac{1}{z(T)} \int_{s_1}^{s_2} \exp\left(\frac{1}{2} \sigma^2 (1 - q) \alpha T^{\frac{2}{3-q}} \beta(T) x^2 + \alpha x\right) (1 - \beta(T) (1 - q) x^2)^{\frac{1}{1-q}} dx$$

$$M_q(-\infty, s_1) = \frac{1}{z(T)} \int_{-\infty}^{s_1} \exp\left(\frac{1}{2} \sigma^2 (1 - q) \alpha T^{\frac{2}{3-q}} \beta(T) x^2 + \alpha x\right) (1 - \beta(T) (1 - q) x^2)^{\frac{1}{1-q}} dx$$

$$M_q(s_2, +\infty) = \frac{1}{z(T)} \int_{s_2}^{+\infty} \exp\left(\frac{1}{2} \sigma^2 (1 - q) \alpha T^{\frac{2}{3-q}} \beta(T) x^2 + \alpha x\right) (1 - \beta(T) (1 - q) x^2)^{\frac{1}{1-q}} dx$$

$$N_q(s_1, s_2) = \frac{1}{z(T)} \int_{s_1}^{s_2} (1 - \beta(T) (1 - q) x^2)^{\frac{1}{1-q}} dx$$

$$s_1 = -\frac{1}{(1 - q) \alpha \beta(T) T^{\frac{2}{3-q}}} - \left[ \frac{1}{(1 - q)^2 \sigma^2 \alpha^2 \beta^2(T) T^{\frac{4}{3-q}}} - \frac{2}{(1 - q) \sigma^2 \alpha \beta(T) T^{\frac{2}{3-q}}} \left( rT - \frac{1}{2} \sigma^2 \alpha T^{\frac{2}{3-q}} - v \sum_{n=0}^{+\infty} n P_n(T) + \ln \frac{S(0) \prod_{i=0}^{N(T)} (1 + U_i)}{K} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$s_2 = -\frac{1}{(1 - q) \alpha \beta(T) T^{\frac{2}{3-q}}} + \left[ \frac{1}{(1 - q)^2 \sigma^2 \alpha^2 \beta^2(T) T^{\frac{4}{3-q}}} - \frac{2}{(1 - q) \sigma^2 \alpha \beta(T) T^{\frac{2}{3-q}}} \left( rT - \frac{1}{2} \sigma^2 \alpha T^{\frac{2}{3-q}} - v \sum_{n=0}^{+\infty} n P_n(T) + \ln \frac{S(0) \prod_{i=0}^{N(T)} (1 + U_i)}{K} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

证明 由 Girsanov 定理, 记  $\gamma(t) = \frac{\mu - r}{\sigma P_q^{\frac{1-q}{2}}}$ ,

$W^*(t) = W(t) + \int_0^t \gamma(s) ds$ , 若:

$E\left[\exp\left(\frac{1}{2} \int_0^t \gamma^2(s) ds\right)\right] < \infty$ , 则由  $\frac{dQ}{dP} = \exp\left(\int_0^t \gamma(s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \gamma^2(s) ds\right)$  唯一确定了一个与原来概率测度  $P$  等价的概率测度  $Q$ , 而且在概率测度  $Q$  下,  $W^*(t)$  是一布朗运动。记折现过程为  $Z(t) = S(t)B^{-1}(t)$ , 把(5)代入可得:

$$Z(t) = S(0) \prod_{i=0}^{N(t)} (1 + U_i) \exp\left((\mu - r)t - \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^t P_q^{1-q}(\Omega, s) ds - v \sum_{n=0}^{+\infty} n P_n(t) + \sigma \Omega(t)\right)$$

由 Ito 公式得:

$$dZ(t) = Z(t) \left( (\mu - r)dt + \sigma P_q^{\frac{1-q}{2}} dW(t) + UdN(t) - vd \sum_{n=0}^{+\infty} n P_n(t) \right), \text{ 即:}$$

$dZ(t) = Z(t) \left( \sigma P_q^{\frac{1-q}{2}} dW^*(t) + UdN(t) - vd \sum_{n=0}^{+\infty} n P_n(t) \right)$ , 故在概率测度  $Q$  下  $Z(t)$  为鞅。此时,  $dS(t) = S(t) \left( \mu dt - vd \sum_{n=0}^{+\infty} n P_n(t) + \sigma d\Omega(t) + UdN(t) \right) = S(t) \left( \mu dt - vd \sum_{n=0}^{+\infty} n P_n(t) + \sigma P_q^{\frac{1-q}{2}} dW^*(t) + UdN(t) \right)$ , 因为  $W^*(t)$  为概率测度  $Q$  下的布朗运动, 故:

$$S(t) = S(0) \prod_{i=0}^{N(t)} (1 + U_i) \exp\left(\left(rt - \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^t P_q^{1-q}(\Omega, s) ds - v \sum_{n=0}^{+\infty} n P_n(t) + \sigma \Omega(t)\right)\right)$$

由风险中性定价理论可得:

$$C_q(K, T) = e^{-rT} E_Q \left( (S(T) - K)^+ \right) = e^{-rT} E_Q \left( S(0) \prod_{i=0}^{N(T)} (1 + U_i) \exp\left(rT - \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^T P_q^{1-q}(\Omega, s) ds - v \sum_{n=0}^{+\infty} n P_n(T) + \sigma \Omega(T)\right) - K \right)^+$$

执行条件为:

$$S(0) \prod_{i=0}^{N(T)} (1 + U_i) \exp\left(rT - \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^T P_q^{1-q}(\Omega, s) ds - v \sum_{n=0}^{+\infty} n P_n(T) + \sigma \Omega(T)\right) > K$$

等价于:

$$-\frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^T P_q^{1-q}(\Omega, s) ds + \sigma \Omega(T) + rT - v \sum_{n=0}^{+\infty} n P_n(T) + \ln \frac{S(0) \prod_{i=0}^{N(T)} (1 + U_i)}{K} > 0$$

把(3)式代入可得:

$$-\frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^T \frac{1}{z(s)^{(1-q)}} (1 - (1 - q) \beta(s) \Omega(s)^2) ds + \sigma \Omega(T) + rT - v \sum_{n=0}^{+\infty} n P_n(T) + \ln \frac{S(0) \prod_{i=0}^{N(T)} (1 + U_i)}{K} > 0$$

即:

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 \int_0^T \frac{1}{z(s)^{(1-q)}} ds + \frac{1}{2}\sigma^2(1-q) \int_0^T \frac{1}{z(s)^{(1-q)}} \beta(s)\Omega(s)^2 ds + \sigma\Omega(T) + rT - v \sum_{n=0}^{+\infty} nP_n(T) + \ln \frac{S(0) \prod_{i=0}^{N(T)} (1+U_i)}{K} > 0$$

由引理 3 得:

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 \int_0^T \frac{1}{z(s)^{(1-q)}} ds + \frac{1}{2}\sigma^2(1-q) \int_0^T \frac{1}{z(s)^{(1-q)}} \beta(T)\Omega(T)^2 ds + \sigma\Omega(T) + rT - v \sum_{n=0}^{+\infty} nP_n(T) + \ln \frac{S(0) \prod_{i=0}^{N(T)} (1+U_i)}{K} > 0$$

记  $I = \int_0^T \frac{1}{z(s)^{(1-q)}} ds$ , 把  $z(s) =$

$$s_{1,2} = \frac{-\sigma \pm \left[ \sigma^2 - 2\sigma^2(1-q)\alpha\beta(T)T^{\frac{2}{3-q}}(rT - \frac{1}{2}\sigma^2\alpha T^{\frac{2}{3-q}} - v \sum_{n=0}^{+\infty} nP_n(T) + \ln \frac{S(0) \prod_{i=0}^{N(T)} (1+U_i)}{K}) \right]^{\frac{1}{2}}}{(1-q)\sigma^2\alpha\beta(T)T^{\frac{2}{3-q}}}$$

$$-\frac{1}{(1-q)\alpha\beta(T)T^{\frac{2}{3-q}}} \pm \left[ \frac{1}{(1-q)^2\sigma^2\alpha^2\beta^2(T)T^{\frac{4}{3-q}}} - \frac{2}{(1-q)\sigma^2\alpha\beta(T)T^{\frac{2}{3-q}}}(rT - \frac{1}{2}\sigma^2\alpha T^{\frac{2}{3-q}} - v \sum_{n=0}^{+\infty} nP_n(T) + \ln \frac{S(0) \prod_{i=0}^{N(T)} (1+U_i)}{K}) \right]^{\frac{1}{2}}$$

故:

$$C_q(K, T) = e^{-rT} E_Q \left( \left( S(0) \prod_{i=0}^{N(T)} (1+U_i) \exp \left( (rT - \frac{1}{2}\sigma^2 \int_0^T P_q^{1-q}(\Omega, s) ds - v \sum_{n=0}^{+\infty} nP_n(T) + \sigma\Omega(T) - K \right)^+ \right) \sum_{k=0}^{\infty} P_k(T) \epsilon_k^* \int_{s_1}^{s_2} \left( S(0) \prod_{i=0}^k (1+U_i) \exp \left( -\frac{1}{2}\sigma^2 \int_0^T P_q^{1-q}(\Omega, s) ds - v \sum_{n=0}^{+\infty} nP_n(T) + \sigma\Omega(T) - e^{-rT}K \right) P_q(\Omega(T)) d\Omega = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(T) \epsilon_k^* \left[ \int_{s_1}^{s_2} \left( S(0) \prod_{i=0}^k (1+U_i) \exp \left( \frac{1}{2}\sigma^2(1-q)\alpha T^{\frac{2}{3-q}}\beta(T)\Omega(T)^2 - \frac{1}{2}\sigma^2\alpha T^{\frac{2}{3-q}} - v \sum_{n=0}^{+\infty} nP_n(T) + \sigma\Omega(T) \right) \right) \frac{1}{z(T)}(1-\beta(T)(1-q)\Omega^2)^{\frac{1}{1-q}} d\Omega - \int_{s_1}^{s_2} e^{-rT}K \frac{1}{z(T)}(1-\beta(T)(1-q)\Omega^2)^{\frac{1}{1-q}} d\Omega \right] = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(T) \epsilon_k^* \left[ \frac{1}{z(T)} S(0) \prod_{i=0}^k (1+U_i) e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\alpha T^{\frac{2}{3-q}} - v \sum_{n=0}^{+\infty} nP_n(T)} \int_{s_1}^{s_2} \left( \exp \left( \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \right) \right.$$

$((2-q)(3-q)cs)^{\frac{1}{3-q}}$  代入 I 式可得:

$$I = \int_0^T ((2-q)(3-q)cs)^{\frac{q-1}{3-q}} ds$$

令  $\alpha = \frac{1}{2}(3-q)((2-q)(3-q)c)^{\frac{q-1}{3-q}}$

$$I = \int_0^T \frac{2}{(3-q)} \alpha s^{\frac{q-1}{3-q}} ds = \alpha T^{\frac{2}{3-q}}$$

所以有

$$\frac{1}{2}\sigma^2(1-q)\alpha T^{\frac{2}{3-q}}\beta(T)\Omega(T)^2 + \sigma\Omega(T) + rT - \frac{1}{2}\sigma^2\alpha T^{\frac{2}{3-q}} - v \sum_{n=0}^{+\infty} nP_n(T) + \ln \frac{S(0) \prod_{i=0}^{N(T)} (1+U_i)}{K} > 0 \tag{9}$$

由  $1 < q < 5/3$  可知一元二次不等式(9)的解为两根之间,利用求根公式可求得其两根分别为:

$$(1-q)\alpha T^{\frac{2}{3-q}}\beta(T)\Omega(T)^2 + \sigma\Omega(T) + rT - \frac{1}{2}\sigma^2\alpha T^{\frac{2}{3-q}} - v \sum_{n=0}^{+\infty} nP_n(T) + \ln \frac{S(0) \prod_{i=0}^{N(T)} (1+U_i)}{K}$$

$$\frac{1}{(1-q)\alpha\beta(T)T^{\frac{2}{3-q}}} \pm \left[ \frac{1}{(1-q)^2\sigma^2\alpha^2\beta^2(T)T^{\frac{4}{3-q}}} - \frac{2}{(1-q)\sigma^2\alpha\beta(T)T^{\frac{2}{3-q}}}(rT - \frac{1}{2}\sigma^2\alpha T^{\frac{2}{3-q}} - v \sum_{n=0}^{+\infty} nP_n(T) + \ln \frac{S(0) \prod_{i=0}^{N(T)} (1+U_i)}{K}) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(1-q)\alpha T^{\frac{2}{3-q}}\beta(T)\Omega(T)^2 + \sigma\Omega(T) + rT - \frac{1}{2}\sigma^2\alpha T^{\frac{2}{3-q}} - v \sum_{n=0}^{+\infty} nP_n(T) + \ln \frac{S(0) \prod_{i=0}^{N(T)} (1+U_i)}{K} - \frac{e^{-rT}K}{z(T)} \int_{s_1}^{s_2} (1-\beta(T)(1-q)\Omega^2)^{\frac{1}{1-q}} d\Omega \left[ \sum_{k=0}^{\infty} P_k(T) \epsilon_k^* \left[ S(0) \prod_{i=0}^k (1+U_i) e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\alpha T^{\frac{2}{3-q}} - v \sum_{n=0}^{+\infty} nP_n(T)} M_q(s_1, s_2) - e^{-rT}KN_q(s_1, s_2) \right] \right]$$

其中  $\epsilon_k^*$  是  $\prod_{i=0}^k (1+U_i)$  分布的期望算子。

同理,可以求得该模型下欧式看跌期权的定价公式(8)式。

### 4 结论分析

本文研究主要基于 Merton<sup>[11]</sup> 和 Borland<sup>[21]</sup>, 是对其模型及结论的改进与推广。下面是本文模型及结论与文献 11 和 21 进行的比较。

Merton<sup>[11]</sup> 的模型及结论:

$$dS(t) = S(t)(\mu dt - \lambda v dt + \sigma dW(t) + U dN(t)) \tag{10}$$

$$C(K, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda \tau)^n}{n!} e^{-\lambda \tau} [S_0 N(d_{n2}) - Ke^{-r\tau} N(d_{n1})] \quad (11)$$

Merton<sup>[11]</sup>是分别用泊松过程刻画资产价格运动的跳跃部分,布朗运动刻画资产价格运动的连续部分。为了更准确地描述资产价格的跳跃性,本文把文献 11 中泊松过程拓展为包含泊松过程的一类更新过程;为了描述资产收益率的长期记忆及“尖峰厚尾”现象,我们把布朗运动拓展为包含正态分布的 Tsallis 熵分布。通过拟合 Tsallis 熵分布的非广延参数  $q$ ,我们能够更准确地捕捉资产收益率的“尖峰厚尾”和长期记忆的特征。

Borland<sup>[20]</sup>的模型及结论:

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma d\Omega(t)) \quad (12)$$

$$C_q(K, T) = S(0)M_q(s_1, s_2) - Ke^{-rT}N_q(s_1, s_2) \quad (13)$$

Borland<sup>[20]</sup>为了描述收益率的“尖峰厚尾”现象采用了 Tsallis 熵分布来描述,但是, Tsallis 熵分布是一种对称分布它不能刻画收益率常见的“偏尾”现象。本文在此基础上加了跳跃项,通过拟合跳的参数,我们可以更好地刻画收益率的“偏尾”及“厚尾”现象。

Merton<sup>[11]</sup>的结论(11)式实质上是每次跳跃下的布朗运动期权价格的加权和,本文的结论(7)式可以看作是每次跳跃下的 Tsallis 熵分布期权价格的加权和,即(13)式的加权和。因此,本文结论(7)式包含了文献 11 的结论(11)式和文献 21 的结论(13)式,当本文模型中的 Tsallis 分布参数  $q = 1$  且更新过程的参数  $\alpha = 1$  时,便是文献 11 中的结论;当跳跃幅度取零时,即把本文模型(2)式中的跳跃部分去掉,便是文献 21 中的模型及结论。

### 5 实例分析

为了检验本文模型的实际效果,我们选取了上证综合指数(2009-1-5 至 2010-12-31,数据来源 RESSET 数据库)的五分钟高频数据作为样本,共 486 个交易日,23328 个样本数据,文中样本的日收益率为对数收益率,计算软件为 MATLAB7.0。

表 1 上证综合指数日收益率的基本统计特征

均值	标准差	偏度	峰度	J-B 统计量	P 值
0.0826	1.6866	-0.5697	4.5786	75.2363	0.0000

本文用核密度估计方法估计出了上证综合指数日收益率分布的密度函数,见图 1,其中核函数为高斯分布密度函数,窗宽为均方误差最小窗宽。从表

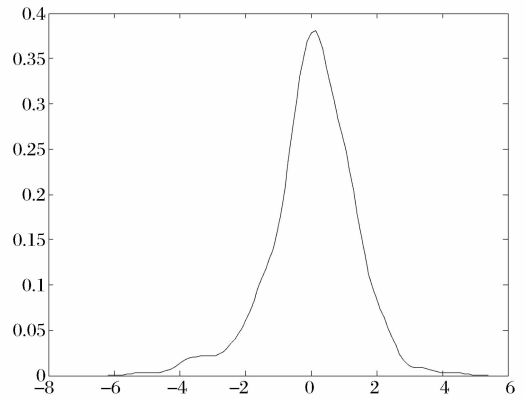


图 1 上证综合指数日收益率的概率密度

1 可以看出上证综合指数日收益率分布是“左偏”且“尖峰厚尾”的。在 99% 的置信水平下, J-B 统计量为 75.24 远大于临界值 17.56,  $p$  值为零,说明了上证综合指数日收益率分布强烈拒绝服从正态分布。由图 1 也可以看出其具有明显的“左偏尾”和“尖峰厚尾”的特征。

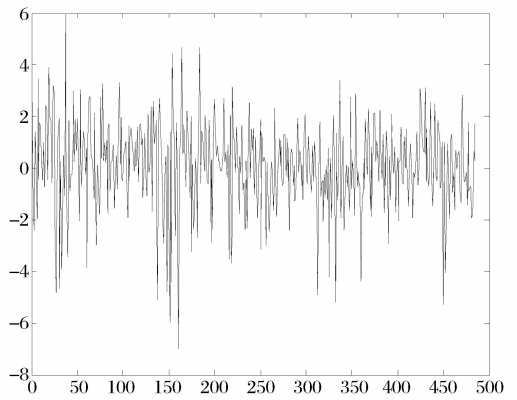


图 2 上证综合指数的日收益率

从上证综合指数日收益率图 2 可以看出其波动率有明显的集聚性,说明了金融市场的资产价格很容易受外来因素的影响,进而产生大幅度连续的跳跃性波动,尤其是在我国,由于市场发展的时期相对较短,市场机制较不成熟,导致股票价格大幅涨跌的现象尤为突出。

通过采用最大似然估计方法,借助 EM 算法我们分别估计出了文献 11、文献 21 和本文模型的参数,并计算了各模型下拟合值的收益率与样本值的收益率的平均绝对误差,结果见表 2。由表 2 可以看出本文模型与文献 11 模型即使在同为泊松跳和对数正态分布的跳幅下,由于本文模型采用 Tsallis 熵分布替代了文献 11 模型中的正态分布,结果使本文模型下的平均绝对误差比文献 11 减小了 10.4%;

表 2 各模型的参数及对样本的误差

	文献 11	文献 20	本文模型
模型参数	$\mu = 0.0035, \sigma = 0.081, \lambda = 1.125$ $\mu_J = -3.0421e-14, \sigma_J = 2.4237e-6$	$\mu = 0.0803, \sigma = 1.32$ $q = 1.382$	$\mu = 0.0287, \sigma = 0.043, \lambda = 1.01, q = 1.181$ $\mu_J = -2.2021e-15, \sigma_J = 1.7482e-7,$
平均绝对误差	0.004431	0.005020	0.004012

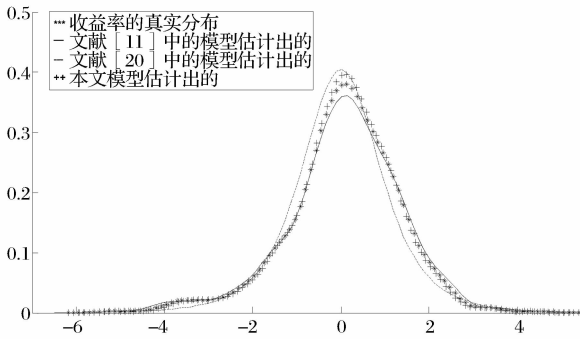


图 3 各模型估计出的收益率分布与真实收益率分布比较

本文模型在文献 21 模型的基础上加了跳,结果使平均绝对误差比文献 21 减小了 25.1%。说明了与文献 11 及 21 相比,本文资产价格运动模型对资产价格的运动规律拟合更好,更能够准确地捕捉资产收益率的“偏尾”和“尖峰厚尾”等现象。

## 6 结语

大量的研究表明,市场上资产收益率分布服从正态分布的传统假设已渐渐不适用于现代金融市场的发展。在物理学中,Tsallis 非广延统计理论已被证实是处理长程相互作用及非线性复杂系统的有力工具。另外,市场经常会受外界一些突发事件的冲击,使得股票价格运行的轨道常常出现非连续的跳跃,且跳跃不一定服从泊松过程。鉴此,本文借助非广延统计物理学中具有长期记忆特征的时变 Tsallis 熵分布,及一类更新过程来对传统股票价格收益率正态分布的假设进行改进,并获得了欧式看涨及看跌期权的定价的显式解。数据分析的结果表明本文模型可以更好的描述资产价格的运动情况,因此本文结论可为投资者提供一种计算期权价格的方法和控制投资风险的手段。

### 参考文献:

[1] Black F. Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of political Economy, 1973, 81(3):133-155.  
 [2] Fama E F. The behavior of stock market prices[J]. Journal of Business, 1965, 38(1): 34-105.

[3] Mandelbrot B B. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications[J]. SIAM review, 1968, 10(4): 422-437.  
 [4] Mandelbrot B B. Fractals and scaling in finance: Discontinuity, concentration, risk[M]. New York: Springer Verlag, 1997.  
 [5] Beben M, Ohowski A. Correlations in financial time series: Established versus emerging markets[J]. Eur. Phys. J. B, 2001, 20(4): 527-530.  
 [6] Lo A W. Long term memory in stock market prices[J]. Econometrica, 1991, 59(5):1279-1313.  
 [7] Evertsz C J G. Fractal geometry of financial time series [J]. Fractals, 1995,3(3):609-616.  
 [8] Necula C. Option pricing in a fractional Brownian motion environment[R]. Working Paper, Academy of Economic Studies, 2002.  
 [9] Xiao Weilin, Zhang Weiguo, Zhang Xili, et al. Pricing currency options in a fractional Brownian motion with jumps[J]. Economic Modelling, 2010, 27(5): 935-942.  
 [10] Gu Hui, Liang Jinrong, Zhang Yunxiu. Time-changed geometric fractional Brownian motion and option pricing with transaction costs[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2012, 391(15):3971-3977.  
 [11] Merton R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J]. Journal of Financial Economics,1976, 3(1):125-144.  
 [12] 刘国买, 邹捷中, 陈超. 服从多种形式跳过程的期权定价模型[J]. 数量经济技术经济研究, 2004, (4): 110-114.  
 [13] 黄学军, 吴冲锋. 不确定环境下研发投资决策的期权博弈模型[J]. 中国管理科学, 2006, 14(5): 33-37.  
 [14] Tsallis C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics [J]. Journal of Statistical Physics, 1988, 52(1):479-487.  
 [15] Rak R, Drozd S, Kwapien J. Non-extensive statistical features of the Polish stock market fluctuations [J]. Physica A, 2007, 374(1): 315-324.  
 [16] Kozaki M, Sato A H. Application of the Beck model to stock markets: Value-at-Risk and portfolio risk assessment[J]. Physica A, 2008, 387(5): 1225-1246.  
 [17] Queirós S M D, Moyano L G, de Souza J, et al. A non-

- extensive approach to the dynamics of financial observables[J]. *The European Physical Journal B*, 2007, 55(2): 161—167.
- [18] Biró T S, Rosenfeld R, Journal B. Microscopic origin of non-Gaussian distributions of financial returns [J]. *Physica A*, 2008, 387(7): 1603—1612.
- [19] Ishizaki R, Inoue M. Time-series analysis of foreign exchange rates using time-dependent pattern entropy[J]. *Physica A*, 2013, 392(16): 3344—3350.
- [20] Tapiero O J. A maximum (non-extensive) entropy approach to equity options bid-ask spread[J]. *Physica A*, 2013, 392(14): 3051—3060.
- [21] Borland L. A theory of non-Gaussian option pricing [J]. *Quantitative Finance*, 2002, 2(6): 415—431.
- [22] Katz Y A, Li Tian. q-Gaussian distributions of leverage returns, first stopping times, and default risk valuations[J]. *Physica A*, 2013, 392(20): 4989—4996.

## Pricing of European Options Based on Tsallis Distribution and Jump-diffusion Process

ZHAO Pan<sup>1,2,3</sup>, XIAO Qing-xian<sup>1</sup>

(1. Business School, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China;

2. College of Finance and Mathematics, West Anhui University, Lu'an 237012, China;

3. Financial Risk Intelligent Control and Prevention Institute of West Anhui University, Lu'an 237012, China)

**Abstract:** The accurate description of the motion law of asset prices is the foundation of pricing and controlling risk of derivatives. The distribution of yields often has a peak, fat or skewed tail, because of influence of the external environment of financial market. Tsallis distribution has the characteristics of long-term memory and statistical feedback. So, the peak or fat tail of yields can be captured, through fitting non-extensive parameter  $q$  of Tsallis distribution. In addition, asymmetric jump processes can fit the skewed tail of returns. Tsallis distribution and renewal jump process are employed in this paper, then, an abnormal jump diffusion model of share price movements is established. In the risk-neutral condition, the pricing formulas of European options were obtained by using the stochastic differential and martingale method. But, in the literature of Merton<sup>[11]</sup>, the model employed the Poisson jump process and normal distribution. The literature of Borland<sup>[21]</sup> only used Tsallis distribution without considering the skewed tail of yields. Therefore, they were included in our model as special cases. Using the actual data of China's Shanghai index, the parameters of the models and the mean absolute error of yields are calculated, respectively. The results showed that the mean absolute error of our model was reduced respectively by 10.4% and 25.1% compared with ones of the literature 11 and 21. It explained that our model can fit accurately the motion law of asset prices. In addition, our model can also be used to price or measure and control risk of other derivatives, such as warrants and other types of options.

**Key words:** Tsallis distribution; option pricing; jump; anomalous diffusion