2.5 格林(Green)函数法

2.5.1 Green函数

区域V上单位点电荷激发的满足一定边界条件的电势就称为该区域上这类边值问题的Green函数。换句话说，若记Green函数为G(**x**,**x'**)，(**x'**表示源点坐标，**x**表示场点坐标)，区域V上的Green函数G(**x**,**x'**)就是Poisson方程

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

满足一定边界条件的解。

若G在区域边界面S上满足

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\big|_{\boldsymbol{x}\text{取在}S\text{上}} = 0$$

称这样的G为区域V上第一类边值问题的Green函数。

若G在区域边界面S上满足

$$\left.\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{\partial n}\right|_S = -\frac{1}{\varepsilon_0 S}$$

称这样的G为区域V上第二类边值问题的Green函数。

注意：第二类边值问题的边界条件不能取为 $\boxed{(\partial G/\partial n)\big|_S = 0}$，这是因为对方程作包含***x'***点的体积分，并利用高斯定理后，则得

$$\boxed{\oint (\partial G/\partial n)\,\mathrm{d}S = -1/\varepsilon_0.}$$

最简单的取法是 $\boxed{\left.\dfrac{\partial G}{\partial n}\right|_S = -\dfrac{1}{\varepsilon_0 S}}$

但当 $S \to \infty$ 时，$\partial G/\partial n \to 0$，于是得

$$\boxed{\left.\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n}\right|_S = 0}$$

2.5.2 几种简单边界的Green函数

（1）无界空间的格林函数．

在 x' 点上一个单位点电荷在无界空间中激发的电势为

$$\varphi(x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}.$$

式中 r 为源点 x' 到场点 x 的距离．因此，无界空间的格林函数为

$$G(x,x')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}},\quad(5.9)$$

（2）上半空间的格林函数．

当 $Q=1$ 时，由上节(4.1)式可得上半空间第一类边值问题的格林函数．以导体平面上任一点为坐标原点，设点电荷 Q 所在点的坐标为 (x',y',z')，场点坐标为 (x,y,z)，则(4.1)式中的 r 为由 x' 点到 x 点的距离，r' 为由镜象点 $(x',y',-z')$ 到场点的距离．上半空间格林函数为

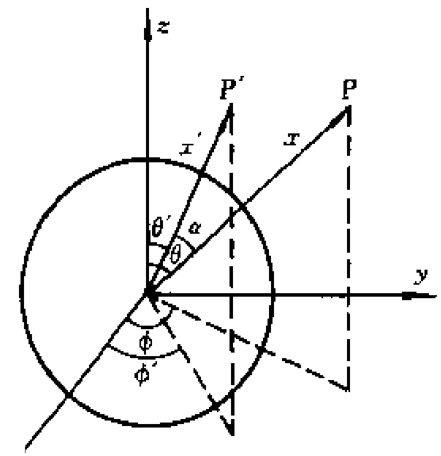
$$G(x,x')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}\right].\quad(5.11)$$

(3) 球外空间的格林函数．

当 $Q=1$ 时由(4.6)式可得球外空间的格林函数．如图 2－10,以球心 O 为坐标原点．设电荷所在点 P' 的坐标为(x',y',z'),场点 P 的坐标为(x,y,z)．令

$$R=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad R'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2},$$

则上节例 2 中 a 对应于 R', b 对应于 R_0^2/R',镜象电荷所在点的坐标为 $\frac{b}{a}\boldsymbol{x}'=\frac{R_0^2}{R'^2}\boldsymbol{x}'$.



$$r=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|=\sqrt{R^2+R'^2-2RR'\cos\alpha},$$

$$r'=\left|\boldsymbol{x}-\left(\frac{R_0}{R'}\right)^2\boldsymbol{x}'\right|=\frac{1}{R'}\sqrt{R^2R'^2+R_0^4-2R_0^2RR'\cos\alpha},$$

式中 α 为 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}'$ 的夹角．若 P 点的球坐标为(R,θ,ϕ), P' 点的球坐标为(R',θ',ϕ'),有 $\cos\alpha=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')$．把(4.6)式作以上代换得球外空间格林函数

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+R'^2-2RR'\cos\alpha}}-\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{RR'}{R_0}\right)^2+R_0^2-2RR'\cos\alpha}}\right].$$

2.5.3 用Green函数表示Poisson方程边值问题的解

即如何从Green函数得到Poisson方程边值问题的解。

Poisson方程的边值问题是在区域V内求满足Poisson方程

$$\nabla^2\varphi(\boldsymbol{x}) = -\rho(\boldsymbol{x})/\varepsilon_0$$

在区域边界面S上满足第一类(已知 $\varphi|_S$)或第二类(已知 $(\partial\varphi/\partial n)|_S$)边界条件的解。

为了把区域V内的电势解$\varphi(\boldsymbol{x})$和区域V上相应边值问题的Green函数联系起来，把Green公式

$$\int_V(\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi)\mathrm{d}\tau = \oint_S\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\mathrm{d}\sigma$$

应用到区域V上，且取上式中的 ϕ为待求的电势 $\phi(\boldsymbol{x})$，取 ψ为区域V上相应边值问题的Green函数$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$。

为了符合习惯，把积分变量x变成x'，同时交换$G(x, x')$中x和x'的位置得

$$\int_V [G(x',x)\nabla'^2\varphi(x') - \varphi(x')\nabla'^2 G(x',x)]\mathrm{d}\tau' = \oint [G(x',x)\frac{\partial\varphi(x')}{\partial n'} - \varphi(x')\frac{\partial G(x',x)}{\partial n'}]\mathrm{d}\sigma'$$

利用Poisson方程，上式左边第一项化为

$$-\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V G(x',x)\rho(x')\mathrm{d}\tau'$$

由Green函数的定义式，第二项化为

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \varphi(x')\delta(x'-x)\mathrm{d}\tau' = \frac{1}{\varepsilon_0}\varphi(x)$$

于是有

$$\varphi(x) = \int_V G(x',x)\rho(x')\mathrm{d}\tau' + \varepsilon_0\oint_S [G(x',x)\frac{\partial\varphi(x')}{\partial n'} - \varphi(x')\frac{\partial G(x',x)}{\partial n'}]\mathrm{d}\sigma'$$

对于Poisson方程第一类边值问题，考虑到第一类边值问题的Green函数满足$G(x',x)|_S=0$,有

$$\boxed{\varphi(\boldsymbol{x}) = \int_V G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})\rho(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}\tau' - \varepsilon_0 \oint_S \varphi(\boldsymbol{x}') \frac{\partial G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})}{\partial n'}\mathrm{d}\sigma'}$$

由这个公式，只要求出区域 V 上第一类边值问题的 Green 函数 $G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})$，区域 V 中的电势就可由已知的电荷分布、边界面上 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 计算出来。Poisson 方程第一类边值问题得到完全解决。

对于第二类边值问题，考虑到相应Green函数满足的边界条件有

$$\boxed{\varphi(\boldsymbol{x}) = \int_V G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})\rho(\boldsymbol{x})dV' + \varepsilon_0 \oint G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x}')}{\partial n'}d\sigma' + \langle\varphi\rangle_S}$$

其中$\langle\varphi\rangle_S$是电势在界面S上的平均值。当曲面面积$S\to\infty$时，$\partial G/\partial n \to 0$，得到$\langle\varphi\rangle_S = 0$。

根据以上讨论可以得出如下结论：

只要求出区域V上的Green函数，相应的边值问题就可解决。

由于Green函数与问题中给出的电荷分布及边界面上 ϕ 或 $\boxed{\partial\varphi/\partial n}$ 的具体函数形式无关，所以一旦给出某个区域上的Green函数，则该区域上各种电荷分布情况下，同类型的边值问题都可得到解决。从这个意义上说，Green函数方法是电磁场计算、分析中的普遍方法。

在使用Green函数方法求某个区域上的场时，首先需要求这个区域相应边值问题的Green函数。但求一个区域上的Green函数一般不是一件轻而易举的事。只有当区域具有简单几何形状时才能得出解析的解。

以下我们主要讨论第一类边值问题的Green函数。

2.5.4 格林函数法解题步骤

(一) 由题设边界条件判断是哪一类边值问题。然后根据边界面的形状决定取哪—个格林函数.

(二) 选定格林函数后，求出它的具体函数形式以及它在边界面上的函数值或法向微商代入积分计算.

(三) 格林函数的选法有时不止一种，但关键是要把格林公式中含有未知量部分的积分变为零.

例 1　在图 2-4-1 的（a）中，在 $z=0$ 面的中央有一半径为 R_0 的半球. 已知该半球的电势为 Φ_0，平面上其余部分的电势为零.

在图（b）中，在 $z=0$ 平面的中央有半径为 R_0 的圆形区域，该域的电势为 Φ_0. 圆外电势为零.

在图（c）中，有一球心在原点半径为 R_0 的导体球，球的电势为 Φ_0.

在以上（a）、（b）、（c）中都有体电荷分布 ρ.

试问：为求空间的电势分布，应选择以下哪一个答案.

（一）（a）、（b）、（c）都用同一个第一类格林函数.

（二）（a）、（b）都用上半空间的第一类格林函数.

（三）（a）、（b）、（c）分别用各自的格林函数.

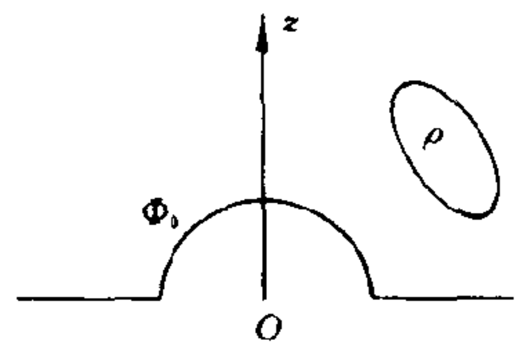


图　2-4-1　（a）

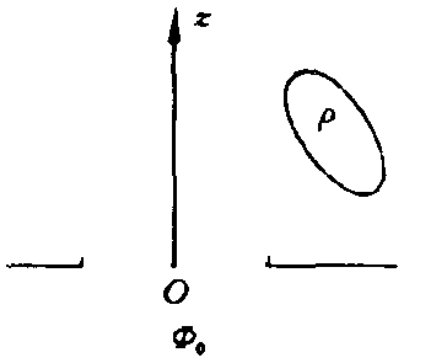


图 2-4-2 (b)

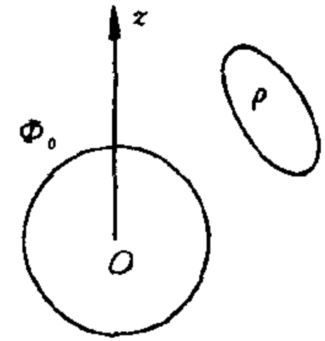


图 2-4-3 (c)

解 三个答案涉及到的问题有两点，是否用第一类格林函数，这些函数是否都相同，或有两个相同.

第一点是肯定的，因为（a）、（b）、（c）的边界条件都已用电势给出.

但是三个边界面的形状各不相同，决定了它们有各自的格林函数. 图（b）用上半空间的格林函数，图（c）用球外空间格林函数. 图（a）仅用上半空间格林函数，不能保证半球面上有 $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')=0$，所以它的格林函数应该是（b）、（c）二者格林函数的叠加. 所以答案（三）是正确的.

例 在无穷大导体平面上有半径为a的圆，圆内和圆外用极狭窄的绝缘环绝缘．设圆内电势为Vo，导体板其余部分电势为0，求上半空间的电势．

解 以圆心为柱坐标系原点，z 轴与平板垂直，R 为空间点到 z 轴的距离．$\boldsymbol{x}$ 点的直角坐标为$(R\cos\phi, R\sin\phi, z)$，$\boldsymbol{x}'$点的直角坐标为$(R'\cos\phi', R'\sin\phi', z')$，上半空间格林函数(5.11)式用柱坐标表出为

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2+R'^2+z'^2-2zz'-2RR'\cos(\phi-\phi')}}-\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2+R'^2+z'^2+2zz'-2RR'\cos(\phi-\phi')}}\right].$$

因为在上半空间 $\rho=0$，因此这问题是拉普拉斯方程第一类边值问题．由(5.18)式，上半空间的电势为

$$\varphi(\boldsymbol{x})=-\varepsilon_0\oint_S\varphi(\boldsymbol{x}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})\mathrm{d}S',\qquad(5.22)$$

积分面 S 是 $z'=0$ 的无穷大平面．法线沿 $-z'$方向．先计算格林函数的法向导数．

$$-\frac{\partial G}{\partial n'}=\frac{\partial G}{\partial z'}\bigg|_{z'=0}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{z}{[R^2+z^2+R'^2-2RR'\cos(\phi-\phi')]^{3/2}}.\qquad(5.23)$$

由于 S 上只有圆内部分电势不为零，因此(5.22)式中的积分只需对 $r \leqslant a$ 积分．

$$-\varepsilon_0 \int \frac{\partial G}{\partial n'} \varphi(\boldsymbol{x}') \mathrm{d}S'$$

$$= \frac{V_0}{2\pi} \int_0^a R' \mathrm{d}R' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi' \frac{z}{[R^2 + z^2 + R'^2 - 2RR' \cos(\phi - \phi')]^{3/2}}$$

$$= \frac{V_0 z}{2\pi} \int_R^a{}' \mathrm{d}R' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi' \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \left[1 + \frac{R'^2 - 2RR'\cos(\phi - \phi')}{R^2 + z^2} \right]^{-3/2}.$$

当 $R^2 + z^2 \gg a^2$ 时，可以把被积函数展开，得

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{V_0 z}{2\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^a R' \mathrm{d}R'$$

$$\cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi' \left[1 - \frac{3}{2} \frac{R'^2 - 2RR' \cos(\phi - \phi')}{R^2 + z^2} \right.$$

$$\left. + \frac{15}{8} \frac{[R'^2 - 2RR' \cos(\phi - \phi')]^2}{(R^2 + z^2)^2} + \cdots \right]$$

$$= \frac{V_0 a^2}{2} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \left[1 - \frac{3}{4} \frac{a^2}{R^2 + z^2} + \frac{15 R^2 a^2}{8(R^2 + z^2)^2} + \cdots \right].$$

例　一半径为a的导体球，被一极窄的绝缘环分隔成两个半球，上半球电势为V，下半球电势为$-V$，如图1.7.1所示，求球外的电势分布。

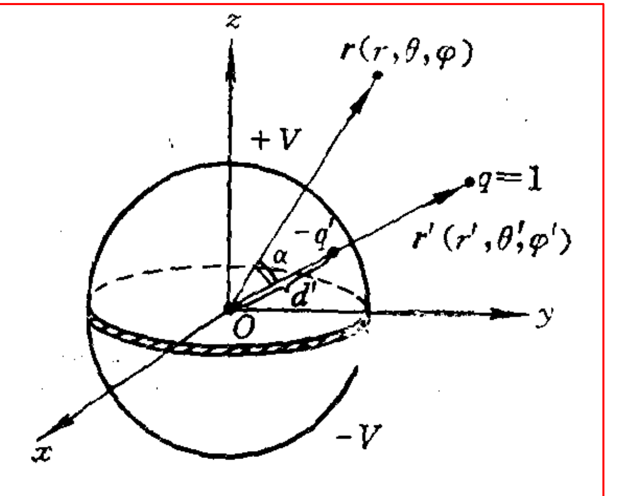


图 1.7.1

解：因为给定的是球面边界上的电势值，因此首先需要求球外空间的第一类格林函数。按照第一类格林函数的含义，可利用镜像法的结果。只要令q=1，位置在 $r'(r',\theta',\varphi')$ 的点电荷，其像电荷 $q'=-a/r'$，位置在(d',θ',φ')处，$d'=a^2/r'$，则球外空间的第一类格林函数为

$$G_1(r,r')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\alpha}}-\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{rr'}{a}\right)^2+a^2-2rr'\cos\alpha}}\right],$$

式中 α 为 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{r}'$ 的夹角。显然上式 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{r}'$ 是对称的，而且在 $r=a$ 的球面上 $G_1=0$。因为是球外区域问题，$\boldsymbol{n}'$ 与 $\boldsymbol{r}'$ 方向相反，所以

$$-\left(\frac{\partial G_1}{\partial n'}\right)_{r'=a}=\left(\frac{\partial G_1}{\partial r'}\right)_{r'=a}=\frac{r^2-a^2}{4\pi\varepsilon_0 a(r^2+a^2-2ar\cos\alpha)^{3/2}}.$$

因为球外 $\rho(\boldsymbol{r}')=0$，因此可得

$$\phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\oint\phi(\boldsymbol{r}')\frac{a(r^2-a^2)}{(r^2+a^2-2ar\cos\alpha)^{3/2}}\mathrm{d}\Omega',$$

式中 $\mathrm{d}\Omega'=\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\varphi'$, $\cos\alpha=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$，$\phi(\boldsymbol{r}')$ 为给定的边界面上的电势值. 本例上半球面 $\phi(\boldsymbol{r}')=V$, 下半球面 $\phi(\boldsymbol{r}')=-V$，将它代入上式，经过积分计算就可得到球外的电势分布. 尽管现在上式的积分计算很困难，但原则问题已经解决了.